

# ESTADÍSTICA Y DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: RELACIONES, PROBLEMAS Y APORTACIONES MUTUAS.<sup>1</sup>

*Carmen Batanero*

Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

[batanero@ugr.es](mailto:batanero@ugr.es), <http://www.ugr.es/~batanero/>

*En este trabajo reflexiono sobre el interés que para los futuros estadísticos tiene la formación didáctica, analizo los componentes y metodología que considero adecuados y sugiero posibles actividades para llevar a cabo esta formación. Estas reflexiones tienen en cuenta la experiencia de la Universidad de Granada, donde se incluyó una asignatura optativa de Didáctica de la Estadística dentro de la reciente Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas. Pensamos que otros compañeros podrían organizar cursos semejantes en otras universidades, bien dentro de los programas oficiales, o por medio de cursos de especialización de postgrado.*

*In this work we suggest that some didactical training is interesting for future statisticians, we analyze adequate components and methodology and suggest possible activities to carry this training out. These reflections take into account the experience at the University of Granada, where an optional course on Didactics of Statistics was included in the new Major in Statistical Sciences and Techniques. The aim is to encourage other colleagues to organize similar courses at their universities, either as part of official programs or in postgraduate training.*

## INTRODUCCIÓN

La educación estadística ha sido un importante foco de interés del *Instituto Internacional de Estadística* (ISI) desde su fundación en 1885, que se concretó oficialmente en 1948, cuando el *ISI* establece el *Comité de Educación*. Dicho comité estuvo encargado de promover la formación estadística a nivel internacional, colaborando, para este fin, con la *UNESCO* y otros organismos internacionales, y

---

<sup>1</sup>. En C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 95-120). Universidad de Alicante, 2002

marcando el comienzo de un programa sistemático de apoyo a la educación (Vere-Jones, 1997, Batanero, 2000).

Más recientemente, la *Sociedad Internacional de Educación Estadística (IASE)*, sección del *ISI*, fue creada en 1991 con el fin específico de mejorar la educación y la cultura estadística a nivel internacional. Su influencia es visible en la incorporación reciente de la enseñanza de la estadística en las escuelas, prácticamente en todos los países, y en el aumento de las publicaciones, congresos e investigaciones relacionadas con la educación estadística. Las tesis de doctorado y maestría en educación estadística son cada vez más numerosas, en departamentos de educación, didáctica de la matemática o de las ciencias, psicología e incluso estadística.

No es, sin embargo, frecuente que los futuros estadísticos reciban una formación didáctica durante sus estudios de pregrado (licenciatura). La finalidad de este trabajo es reflexionar sobre el interés que tiene para los futuros estadísticos una formación básica en didáctica, y proporcionar criterios sobre contenidos y metodología viable para una asignatura de didáctica, a partir de la experiencia de la Universidad de Granada.

## INTERÉS DE LA DIDÁCTICA EN LAS DIVERSAS FACETAS PROFESIONALES DEL ESTADÍSTICO

Las posibilidades de trabajo del estadístico, una vez finalizada su formación, son muy variadas, como se puede observar al analizar las actas de las *Sesiones del Instituto Internacional de Estadística* o más sencillamente, al constatar la presencia de información estadística y el uso de las técnicas estadísticas en la práctica totalidad de las actividades humanas, tanto científicas, como profesionales. Una clasificación simple de estas actividades, nos proporcionaría el siguiente espectro del trabajo profesional del estadístico:

1. El profesor de estadística en diferentes niveles educativos: la escuela (generalmente, como parte de una asignatura de matemáticas), formación profesional, o universidad (tanto en pregrado como postgrado).
2. El estadístico teórico que forma parte de un equipo de investigación universitario y trata de desarrollar nuevos métodos y procedimientos, así como de fundamentarlos mediante los correspondientes conceptos teóricos.
3. El estadístico aplicado que trabaja como consultor para profesionales especialistas

en otras materias a los que proporciona servicios de análisis de datos y diseño de experimentos o muestreo y mantiene actualizados sobre los nuevos desarrollos en estadística.

4. El “productor” de datos o de informes estadísticos para organismos oficiales, para instituciones financieras o empresas a las que proporciona datos que guían la toma de decisiones y permiten la planificación de servicios.
5. El “educador estadístico” que se preocupa de analizar la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, de comprender su funcionamiento y explicar los desajustes en el proceso, sugiriendo o diseñando dispositivos didácticos que contribuyan a paliar estos desajustes.

Es claro que ésta es una clasificación demasiado simple e ingenua. Por un lado, estos diferentes papeles no están completamente separados y en muchos casos una misma persona realiza dos o más de las anteriores funciones, simultáneamente o en diversas etapas profesionales.

Por otro lado, estos papeles no son dominio exclusivo de los licenciados en estadística y encontramos personas con una formación muy variada que los llevan a cabo: matemáticos, ingenieros, economistas, médicos, psicólogos, pedagogos, etc. Esto no es una característica exclusiva de la estadística, sino que en la actualidad es cada vez más frecuente que la formación inicial de un licenciado no sea completamente determinante de su futuro trabajo profesional, sino que la persona se forme en un proceso continuo como parte de su actuación profesional. En lo que sigue, consideraremos *estadístico* a la persona que trabaja y es competente en cualquiera de las facetas anteriormente descritas, independientemente de su formación inicial.

El interés del conocimiento didáctico es claro tanto para el profesor, como para el educador estadístico. También el estadístico que crea nuevos métodos y modelos teóricos debe ser capaz de comunicarlos a otros estadísticos, en diversos niveles de complejidad: artículos para revistas de investigación, artículos de difusión, cursos de formación dirigidos a estadísticos aplicados, libros de texto o apuntes. Pasaremos a analizar con más detalle el interés de la didáctica para el estadístico aplicado y para el productor de datos estadísticos. Pensamos principalmente en el conocimiento que fundamenta una manera de

transmitir conocimientos (contexto práctico, para Llinares y cols., 2000), aunque, en el caso del educador estadístico sería también importante el conocimiento didáctico como dominio de investigación.

### *La comprensión y el uso de la estadística*

Las ciencias empíricas, así como la actividad profesional en los campos más diversos dependen en gran medida del análisis estadístico de datos. La inferencia estadística se inició hace unos 300 años, aunque fue popularizada a partir de los trabajos de Fisher, Neyman y Pearson sobre los contrastes estadísticos. Sin embargo, debido a que la lógica de la inferencia estadística es difícil, su uso e interpretación no es siempre adecuado y han sido criticados en los últimos 50 años. Una amplia revisión de estas críticas puede encontrarse en Morrison y Henkel (1979).

Esta controversia se ha intensificado en los últimos años en algunas instituciones profesionales (Menon, 1993; Thompson, 1996; Ellerton, 1996, Robinson y Levin, 1997, 1999 Levin, 1998 a y b). Por ejemplo la American Psychological Association resalta en su manual de publicación del año 1994 que los contrastes estadísticos no reflejan la importancia o la magnitud de los efectos y animan a los investigadores a proporcionar información sobre el tamaño de estos efectos (APA, 1994, pg. 18). Más recientemente, la Task Force on Statistical Inference organizada por la APA ha publicado un artículo para iniciar la discusión en el campo, antes de revisar el manual de publicación de la APA (Wilkinson, 1999). Una decisión de este comité ha sido que la revisión cubra cuestiones metodológicas más generales y no sólo el contraste de hipótesis. Entre otras cuestiones, se recomienda publicar los *valores-p* exactos, las estimaciones de los efectos y los intervalos de confianza.

En la American Education Research Association, Thompson (1996) recomienda un uso más adecuado del lenguaje estadístico en los informes de investigación, enfatizando la interpretación del tamaño de los efectos y evaluando la replicabilidad de los resultados. Estas instituciones, así como la American Psychological Society han constituido comités específicos para estudiar el problema, los cuales recomiendan no abandonar el contraste de hipótesis, sino complementarlo con otros análisis estadísticos (Levin, 1998 b, Wilkinson et al., 1999).

A pesar de estas recomendaciones, los investigadores experimentales persisten en apoyarse en la significación estadística, sin tener en cuenta los argumentos de que los tests estadísticos por sí solos no justifican suficientemente el conocimiento científico. En otros casos, los críticos de los contrastes muestran en sus reacciones una falta de comprensión (cuando no desconocimiento profundo) del método estadístico, sus fines, posibilidades y limitaciones. En la conferencia que IASE organizó sobre “*La formación de los investigadores en el uso de la estadística*” (Batanero, 2001) se discutieron estos problemas y se vio la necesidad de concienciar tanto a estadísticos como a profesionales en diversos campos sobre los mismos y de mejorar la enseñanza de la estadística aplicada.

#### *Problema didácticos en el trabajo del consultor estadístico*

Una buena oportunidad para la formación estadística se presenta como parte del trabajo del consultor estadístico, donde también se plantean problemas de enseñanza y aprendizaje, tanto por parte de la persona que hace la consulta, como del propio estadístico. Jolliffe (2001) indica que el investigador debe ser capaz de comunicar claramente su problema al estadístico, y proporcionarle una comprensión básica del tema y fin de su estudio y de los conceptos involucrados en el mismo.

Tanto el estadístico como el profesional que lo consulta deben ser capaces de ponerse de acuerdo sobre la forma en que podrían simplificarse los requisitos de aplicación de un procedimiento estadístico para el trabajo particular en curso y el estadístico debe ayudar al profesional a clarificar progresivamente sus preguntas sobre el análisis de datos, que un principio seguramente serán poco precisas. También será capaz de comunicarle en forma sencilla lo que puede lograr al aplicar cada una de las técnicas estadísticas que sean pertinentes para el problema y ayudarle a presentar los resultados del análisis de los datos en forma que sea comprensible y significativo para la audiencia a la que va dirigida el informe de investigación.

Saville (2001) describe distintos tipos de consulta y los pasos en que el estadístico puede proporcionar ayuda en el proceso de investigación o en el desarrollo de cualquier otro trabajo experimental. Durante estas consultas el profesional debe aprender sobre diseño de investigaciones y análisis de datos y sobre el tipo de preguntas que puede

plantear a un estadístico. Los estadísticos, por su parte deben aprender técnicas de consultoría, incrementar su conocimiento estadístico aplicándolo a nuevos problemas, muchas veces difíciles.

La consultoría, podría plantearse como prácticas en las licenciaturas de estadística y de esta forma los futuros estadísticos podrían adquirir experiencia en el trabajo con clientes. En la universidad donde se realicen las prácticas se podría crear poco a poco una cultura favorable – que hoy día no existe- hacia la consultoría estadística. Belli (2001) indica que los consultores no siempre son conscientes de la responsabilidad para ayudar a que sus clientes lleguen a adquirir una cultura estadística y habilidades de análisis de datos sencillos. Tienen una oportunidad quizás única de enseñar a sus clientes usando sus propios datos y problemas en los cuales están interesados. Deben tratar de cambiar la tendencia a consultar al estadístico sólo después que los datos han sido recogidos. El estadístico debiera formar parte del equipo desde el comienzo de la investigación, aconsejar sobre la forma de selección de la muestra, diseño del cuestionario y control de las variables.

Los estadísticos también tienen que adquirir capacidades diversas. Además de la mayor experiencia con la estadística y sus aplicaciones Godino y cols. (2001) sugieren que los estadísticos necesitan incrementar su capacidad de formular problemas, producir informes escritos, comunicar con los clientes, orientar una sesión de consultoría y capacidades didácticas.

#### *Estadísticas oficiales y cultura estadística*

Como señaló Cheung (1998) en su conferencia de apertura de ICOTS- 5, la nueva economía y la globalización han planteado inmensas dificultades a los organismos oficiales de estadística, a la vez que han hecho aparecer nuevas áreas de investigación en estadística. Con la transición de las actividades económicas tangibles a las intangibles (servicios) la medición y seguimiento de la nueva economía ha crecido en dificultad, se precisa más información y el desarrollo de nuevas clasificaciones, conceptos y metodologías. La globalización, que incrementa el flujo del intercambio internacional, hace que no sea suficiente el seguimiento de la economía regional o nacional, sino comprender y seguir los flujos internacionales de comercio e inversiones, ya que una

crisis en cualquier lugar del planeta puede tener efectos inesperados sobre otras economías o políticas.

Los desarrollos recientes en las estadísticas oficiales plantean también desafíos a la educación estadística que ésta debe asumir. Un primer desafío es la formación de los estadísticos oficiales. Aunque no suele haber una educación formal (licenciatura o postgrado) destinada específicamente a este fin, el Instituto Internacional de Estadística, organiza seminarios específicos (Van den Broecke, 1998) y trata de establecer vínculos con los estadísticos oficiales a través de otra de sus secciones, la IAOS (International Association for Official Statistics). Otras instituciones (Ntozi y Kibirige, 1993; Teeken, 1998) también organizan cursos destinados a la formación permanente de los responsables estadísticos y a su actualización en los nuevos modelos y desarrollos de la estadística.

Formar a los estadísticos oficiales, no es, sin embargo, suficiente. La sociedad de la información se apoya cada vez más en la estadística y los organismos oficiales requieren que los empresarios, profesionales y científicos que serán los usuarios de las estadísticas que ellos producen adquieran una formación adecuada. Cheung (1998) señala que es preciso que los estudiantes que salgan de la universidad y formación profesional, comprendan las bases del muestreo y la teoría estadística, pero esto no es bastante (aunque si necesario) para enfrentarse al mercado de trabajo futuro. Es crucial que la enseñanza enfatice las habilidades analíticas, más allá del cálculo y la aplicación de “recetas”. Los estudiantes deben desarrollar un sentido de los datos, la habilidad de reconocer patrones y formular modelos. Una gran parte de la práctica estadística del futuro está ligada a las tecnologías de la información, de modo que los estudiantes deben desarrollar la capacidad de manejo e integración de bases de datos, así como usar estas tecnologías para la explotación y difusión de sus resultados.

Finalmente, la estadística producida por los organismos oficiales debe llegar en forma comprensible a todos los ciudadanos. Cox (1997) sugiere que las organizaciones estadísticas oficiales ponen, por un lado, el énfasis en la provisión de información y consejo para el uso del gobierno y uso profesional y en investigación, pero por otro se interesan en proporcionar información a la sociedad, como un todo. Para este autor, *“la valoración pública de los principios generales en la interpretación de la evidencia,*

*falta en muchos aspectos de los artículos en la prensa y programas de radio y televisión”,..”La información, a veces sensacionalista de los resultados de pequeños estudios médicos frecuentemente mal diseñados es especialmente preocupante” (p. 273).*

Los organismos responsables de la producción de las estadísticas (institutos y agencias oficiales, centros de investigación o producción) necesitan la colaboración de los ciudadanos en el proceso de recolección de datos. Ningún método estadístico, por eficiente, adecuado y potente que sea puede producir resultados útiles a partir de datos no fiables. Es preciso mejorar la imagen pública de la estadística, que se identifica con frecuencia con una manipulación de datos de acuerdo a los intereses de la persona o grupo que realiza el estudio (Campbell, 1974).

Debido a la presión de la vida moderna y falta de tiempo, todos nos hemos sentido tentados de responder lo más rápidamente posible, cuando se nos solicita colaborar en una encuesta e incluso a veces tratamos de evadirnos. Es importante hacer consciente a todos los ciudadanos de los problemas que pueden surgir por la no respuesta, la no veracidad o la información faltante. Debemos también aumentar su confianza en los productores de estadística, en la confidencialidad de la información y mostrarles cómo su colaboración en el proceso de una encuesta podrá servir para tomar decisiones acertadas que reviertan en su propio beneficio y en el desarrollo global. Como señala McDonald (2001), *“para mantener altas tasas de respuesta y con ello conseguir datos de alta calidad, una oficina estadística necesita la confianza del público, y en particular de los que son encuestados”* (p. 121).

Esta preocupación de hacer comprensible la estadística a todos los ciudadanos está llevando a los institutos y organismos productores de estadística a implicarse de una forma activa y creciente en el desarrollo y difusión de recursos para la enseñanza. Un buen ejemplo lo tenemos en el Proyecto ALEA (Campos y cols., 2001) que proporciona instrumentos de apoyo para la enseñanza de la estadística para alumnos y profesores de enseñanza primaria y secundaria (<http://alea-estp.ine.pt>). Asimismo se organizan los mini-censos escolares, con la doble finalidad de dar a conocer a los alumnos lo que es un censo, el tipo de información recogida y cómo es procesada, y, por otro, aumentar el interés y colaboración de los padres y en general de los ciudadanos, en la elaboración

del censo. Como indican los autores, el proyecto refleja la preocupación por la formación de los profesores que actualmente enseñan la estadística, y por la necesidad de que la enseñanza de la estadística esté centrada en los datos y no en la matemática.

Proyectos similares han sido desarrollados en relación con el censo 2001 en otros países; por ejemplo, en el Reino Unido, se está desarrollando un proyecto internacional en el que los niños contestaron un cuestionario (el censo escolar) en Noviembre, 2000, enviando sus respuestas electrónicamente a una base de datos nacional, siguiendo un proceso paralelo al censo de los adultos que se llevó a cabo en Abril, 2001. En la actualidad se han incorporado otros países como Italia, Sudáfrica, Australia y Nueva Zelanda, quienes, realizan en la escuela actividades de comparación del censo escolar en los países participantes, y preparan materiales didácticos, recursos y actividades para la enseñanza de la estadística, basadas en el proyecto. Toda esta información es periódicamente actualizada en la página del proyecto (<http://www.censusatschool.ntu.ac.uk/>) que remite también a los servidores locales del proyecto en cada uno de los países participantes y otra serie de recursos para la educación.

## EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO Y SU CONTEXTUALIZACIÓN

En la sección anterior hemos justificado que la problemática didáctica es una constante del trabajo del estadístico en sus diversas facetas profesionales. Creemos por ello justificado proporcionar algunos conocimientos didácticos- al menos por medio de asignaturas optativas- como parte de la formación inicial o permanente de los licenciados y diplomados en estadística. La Universidad de Granada fue sensible a esta problemática y en el nuevo plan de estudios para los Licenciados en Estadística se incluyó una asignatura optativa de Didáctica de la Estadística a partir de 1995. Esta asignatura se puede cursar en los últimos años de la especialidad (4º o 5º curso), tiene una duración de 6 créditos (unas 60 horas lectivas) y es elegida casi por la mayoría de los alumnos de la licenciatura. En lo que sigue tratamos de describir este curso.

Al tratar de diseñar un curso sobre didáctica de la estadística, debemos comenzar por analizar lo que en la educación matemática, dentro de la problemática de formación de profesores se conoce como conocimiento didáctico del contenido o conocimiento

profesional del profesor. El cambio metodológico en la enseñanza, no sólo de las matemáticas, sino de otras materias, es paralelo a las posiciones constructivistas sobre el aprendizaje y sobre la construcción del conocimiento. Estas concepciones consideran que, además de la formación científica del profesor, se precisan algunos conocimientos mínimos de psicología, educación y didáctica de la disciplina (Thompson, 1992).

La investigación sobre formación de profesores está produciendo abundante información sobre este 'conocimiento didáctico del contenido' (Shulman, 1986). También desde la educación estadística se han llevado a cabo reflexiones sobre este tema. Por ejemplo, Steinbring (1990) indica que la enseñanza de la estadística y probabilidad requiere de los profesores demandas que no sólo se refieren a los aspectos técnicos del conocimiento, sino también al conocimiento profesional del profesor. Entre dichos conocimientos incluye:

- saber organizar e implementar proyectos de estadística y análisis exploratorio de datos;
- promover diferentes formas de cooperación y trabajo entre sus alumnos;
- comprender los experimentos, simulaciones, representaciones gráficas, encuestas, datos, no sólo como ayudas a la enseñanza, sino como formas esenciales de conocimiento y comprensión en estadística.

Biehler (1990) habla del “metaconocimiento estadístico” como parte del conocimiento profesional del profesor. Incluye conocimientos sobre la historia, filosofía y epistemología de la estadística, sus controversias, la forma en que la estadística se aplica y se regula en la práctica, el papel que juegan las disciplinas en las que se aplica la estadística sobre la misma estadística, el software estadístico y criterios para su evaluación.

En un artículo previo (Godino, Batanero y Flores, 1999) analizamos lo que entendemos por este conocimiento, indicando que sus componentes básicos son los siguientes:

- La reflexión epistemológica sobre el significado de los conceptos, procedimientos (en general objetos) particulares que se pretende enseñar, es decir, en este caso, la reflexión epistemológica sobre la naturaleza del conocimiento estocástico, su

desarrollo y evolución.

- Análisis de las transformaciones del conocimiento para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza. Este análisis permite reflexionar sobre los diversos niveles de comprensión posibles respecto a un mismo conocimiento y valorar el nivel y forma particular en que un determinado concepto podría ser enseñado a una persona particular.
- Estudio de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas que permitirá orientar mejor la tarea de enseñanza y evaluación del aprendizaje.
- Análisis del currículo, situaciones didácticas, metodología de enseñanza para temas específicos y recursos didácticos específicos. Todo ello forma parte de los recursos metodológicos disponibles para mejorar la acción didáctica.

Una vez decidido los contenidos a incluir en un curso de didáctica, es importante también buscar criterios y actividades para llevar a cabo la formación didáctica de los futuros licenciados en estadística. Desde una perspectiva constructivista y social de la educación, los conocimientos didácticos tendrían que ser contextualizados en situaciones significativas para los profesores en formación, pues la metodología de los cursos de preparación de profesores tiene que reflejar los principios metodológicos deseables en la propia acción didáctica de los profesores.

La visión de la tarea del profesor como profesional reflexivo (Shulman, 1986) enfatiza el protagonismo del profesor en su propio proceso de formación y en la toma de decisiones en su tarea profesional. Para ello, los cursos de formación tendrían que crear las condiciones idóneas para que los profesores expliciten y comuniquen sus ideas previas en relación a su tarea profesional (Flores, 1994) y las confronten con los resultados producidos por la investigación didáctica, adaptándolas, cuando sea necesario.

Esto plantea al profesor de didáctica el problema del diseño de situaciones problemáticas para la formación didáctica de los profesores, que reúnan las características adecuadas para la enseñanza del conocimiento didáctico del contenido, de acuerdo con los principios mencionados. En particular, estas situaciones deberían permitir la reflexión epistemológica sobre la estadística, el estudio de las investigaciones didácticas sobre

errores y dificultades de aprendizaje, y el análisis y experimentación de métodos y recursos de enseñanza.

### EJEMPLOS DE ACTIVIDADES PARA LA FORMACIÓN DIDÁCTICA

En lo que sigue presentaremos algunos ejemplos de actividades que hemos utilizado en el curso citado y que podrían ser también útiles en otros cursos destinados a la formación sobre didáctica de la estadística de profesores de secundaria o universitarios.

Hemos elegido algunos ejemplos de actividades que permiten contextualizar la reflexión epistemológica sobre las ideas estocásticas fundamentales, el análisis de las dificultades y obstáculos de los alumnos, y la identificación de las correspondientes variables didácticas. Como sugiere Steinbring (1990), debido a su riqueza, tanto el conocimiento estocástico como el conocimiento profesional del profesor necesitan ser reconstruidos por sí mismo y no puede transmitirse simplemente “desde fuera” o ser prescrito, aunque esto no significa que no podamos ayudar y proporcionar soporte en este proceso de construcción.

Con estos ejemplos mostramos algunos aspectos básicos de lo que denominamos “análisis didáctico del contenido”. Han sido tomados del texto *Didáctica de la Estadística* (Batanero, 2001) que puede descargarse de Internet de la dirección <http://www.ugr.es/local/batanero> donde se sugieren otras semejantes. En principio podemos clasificarlas en los siguientes apartados:

1. Resolución de problemas paradójicos y reflexión sobre el significado de los contenidos estocásticos involucrados.
2. Análisis de ítems o tareas usadas en la investigación sobre razonamiento estocástico.
3. Análisis de respuestas de alumnos a tareas de evaluación.
4. Análisis de datos e interpretación de resultados sobre el análisis de datos en la prensa, revistas o informes de investigación.
5. Análisis de documentos curriculares.
6. Análisis de libros de texto y recursos didácticos, incluyendo el software didáctico y materiales o información disponibles en Internet.
7. Planificación de la evaluación o de secuencias de enseñanza.

8. Comentarios de textos y discusiones dirigidas sobre los mismos.
9. Búsqueda bibliográfica y ampliación de temas de su interés.

En lo que sigue comentamos la finalidad de estas actividades, presentando ejemplos, en los casos que pensamos podría ser interesante para clarificar al lector el tipo de actividad que proponemos.

#### *Resolución de situaciones problemáticas paradójicas y reflexión sobre su contenido*

Se trata de hacer experimentar a los futuros profesores la dificultad que encuentra un alumno al resolver las tareas o problemas que se les plantea. Puesto que el estadístico en los últimos años de su formación tiene unos conocimientos muy sólidos de estadística, hemos de buscar algunos ejemplos de problemas, que, siendo aparentemente sencillos, puedan, sin embargo, tener soluciones contraintuitivas o sorprendentes.

No es difícil encontrar este tipo de situaciones, ya que la historia de la probabilidad y estadística está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes y que muestran que la intuición estocástica, con frecuencia nos engañan. Estos problemas, así como las soluciones, tanto correctas como erróneas que algunos de los futuros estadísticos pueda defender vehementemente en la clase, nos sirven para analizar cuáles son los conceptos involucrados en la solución del problema, algunos de los cuales surgieron precisamente para dar solución a uno de estos problemas paradójicos. Una mirada a la historia permite tomar consciencia de que los conceptos estadísticos no son inmutables. Por el contrario, al igual que en matemáticas u otras ramas de las ciencias, son fruto del ingenio y la construcción humana para tratar de dar respuesta a situaciones problemáticas y están sujetos a evolución. Las soluciones admitidas como correctas en un momento histórico son posteriormente rebatidas o mejoradas contribuyendo de este modo al avance de la estadística.

Esta construcción no ha sido sencilla, y es sólo el esfuerzo y el aprendizaje a partir del análisis de los propios errores, lo que lleva al progreso de la ciencia. Paralelamente, un proceso similar se desarrolla en el aprendizaje de los alumnos que deben construir su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzo.

Particularmente he encontrado una gran ayuda para encontrar este tipo de

actividades en el libro de Székely (1986), en el que se describen una serie de paradojas, su historia y solución, así como soluciones erróneas publicadas como verdaderas por autores de prestigio. Suelo proponer a mis alumnos este tipo de problemas, y, cuando, como es natural alguno se empeña en mantener una solución errónea, se le puede consolar viendo que matemáticos prestigiosos cometieron su mismo error.

Es importante en este tipo de problemas dejar a los futuros profesores que encuentren sus soluciones (correctas e incorrectas) y organizar finalmente un debate en clase entre los propios alumnos, para que ellos mismos lleguen a la solución correcta y perciban los puntos en que cometieron un error. Todo ello les llevará a una mayor sensibilidad hacia las dificultades de sus alumnos y el papel del error en el proceso de aprendizaje.

Un ejemplo es proponer a los profesores en formación experimentar ellos mismos una situación didáctica que ha sido diseñada para la enseñanza de la probabilidad en el nivel de secundaria. Los profesores en formación harán el papel de alumnos y el formador de profesores el papel del profesor. La actividad se inicia planteando el siguiente juego:

*Actividad 1. Se toman 3 fichas de la misma forma y tamaño, de las cuales una es roja por ambas caras; otra es azul por una cara y roja por la otra, y la tercera es azul por las dos caras. El profesor coloca las tres fichas en una caja, que agita convenientemente, antes de seleccionar una de las tres fichas, al azar. Muestra, a continuación, una de las caras de la ficha elegida, manteniendo la otra tapada, pidiendo a sus alumnos que adivinen el color de la cara oculta. Una vez hechas las apuestas, el profesor muestra la cara oculta. Cada alumno que haya acertado en la predicción efectuada, consigue un punto.*

Una vez comprendido en qué consiste el juego, y tras haber hecho algunos ensayos, se pide a los estudiantes (en este caso los estadísticos en formación) que busquen una estrategia que les permita obtener el mayor número de puntos (aciertos) en una serie larga de repeticiones del juego. Cada estudiante pensará individualmente su estrategia, finalmente deben demostrar por qué la estrategia elegida es correcta.

Finalmente se organiza el debate en clase para decidir cuál es la mejor estrategia (que consiste en apostar al mismo color de la cara que puede verse). A algunos futuros

estadísticos, a pesar de su formación, les cuesta mucho ver que esta estrategia es mejor que, por ejemplo apostar al azar. El análisis de los diferentes argumentos lleva a la idea de probabilidad condicional y experimento compuesto dependiente, y a concienciarse de la dificultades de los alumnos con la probabilidad condicional.

La situación también sirve para mostrar una posible metodología de enseñanza de la probabilidad, tomada de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986):

- Acción: comienza el juego y se trata de buscar una estrategia.
- Formulación- comunicación: los participantes tratan de describir su estrategia por escrito.
- Validación: se trata de razonar por qué la estrategia da buenos resultados.
- Institucionalización: toda la clase debate para llegar a un acuerdo sobre la solución correcta y reflexionar sobre lo que se ha aprendido. El profesor fija la solución.

Adicionalmente estos problemas podrían utilizarse para promover la reflexión sobre las propias creencias de los futuros estadísticos en torno a la resolución de problemas y su papel en la enseñanza, teniendo en cuenta algunas de las categorías sugeridas por Contreras (1999). Otros ejemplos posibles de problemas a proponer con la misma finalidad son la solución de los problemas de división de la apuesta, planteado por el caballero de Meré a Pascal y Fermat o la Paradoja de Blythe, que reproducimos a continuación:

*Actividad 2 (Paradoja de Blythe. Tenemos tres ruletas: La primera siempre da como resultado el número 3. La segunda da como resultado 2 con probabilidad 0.51, 4 con probabilidad 0.29 y 6 con probabilidad 0.20. La tercera da como resultados 1 con probabilidad 0.52 y 5 con probabilidad 0.48. Si cada uno de dos jugadores tiene que elegir una ruleta, y gana el que obtenga el número mayor, ¿cuál es la mejor elección para el primer jugador? ¿Cambia esta elección si son tres los jugadores?*

*Análisis de tareas o ítems de evaluación y respuestas de alumnos a las mismas*

Con este tipo de tarea se trata de analizar el contenido estadístico y los conocimientos requeridos para resolver alguna tarea de evaluación o usada en alguna

investigación sobre razonamiento estadístico. Se pensará a priori las posibles respuestas correctas o incorrectas que cabe esperar de los alumnos. Este análisis se compara con respuestas de alumnos de un cierto nivel escolar, con la finalidad de comparar nuestra percepción de los conocimientos de los alumnos, con sus conocimientos y dificultades reales.

Por ejemplo, se propone a los profesores en formación analizar las respuestas de la Tabla 1, obtenidas por Serrano (1996) en una investigación sobre la capacidad de reconocimiento de las propiedades de las sucesiones aleatorias por escolares de 14 y 18 años, usando el siguiente ítem, tomado de Green (1991):

*Actividad 3. Indica la respuesta correcta al Ítem 1 y analiza las respuestas dadas por los alumnos dadas en la Tabla 1 indicando las concepciones subyacentes sobre la aleatoriedad.*

*Ítem 1: Se pidió a algunos niños lanzar una moneda 40 veces. Algunos lo hicieron correctamente. Otros hicieron trampas. Anotaron con la letra C la aparición de una cara y con X una cruz. Estos son los resultados de Daniel y Diana:*

*Daniel: CXCXXCCXCXCCXXCXXCCXXCXCXCXCXCXCXXCX*

*Diana: CXXXCXXCXCXXXCXXXXCXXXCXXCXXXCXXXCXXCX*

*¿Hicieron trampas Daniel o Diana? ¿Por qué?.*

*Tabla 1: Frecuencias y porcentajes de respuestas de estudiantes de secundaria al ítem sobre percepción subjetiva de la aleatoriedad*

	<i>Alumnos de 14 años</i>		<i>Alumnos de 18 años</i>	
	<i>(n=147)</i>		<i>(n=130)</i>	
	<i>Daniel</i>	<i>Diana</i>	<i>Daniel</i>	<i>Diana</i>
<i>Hizo trampas</i>	<i>54 (36.7)</i>	<i>83 (56.1)</i>	<i>30(23.1)</i>	<i>63 (48.5)</i>
<i>No hizo</i>	<i>86(58.1)</i>	<i>53 (36.1)</i>	<i>82 (63.0)</i>	<i>48 (36.9)</i>
<i>No sabe</i>	<i>7 (4.8)</i>	<i>11 (7.5)</i>	<i>18 (13.8)</i>	<i>19 (14.6)</i>

A partir de la actividad se pretende que el profesor en formación reflexione sobre la complejidad de la idea de aleatoriedad, analice las estrategias seguidas por los

alumnos, e identifique las concepciones de aleatoriedad que se pueden identificar de la respuesta, así como las variables de la tarea que influyen en el cambio de respuesta por parte de los alumnos (*variables didácticas*). La tabla 1 puede complementarse con otra tabla en que se describan con detalle las estrategias usadas en la solución del problema.

En este ejemplo, hemos presentado los resultados agrupados en una tabla de frecuencias. Alternativamente, podemos dar a analizar hojas de respuestas de soluciones de problemas o transcripciones de entrevistas para que el futuro profesor identifique el tipo de razonamiento seguido por el alumno. Como ejemplo, reproducimos a continuación el enunciado de un problema simple de combinatoria cuya solución es  $VR_{3,4}$  y dos soluciones (erróneas) de alumnos universitarios. En este caso se pediría a los futuros profesores que den la solución correcta al problema, cuales son los conocimientos que se requieren en la solución e indiquen cuáles son los razonamientos erróneos que han llevado a estos dos alumnos a la solución incorrecta.

*Actividad 4. Resuelve el problema que reproducimos a continuación y los conocimientos que se requieren para resolverlo. Analiza las soluciones de Elena y Pablo, mostrando los razonamientos que les han llevado a una solución errónea.*

*Problema: Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.*

*Solución de Elena*

*A, B, V, R*

*Hay que tener en cuenta que los coches son distinguibles*

*Casos: Que le de a uno solo los 4 coches: 4 posibilidades*

*Que le de a uno 3 coches:  $4 \cdot C_4^3$*

*Que le de a uno 2 coches y a otro otros 2:  $C_4^2 \cdot 4 \cdot 3$*

*Que le de a uno 2 coches y a cada uno de los otros 2 un coche:  $C_4^2 \cdot 4 \cdot C_3^2$*

*Que le de uno a cada uno:  $P_4$*

*Se suman todas las posibilidades*

*FLT: 4 0 0, 3 1 0, 3 0 1, 2 1 1, 2 2 0, 2 0 2, 1 3 0, 1 2 1*

*1 1 2, 1 0 3, 0 4 0, 0 0 4, 0 3 1, 0 2 2, 0 1 3*

*Solución de Pablo*

*A, B, V, R Fer., Luis, Ter.*

*Cuenta el orden y la naturaleza de los elementos (el orden va a ser necesario para tener en cuenta cual coche se lleva cada hermano, es decir, es distinto que le toque a un hermano el coche verde que el azul) y, por tanto:*

*$V_{4,3} = 4! / (4-3)! = 4! / 1! = 24$  maneras posibles.*

### *Interpretación de resultados sobre el análisis de datos en prensa, revistas o informes de investigación*

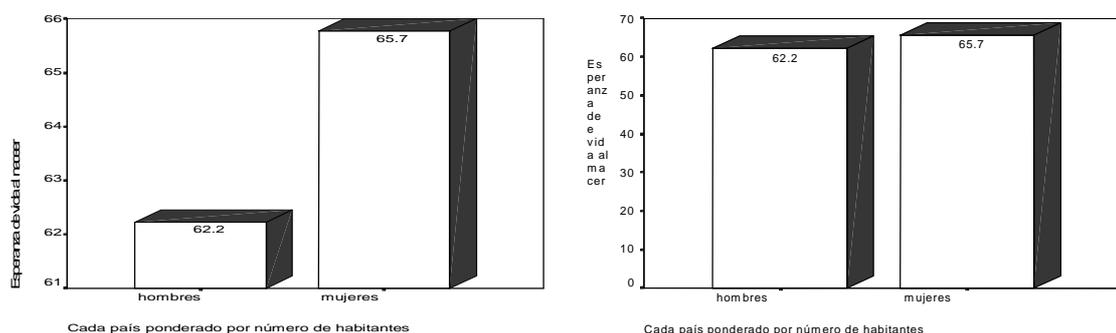
Una de las más probables salidas profesionales del estadístico es la de consultor, pero, como hemos razonado anteriormente, también en esta profesión se encontrará con la problemática didáctica. Los futuros estadísticos están especialmente motivados hacia cualquier actividad relacionada con el análisis e interpretación de los datos y también por medio de estas actividades podemos llevarles a la reflexión didáctica.

Son muchas las actividades de este tipo que podemos proponer. En el siguiente ejemplo pedimos a los futuros estadísticos analicen dos salidas gráficas producidas por el paquete estadístico SPSS; una de ellas es la salida estándar (izquierda), la otra ha sido manipulada cambiando la escala de uno de los ejes (derecha). Es evidente que las dos salidas no proporcionan el mismo tipo de información y que la salida estándar puede inducir una interpretación errónea del análisis de los datos.

En este caso el ejemplo está tomado directamente de la salida del ordenador y muestra que no basta con saber manipular un paquete estadístico para ser capaz de analizar correctamente los datos. El ejemplo es muy trivial y el error es fácil de detectar. Otros casos son menos evidentes (por tanto potencialmente más peligrosos) y pueden encontrarse tanto en la prensa, como en resultados de trabajos de investigación. Este tipo de actividad puede concienciar al futuro estadístico sobre la problemática del uso inadecuado de la estadística, sobre la dificultad del análisis de datos y sobre su responsabilidad didáctica en su futuro posible trabajo de consultor, en el que puede colaborar para extender un mejor uso y mayor valoración de la estadística por los profesionales.

Actividad 5. En la Figura 1 hemos representado la esperanza media de vida en hombres y mujeres, calculada a partir de datos reales de esperanza de vida en 97 países, con dos escalas diferentes. Compara estos dos gráficos e indica si te parecen o no adecuados para representar la diferencia entre la esperanza media de vida de mujeres y hombres. Uno de los dos gráficos ha sido obtenido directamente del ordenador, mientras que el otro ha sido manipulado. Averigua cuál ha sido manipulado.

Figura 1 Esperanza de vida media en hombres y mujeres



### Análisis de documentos curriculares, libros de texto y recursos didácticos

Mediante estas actividades se pretende proporcionar una primera información de tipo profesional e introducir elementos y conocimientos que faciliten su futura labor como profesor. Por ejemplo, podemos proponer analizar la presencia de la estadística en los documentos curriculares que hacen referencia a la formación profesional. Puesto que la formación matemática de los alumnos que ingresan en formación profesional es, en general, deficiente, se podría reflexionar sobre posibles formas de introducir la estadística que permitan una comprensión intuitiva, sin requerir conocimientos matemáticos profundos.

Análogamente podríamos estudiar las sesiones que componen la revista *Teaching Statistics*, especialmente orientada al profesor de estadística de alumnos comprendidos entre 9 y 18 años. El análisis de esta revista puede proporcionar una idea de los diversos tipos de conocimientos requeridos en la labor profesional de los profesores de estadística: historia, investigación didáctica, materiales y recursos, problemas, evaluación, conjuntos de datos, rincón del ordenador, etc.

Existen también muchos recursos disponibles en Internet orientados específicamente a la enseñanza de la estadística. Por ejemplo, en Mulekar (2000) se

listan una serie de direcciones donde puede encontrarse material específicamente relacionado con el curso introductorio de estadística en la universidad, incluyendo libros o enciclopedias, laboratorios virtuales, ideas para actividades o proyectos. conjuntos de datos, software,

### *Otras actividades*

Cuando se disponga de tiempo, podemos dar a los alumnos a leer algunos textos producidos por estadísticos de prestigio, que plantean problemas estadísticos o didácticos y pedirles un comentario sobre el mismo. A partir de estos comentarios se puede organizar en clase una discusión dirigida sobre la interpretación de un concepto estadístico difícil o sobre algún problema didáctico.

Como ejemplo, suelo proponer a mis alumnos la lectura del texto de Fisher: “Las matemáticas de una catadora de té”, reproducido en 1979 en la enciclopedia Sigma. Los alumnos deben leer el texto e identificar las ideas claves sobre el test de significación, introducidas en el ejemplo. Posteriormente se organiza en la clase una discusión sobre la metodología de inferencia que subyace en este artículo de Fischer (el test de significación) y la metodología del contraste de hipótesis de Neyman y Pearson. Estas dos metodologías de inferencia se mezclan y confunden en la práctica estadística y muchas de las críticas que hoy día se hacen de los contrastes de hipótesis se deben a que no se diferencian estas metodologías ni las situaciones en las que debieran ser aplicables (Batanero, 2000). La lectura y discusión del documento se dirige a concienciar a los futuros estadísticos sobre esta problemática y alertarles sobre los errores en inferencia que con frecuencia encontrarán en sus clientes en su futuro trabajo como consultor.

Los alumnos que se interesan por realizar un trabajo personal para obtener una mejor calificación son alentados a iniciarse en las técnicas de búsqueda bibliográfica y en la ampliación de temas de su interés. Posteriormente pueden preparar pequeños ensayos de tipo histórico, epistemológico o didáctico.

Finalmente, y esto como actividad obligatoria, cada alumno debe preparar una unidad didáctica para la enseñanza de un tema para un tipo dado de alumnos (siendo de su elección el tema y tipo de alumno). En esta unidad deben aplicar los conocimientos adquiridos a lo largo del curso e incluir los objetivos, contenidos, actividades y criterios

de evaluación, así como materiales requeridos. Los alumnos a lo largo del curso tienen múltiples ocasiones de consultar, tanto libros de texto de diversos niveles educativos, como proyectos específicamente dirigidos a la enseñanza de la estadística, españoles y extranjeros.

## ORGANIZACIÓN Y EVALUACIÓN DEL CURSO

Para completar este trabajo, creemos que es útil describir con más detalle el curso, incluyendo contenidos, metodología y evaluación.

### *Contenidos*

Los contenidos que contemplamos en el curso citado, tratan de concretar el conocimiento didáctico del contenido estadístico, tal como lo hemos descrito en la segunda sección.

1. Introducción: La educación estadística. Perspectiva histórica. Asociaciones, revistas, congresos, fuentes de información.
2. Fundamentos epistemológicos: Estadística. Panorama actual. Aleatoriedad. Concepciones de probabilidad e ideas estocásticas fundamentales. Análisis exploratorio de datos. Asociación y causalidad. Inferencia e inducción. Modelización estadística. Análisis multivariante.
3. Desarrollo cognitivo: Etapas en el desarrollo del razonamiento estocástico: Distinción entre azar y determinismo. La idea de probabilidad. Cuantificación de probabilidades. Probabilidad condicional e independencia. Convergencia y distribución. Inducción, recursión y razonamiento combinatorio. La noción de asociación. Efecto de la instrucción.
4. Heurísticas y sesgos en el razonamiento estocástico del sujeto adulto: Percepción subjetiva de la aleatoriedad y aprendizaje probabilístico. Investigaciones sobre razonamiento estocástico en situaciones de toma de decisión. Heurísticas de representatividad, disponibilidad y ajuste. Niveles de comprensión de gráficos. Razonamiento sobre los promedios. Pensamiento causal y juicios de asociación. Razonamiento combinatorio. Razonamiento inferencial.

5. Currículo e instrucción: Perspectiva de la enseñanza de la Probabilidad y Estadística en los diversos niveles educativos: enseñanza primaria y secundaria. Formación de usuarios de la Estadística en diversas especialidades: la Estadística en la industria, el gobierno, la investigación. Problemas didácticos asociados a la consultoría estadística. Formación de profesores. Teorías instruccionales y metodología de enseñanza.
6. Materiales curriculares: Análisis de situaciones didácticas y libros de texto. Materiales didácticos. Proyectos. Fuentes de datos. Instrumentos de evaluación del razonamiento estocástico. El ordenador: simulación, análisis de datos, hojas electrónicas, gráficos. Recursos en Internet.

### *Organización y metodología*

El curso se concentra en el segundo cuatrimestre y se organiza en dos sesiones de dos horas semanales cada una de ellas. La longitud de las sesiones permite organizarlas de acuerdo a un esquema que alterna actividades por parte de los alumnos, debate en clase y exposición por parte del profesor, apoyada en transparencias y otros materiales. Los alumnos previamente disponen de una copia de los apuntes preparados especialmente para la asignatura (Batanero, 2001b).

Supongamos que estamos tratando de completar el tema “ideas estocásticas fundamentales”, iniciado en la sesión anterior. Este tema es uno de los dedicados a la epistemología de la probabilidad. La sesión se organizaría en la forma siguiente:

- *Resumen de lo tratado en la sesión anterior* (10 minutos): Las ideas estocásticas fundamentales son aquellas que pueden deben enseñarse en cualquier nivel educativo, aunque incrementando el nivel con que se estudian a lo largo del currículo. Son ideas que han sido importantes para el desarrollo de la estadística, y que han resultado difíciles porque su aplicación, es, con frecuencia contraintuitiva. En cualquier situación aleatoria pueden identificarse las ideas estocásticas fundamentales.
- *Presentación de la sesión: objetivos, contenidos y relación con los temas anteriores* (10 minutos): Se dedicará la sesión a elaborar una lista de ideas estocásticas fundamentales, a partir de la resolución de un problema. Una vez

resuelto los alumnos harán una lista de las ideas estocásticas que han necesitado en su resolución y se tratará de elaborar una lista en que la clase alcance un acuerdo.

- *Planteamiento de una actividad* (entre las descritas en el apartado anterior) y trabajo de los alumnos por parejas (30 minutos). Se plantea la actividad 2 (paradoja de Blythe).
- *Los alumnos en pareja tratan de resolver la actividad propuesta*. Una vez resuelta elaboran una lista de las ideas estocásticas implícitas en la actividad. La profesora supervisa el trabajo de los alumnos mientras la resuelven, y ayuda en los puntos conflictivos.
- *Debate de posible soluciones* (20 minutos). Se discuten las soluciones al problema, alguna de las cuales posiblemente será errónea. Son los mismos alumnos los que deben descubrir cuál es la solución correcta y, asimismo, analizar los pasos erróneos en las soluciones incorrectas. La profesora procura intervenir sólo en caso de que no surgiese en la clase la solución correcta.
- *Reflexión sobre los contenidos didácticos de la actividad* (10 minutos): Se elabora conjuntamente una lista de ideas estocásticas fundamentales, a partir de las listas (posiblemente parciales) de ideas estocásticas identificadas por las parejas de alumnos.
- *Resumen del profesor sobre contenidos didácticos relacionados con la actividad* (30 minutos). Presentación del artículo de Heitele (1970) y de la lista de ideas estocásticas dadas por este autor. Discusión de hasta qué punto la lista de Heitele es completa y qué otras ideas se debieran añadir a la lista. Este tipo de interacción se trata de limitar, ya que los alumnos disponen de un texto que desarrolla los contenidos de la asignatura.

### *Evaluación*

Son muchos los puntos que podríamos tratar de evaluar en un curso de estas características. Como en todo proceso de evaluación. La importancia de la evaluación dentro del funcionamiento del sistema de enseñanza en su conjunto, y de los propios sistemas didácticos es ampliamente reconocida. Como sugiere Giménez (1997), si las situaciones y formas de evaluación son deficientes, se corre el riesgo de que esta

evaluación ejerza una influencia negativa ocasionando serias distorsiones entre los objetivos educativos y lo que finalmente aprenden por los estudiantes. Por tanto, un componente imprescindible de cualquier currículo es la propuesta de criterios sobre qué evaluar, cómo (procedimientos y circunstancias) y cuándo.

La evaluación del curso la abordamos en primer lugar de una forma continua. Las respuestas escritas de los alumnos a las actividades planteadas, así como la observación de su participación y debate en clase nos proporciona una primera información del grado de consecución de nuestros objetivos. Consideremos, por ejemplo, las estrategias de los alumnos al inicio del juego descrito en la actividad 1 (estrategias iniciales) y las que consideraron correctas, una vez finalizada la fase de búsqueda de una demostración (estrategias propuestas). En la Tabla 1 aparecen las frecuencias de las diferentes estrategias en un total de 49 alumnos (correspondientes a dos cursos sucesivos).

Al analizar los resultados lo primero que sorprende es que, aunque la estrategia correcta fue elegida por bastantes alumnos, ya al comienzo del juego, fueron menos de la mitad los que la eligen, a pesar de su alta preparación y de la aparente sencillez del problema. Se producen una variedad de estrategias iniciales, por lo que creemos conseguidos dos de nuestros objetivos para esta sesión: plantear una situación verdaderamente problemática para los alumnos que dé lugar a una variedad de soluciones y propicie el posterior debate y reflexión.

Tabla 1. Frecuencia de estrategias iniciales y finales en la actividad 1

Estrategia	N. Alumnos que la eligen (n=47)	
	Inicialmente	Como correcta
Apostar al mismo color de la cara que se ve (correcta)	18	32
Apostar al color contrario de la cara que se ve	7	3
Piensa que no hay estrategia o apuesta al azar	13	7
Apuesta siempre al mismo color	2	1
Alterna colores	4	4
Apuesta en función de los resultados anteriores	3	

La estrategia mayoritariamente considerada como correcta en la segunda sesión, después que los alumnos han debido trabajar en la casa para aportar por escrito sus soluciones y la justificación de las mismas) es la correcta. Observamos que se ha producido una reflexión y cambio en las concepciones de estos alumnos sobre la actividad, los conceptos implicados y su aplicación, pero no en la totalidad. Todavía queda una tercera parte de alumnos convencidos de que sus propias estrategias (incorrectas) son mejores que las de sus compañeros.

Esto nos sirve para iniciar la fase de debate de las soluciones por parte de los alumnos. La finalidad de la misma no es tanto el aprendizaje (que también se consigue) de la probabilidad, sino concienciarlos de la existencia de concepciones incorrectas sobre la probabilidad, que seguramente encontrarán más tarde en sus alumnos. El análisis de los argumentos a favor de cada estrategia nos revela estas concepciones y nos sirve para analizar los contenidos matemáticos implícitos en la tarea. Los alumnos deben encontrar el error en razonamientos de sus compañeros, como los siguientes:

*“Tomar el color contrario, ya que la probabilidad de que vuelva a ocurrir de nuevo el mismo color es menor de que salga el contrario”. Es decir, si sale el rojo la probabilidad de que vuelva a salir el mismo color es  $2/5$  y  $3/5$  que salga el azul y al revés”.*

*“Pienso que no existe ninguna estrategia válida por que la probabilidad de la cara oculta es la misma para cada color y cada intento es independiente de los demás y supuestamente aleatorio”.*

*“Porque mostrado un color hay la misma probabilidad que diciendo cualquier color acertemos”.*

*“Pienso que hay más probabilidad de alternancia de colores debido a que hay el mismo número de caras de los dos colores: 3 posibilidades de que salga rojo y 3 de que salga azul”.*

Aunque la mayoría de alumnos llega finalmente a la solución correcta, esto no quiere decir que sean capaces de argumentarla en forma matemáticamente correcta. Respuestas como las siguientes permiten reflexionar sobre la argumentación y sus tipos,

así como sobre el tipo de evidencia que proporcionan la probabilidad teórica y empírica:

*“He apostado al mismo color que sale en la cara mostrada y de forma experimental veo que tengo más aciertos que fracasos, por lo que será correcta, aunque no encuentro una justificación estadística”*

*“Al principio apostaba al color contrario, pero estaba equivocada, porque la probabilidad de sacar una tarjeta con las dos caras iguales es 2/3”.*

*“El espacio muestral de este experimento será {(AA), (AR), (RA), (RR)} (notar que son combinaciones de 2 elementos con repetición). Las probabilidades de estos sucesos son:  $P(AA)=1/3$ ;  $P(AR)=1/6$ ;  $P(RA)=1/6$ ;  $P(RR)=1/3$ ;  $P(S)= P(AA)+ P(RR)=2/3$ ”*

*“ $P(AA)= P(A)$ .  $P(A/A)=1/2 \cdot 2/3$ ;  $P(RR)= P(R)$ .  $P(R/R)=1/2 \cdot 2/3$*

*$P(AR)= P(A)$ .  $P(R/A)=1/2 \cdot 1/3$ ;  $P(RA)= P(R)$ .  $P(A/R)=1/2 \cdot 1/3$  por tanto es más probable que la cara sea igual por ambos lados. Empíricamente lo he probado en 204 repeticiones del experimento:*

	<i>Misma cara</i>	<i>Distinta cara</i>
<i>Real</i>	138	66
<i>Esperada</i>	132	68

$$\chi^2 = \frac{(138 - 132)^2}{132} + \frac{(66 - 68)^2}{68} = 0,3325$$

*Esto nos lo confirma totalmente”.*

Además de esta evaluación continua, se contempla una evaluación final, a partir de un examen escrito y de una unidad didáctica elaborada para un tema y nivel educativo elegido por los alumnos.

El examen proporciona información sobre los conocimientos teóricos adquiridos por el alumno, referentes a la epistemología, psicología y didáctica de la estadística y su capacidad de análisis didáctico en una situación de análisis de respuestas de alumnos a tareas estadísticas. Aunque no se puede generalizar y siempre hay casos de alumnos desmotivados, mi impresión es que los alumnos finalizan el curso con algunos conocimientos didácticos que le serán útiles para su trabajo, tanto en el campo

profesional, como en el de la enseñanza.

También las unidades didácticas elaboradas por los alumnos son muy variables, en cuanto a contenido calidad y originalidad. Mientras que unos alumnos eligen temas de primaria o secundaria, la mayor parte preparan un tema de un curso básico de estadística para alguna especialidad universitaria. En algunos casos se ha incluido software didáctico o materiales elaborados por los alumnos o se ha dado lugar a presentar un trabajo en algunas jornadas de didáctica. En todo caso, reconocemos que el poco tiempo dedicado a la asignatura debería ser ampliado para que los alumnos realmente llegaran a alcanzar una cierta competencia en la elaboración de estas unidades.

### REFLEXIONES FINALES

Una primera conclusión que podemos extraer de estas reflexiones es que la preparación didáctica es útil para los futuros estadísticos, independientemente de su futura labor profesional y puede contribuir a aumentar su cultura no solo didáctica, sino también estadística.

Un curso de didáctica de la estadística debería servir para cambiar las concepciones de los futuros estadísticos sobre la estadística, su enseñanza y aprendizaje, aumentar su sensibilidad hacia la dificultad que otras personas pueden tener en esta materia y capacitarlos para realizar tareas de análisis didácticos similares a las descritas en este trabajo. Este tipo de situaciones podrían ser el eje de los cursos de formación de profesores, tanto desde el punto de vista del contenido como del contenido didáctico.

Somos conscientes de que la variedad de conocimientos requeridos para un curso de didáctica plantea el problema de elaborar materiales específicamente dirigidos a este tipo de cursos, puesto que es difícil exigir a los alumnos que consulten una bibliografía tan variada y difícilmente accesible para ellos. Tan solo hemos encontrado en el libro de Hawkins, Jolliffe y Glickman (1992) un material que podría ser útil para estos cursos, aunque está orientado preferentemente a la enseñanza universitaria y no se contemplan suficientemente los aspectos psicológicos o curriculares. Ello nos llevó a tratar de preparar unos apuntes que, después de varias revisiones se han transformado en el libro anteriormente citado (Batanero, 2001).

También reconocemos que la estadística es una ciencia en continuo cambio y

expansión y que es necesario estar abiertos a las nuevas corrientes, tales como la inferencia bayesiana, los métodos de simulación, estadística espacial, procesos estocásticos, minería de datos. Estas nuevas tendencias necesitan ser difundidas y serán pronto objeto generalizado de enseñanza. Creemos que es necesaria aún mucha investigación y reflexión didáctica para poder seguir contruyendo lo que entendemos por “didáctica de la estadística” y concretando en cursos destinados a futuros estadísticos. Esperamos que este trabajo logre interesar a otros investigadores por esta problemática.

**Agradecimientos:** Este trabajo forma parte del proyecto BSO2000-1507 (M.E.C, Madrid).

#### REFERENCIAS

- American Psychological Association (1994). *Publication manual of the American Psychological Association* (Cuarta edición). Washington, DC: American Psychological Association.
- Belli, G. (2001). The teaching/ learning process in University statistical consulting labs in the United States. En C. Batanero, C. (Ed.). *Training researchers in the use of statistics*. Voorburg: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.
- Batanero, C. (1998). Recursos en Internet para la Educación Estadística. *UNO*, 15, 13-25.
- Batanero, C. (2000). Controversies around the Role of Statistical Tests in Experimental Research. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 75-98.
- Batanero, C. (Ed.) (2001). *Training researchers in the use of statistics*. Voorburg: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.
- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1992). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, 9, 25-31.
- Batanero, C., y Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Batanero, C. y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones

educativas. *UNO*, 15-28.

- Biehler, R. (1990). Changing conceptions of statistics: a problem area for teacher education. En A. Hawkins (Ed.). *Training teachers to teach statistics* (pp. 20-38). Voorburg: International Statistical Institute.
- Brousseau, G.: 1986, 'Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (2), 33-115.
- Contreras, L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- Ellerton, N. (1996). Statistical significance testing and this journal. *Mathematics Education Research Journal*, 8(2), 97-100.
- Fisher, R. F. (1979). Las Matemáticas de una catadora de té. En J. R. Newman (Ed.), *Sigma: El mundo de las matemáticas* (pp. 194-203). Barcelona: Grijalbo.
- Flores, P. (1994). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Green, D. R. (1991). A longitudinal study of children's probability concepts. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 320-328). Voorburg: International Statistical Institute.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Flores, P. (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores. En *Homenaje al profesor Oscar Sáenz Barrio* (pp. 165-185). Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Gutiérrez Jáimez, R. (2001). The statistical consultancy workshop as a pedagogical tool. En C. Batanero, C. (Ed.). *Training researchers in the use of statistics*. Voorburg: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.
- Hawkins, A., Jolliffe, F. y Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. Londres: Longman.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Jolliffe, F. (2001). Learning from experience. En C. Batanero, C. (Ed.). *Training*

*researchers in the use of statistics*. Voorburgo: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.

Levin, J. R. (1998 a). To test or not to test  $H_0$ ? *Educational and Psychological Measurement*, 58, 313-333.

Levin, J. R. (1998 b). What if there were no more bickering about statistical significance tests? *Research in the Schools*, 2, 45-53.

Levin, J. R., y Robinson, D. H. (1999). Further reflections on hypothesis testing and editorial policy for primary research journals. *Educational Psychological Review*, 11, 143-155.

Llinares, S., Sánchez, M. V., García, M. y Escudero, I. (2000). Didáctica de la matemática y formación de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria. En A. Martínón (Ed.), *Las matemáticas del siglo XX* (pp. 211-214. La Laguna: Nívola y Sociedad Canarias de Profesores de Matemáticas.

Menon, R. (1993). Statistical significance testing should be discontinued in mathematics education research. *Mathematics Education Research Journal*, 5(1), 4-18.

Morrison, D. E., y Henkel, R. E. (Eds.). (1970). *The significance tests controversy. A reader*. Chicago: Aldine.

Saville, D. J. (2001). A hands-on interactive method of teaching statistics to agricultural researchers. En C. Batanero, C. (Ed.). *Training researchers in the use of statistics*. Voorburg: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencias de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Serrano, L., Batanero, C., Ortíz, J. J., & Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 10(1), 7-10.

Shulman, L. (1986). Paradigm and Research Programs in the Study of Teaching: A contemporary perspective. En M. C. Witrock (Ed.) *Handbook of Research on Teaching* (p. 3-36), Macmillan, New York.

Steinbring, H. (1990). The nature of stochastic knowledge and the traditional

mathematics curriculum. Some experiences with in-service training and developing materials. En A. Hawkins (Ed.). *Training teachers to teach statistics* (pp. 2-19). Voorburg: International Statistical Institute.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook on Mathematics Teaching and Learning* (p. 127-146), Macmillan, New York.

Thompson, B. (1996). AERA editorial policies regarding statistical significance testing: Three suggested reforms. *Educational Researcher*, 25(2), 26–30.

Wilkinson, L. (1999). Statistical methods in psychology journals: Guidelines and explanations. *American Psychologist*, 54, 594-604.