La probabilidad en los libros de texto

Juan Jesús Ortiz de Haro

Grupo de Educación Estadística Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

Universidad de Granada

Editores: Carmen Batanero y Luis Serrano

Depósito Legal: ML/31-2001

ISBN: 84-699-6841-6

Publica:
Grupo de Investigación en Educación Estadística
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Imprime:
Servicio de Reprografía
Facultad de Ciencias, Universidad de Granada
Avda. Fuentenueva S/n, 18071 Granada

Financiación:
Proyecto BSO2000-1507, DGES, Ministerio de Educación y Cultura
Grupo de Investigación FQM-126. Consejería de Educación y Ciencia. Junta de Andalucía

INDICE

INTRODUCCIÓN

Nos complace presentar este libro, en el que se hace un resumen del trabajo realizado por Juan Jesús Ortiz en su Tesis Doctoral, realizada bajo nuestra dirección. Esta investigación toma como eje dos temas fundamentales, desde nuestro punto de vista:

- Los libros de texto, que sin duda constituyen un recurso didáctico fundamental, no sólo para los alumnos que lo usan, sino para el profesor que basa en ellos una gran parte de su actuación docente.
- El campo de la probabilidad, que está adquiriendo una gran importancia en la enseñanza en todos los niveles, debido a su aplicabilidad en otras disciplinas, y porque el razonamiento probabilístico es un útil fundamental en nuestra relación con lo cotidiano. Desde el punto de vista de la investigación, la probabilidad es un área que ha recibido una atención comparativamente menor que otros temas del currículo.

El trabajo analiza los libros de texto publicados durante la vigencia de los cuestionarios de 1º de BUP (Bachillerato Unificado y Polivalente) (18-IV-1.975), en que la tendencia era retrasar la enseñanza de estos temas el mayor tiempo posible. El supuesto era que para asimilar el concepto de probabilidad era necesario adquirir la noción de proporcionalidad y poseer razonamiento combinatorio, lo que no se conseguía hasta el período de las operaciones formales.

En la actualidad se ha producido un cambio importante en la enseñanza de la probabilidad, donde han influido diversos autores, entre ellos Fischbein, Green y Shaughnessy, quienes defienden que la enseñanza de la probabilidad se puede y se debe iniciar en edades mucho más tempranas, mediante una aproximación más intuitiva. El cambio propuesto no se refiere sólo a los contenidos, sino a la metodología de enseñanza, que debe basarse en la experimentación y simulación de fenómenos aleatorios y huir de una formalidad excesiva.

Este trabajo completa otros sobre análisis de libros de texto realizados por otros miembros de nuestro equipo de investigación y se inscribe en la línea de investigación sobre educación estadística del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Constituye una aproximación a la caracterización que de la probabilidad se ha hecho en los textos de primer curso de bachillerato, durante el período 1975-1991.

En el capítulo 1 el autor fundamenta y describe su problema de investigación, basándose particularmente en el marco teórico de Godino y Batanero sobre el significado institucional y personal de los objetos matemáticos y la teoría de Chevallard sobre la transposición didáctica. Asimismo, se presenta una revisión y síntesis de las investigaciones previas sobre análisis de libros de texto.

El capítulo 2 se dedica a un estudio pormenorizado de la presentación teórica que hacen los textos analizados de cada uno de los contenidos siguientes: Experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos: sus tipos y operaciones, frecuencias absoluta y relativa, probabilidad, cálculo con probabilidades, probabilidad condicional/dependencia y variable aleatoria.

En el capítulo 3 se realiza un estudio teórico de los ejemplos y ejercicios presentados en los libros de textos analizados, identificando sus variables de tarea. Asimismo, se realiza un estudio estadístico comparativo de estos ejercicios en dos de los textos analizados.

En el capítulo 4 se analizan los recursos lingüísticos y representaciones, diferenciando entre lenguaje probabilístico, notaciones y representaciones tabulares gráficas e icónicas.

Finalmente, se presentan unas conclusiones de tipo general, y se enumeran algunas posibles líneas abiertas para futuras investigaciones.

Pensamos que este trabajo constituye un primer avance en el estudio del significado que de los conceptos probabilísticos se incluye en los libros de texto de secundaria. Más concretamente, se analiza una muestra de libros de texto de primer curso de bachillerato publicados en el período de vigencia de los cuestionarios oficiales previos a la actual reforma educativa, lo que contribuirá a la caracterización del significado de estos conceptos en esta época. Este análisis permite identificar puntos críticos que deberán tenerse en cuenta en la elaboración de los nuevos materiales curriculares para la enseñanza de la probabilidad en estos niveles. En relación con las conclusiones expuestas, deseamos indicar que en modo alguno, suponen una valoración general de los textos analizados. Solamente se refieren a los temas dedicados al azar y la probabilidad, y concretamente a las definiciones, propiedades, ejercicios y ejemplos incluidos. Quede aquí explícito nuestro reconocimiento para los autores de libros de texto que realizan una importante y difícil tarea, que es transformar los conocimientos del saber matemático, en contenidos para ser enseñados de la manera más eficaz posible a nuestros alumnos.

Los editores:

Carmen Batanero y Luis Serrano

Granada, 2002

CAPÍTULO I
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y FUNDAMENTOS

1.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo está dedicado a describir el problema de investigación y resumir el marco teórico desde el que se estudia. En primer lugar analizamos los fundamentos que sirven de base a nuestro trabajo, particularmente el marco teórico sobre los significados institucional y personal de los objetos matemáticos y la teoría de la transposición didáctica. Como indica Godino (1991), el marco teórico permite sistematizar los conocimientos producidos en una investigación y es necesario para conseguir una visión clara de la unidad que pueda existir en nuestras percepciones. Desempeña un papel explicativo y predictivo de los hechos analizados y por ello la investigación científica significativa está siempre guiada por una teoría, aunque a veces lo sea de un modo implícito.

La sección 1.3 describe los objetivos de investigación, justificando su interés para la enseñanza de las matemáticas por el papel relevante que los libros de texto tienen como material didáctico, y porque del trabajo realizado se desprenden criterios utilizables para el desarrollo curricular y para la construcción de instrumentos de evaluación de los conocimientos, en el campo concreto de la probabilidad en el ámbito de enseñanza secundaria.

En esta misma sección se fundamenta el estudio, realizando un estado de la cuestión sobre las investigaciones que, en didáctica de la matemática, han tomado el libro de texto como objeto de estudio, y sobre los aspectos particulares que han sido investigados sobre los mismos. Especial atención prestamos a las investigaciones sobre libros de texto de estadística y probabilidad, que constituyen los antecedentes inmediatos de nuestro trabajo.

Para poder encuadrar y valorar nuestra tesis, dedicamos una sección al marco curricular que caracteriza el periodo analizado, describiendo también las reformas curriculares que durante el mismo surgieron en el campo específico de la enseñanza de la probabilidad en diversos países y la influencia que han tenido a lo largo del período.

Finalmente describimos la metodología empleada en esta investigación que es fundamentalmente cualitativa, aunque se combinan algunos elementos cuantitativos, en particular el análisis estadístico de ejercicios en los libros de texto.

1.2. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO

En este trabajo tratamos de aplicar las nociones teóricas desarrolladas en los artículos de Godino y Batanero (1994; 1998 a, en prensa) sobre el significado institucional y personal de los objetos matemáticos, así como en trabajos posteriores de dichos autores sobre la perspectiva semiótica y antropológica a la investigación en educación matemática.

Como indica Godino (1991, 1993), uno de los fines de la didáctica de la matemática es caracterizar los factores que pueden condicionar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Creemos que uno de estos factores son los recursos didácticos que emplean el profesor y los alumnos, como ayuda en la enseñanza y el aprendizaje. Dentro de estos recursos, el libro de texto juega un papel fundamental, si no el más relevante, lo que justifica el interés de nuestro estudio. Esta creencia se ve reforzada por Godino y Batanero (1998 a, en prensa), quienes, al formular una agenda de investigación para la didáctica de la matemática, destacan como prioritario el problema de la determinación de los significados institucionales de los conceptos matemáticos, proposiciones y teorías, así como la identificación de los factores condicionantes que originan el desarrollo y los cambios en estos significados.

Este es el objetivo particular de nuestro trabajo, que se centra en el análisis del significado que un campo conceptual particular, el de la probabilidad, cobra en una institución particular, constituida por los libros de texto de un nivel de enseñanza y período de tiempo delimitado. A continuación resumimos brevemente los principales elementos del marco teórico considerado.

1.2.1. SIGNIFICADO PERSONAL E INSTITUCIONAL DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

En Godino y Batanero (1994) se plantea una reflexión epistemológica sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, adoptándose un punto de vista pragmático, en el que el significado de los objetos matemáticos (conceptos, teoremas, expresiones,...) depende del contexto en que se usan. En consecuencia, el punto de partida de una investigación científica sobre el significado de los objetos abstractos es la caracterización del uso que se hace de ellos en una institución determinada. Como señalan estos autores, la noción de significado, se usa con frecuencia en didáctica de manera informal y es un tema controvertido en filosofía, lógica y semiótica. Pero el análisis de esta noción desde un punto de vista didáctico puede ayudar a enfocar bajo una nueva perspectiva las cuestiones de investigación en nuestra área de conocimiento.

En la concepción de Godino y Batanero (1994), el hecho de que en el seno de las instituciones se realizan determinado tipo de prácticas es lo que determina la emergencia progresiva de los objetos matemáticos, y el significado de los mismos está ligado a los problemas y a la actividad realizada para resolverlos. El significado de un objeto matemático, como símbolo de una unidad cultural de naturaleza compleja y sistémica, no puede reducirse a su definición, sino que hay que tener en cuenta también, las situaciones-problemas en las cuales interviene como herramienta de resolución y los medios de expresión correspondientes.

El modelo teórico se basa en los siguientes supuestos epistemológicos (Godino y Batanero, 1998 a, en prensa):

- Las matemáticas son una actividad humana, que implica la resolución de problemas externos o internos a la disciplina y de los que progresivamente emergen y evolucionan los objetos matemáticos. Las acciones de las personas se consideran como fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas, de acuerdo con las teorías constructivistas.
- Los problemas matemáticos y sus soluciones se comparten en diversas instituciones y tienen, por tanto, un carácter cultural, ya que un mismo problema interesa a un grupo de personas que comparten unos determinados instrumentos culturales.

- La matemática es un sistema conceptual organizado lógicamente, que se ha ido formando a lo largo de la historia de la humanidad. Cuando un nuevo objeto matemático se crea, debe encajarse en esta estructura, debe ser compatible con ella, ampliándola e introduciendo, al mismo tiempo, restricciones sobre el sistema global, puesto que los nuevos objetos deberán ser compatibles con el que ahora se introduce. Este proceso se reproduce en el aprendizaje por parte de los sujetos. Por ello, la organización lógica de los conceptos, los teoremas y las propiedades explica bastantes de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas: Un sistema no se reduce a la suma de componentes aislados, porque lo que constituye un sistema son precisamente las interrelaciones entre sus componentes, de donde se produce la paradoja de que un cierto objeto no puede enseñarse en forma aislada de otros, pero que tampoco es posible enseñar todos los objetos al mismo tiempo. Este problema se resuelve en parte con la idea de curriculum en espiral, donde un mismo objeto se estudia sucesivamente a lo largo de la vida escolar, aumentando paulatinamente el nivel de complejidad del mismo.
- La matemática es un sistema simbólico, dado por la cultura, que sirve para expresar los problemas y sus soluciones, teniendo, por tanto, una función instrumental y comunicativa. Por ello el aprendizaje de las matemáticas incluye el aprendizaje del sistema de símbolos y su uso adecuado.

En esta teoría, el concepto de situación-problema se toma como noción primitiva y es el punto de partida. Este concepto se concibe en un sentido muy amplio. Se considera que, para una persona dada, una situación-problema es cualquier tipo de circunstancia que precisa y pone en juego actividades de matematización, tales como buscar posibles soluciones; crear una simbolización adecuada para representar las situaciones o para comunicarla a otras personas; producir nuevas expresiones y enunciados significativos mediante manipulaciones simbólicas; justificar o generalizar las soluciones propuestas.

El interés se centra no en los problemas aislados sino en los campos de problemas, como conjunto de problemas para los cuales puede ser válida una misma solución o soluciones similares. En particular, en esta investigación nos interesamos por el campo de problemas probabilísticos que surgen cuando nos interesamos por comparar de alguna manera los diversos sucesos asociados a una situación aleatoria o por tomar una decisión en ambiente de incertidumbre. Estos problemas aparecen con frecuencia en la vida ordinaria, por ejemplo, hacer una apuesta, establecer un diagnóstico correcto, predecir el tiempo, decidir sobre la veracidad de un testigo, estimar el tiempo de espera del autobús, etc.

Los problemas son generalmente compartidos por distintas personas, de donde surge la idea de institución. Una institución para Godino y Batanero (1994) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen. Ejemplos de instituciones interesadas en resolver problemas probabilísticos son la institución de estadísticos matemáticos, compañías aseguradoras, responsables de la política sanitaria, instituciones dedicadas a la explotación comercial de los juegos de azar, así como las instituciones escolares.

Como caso limite, podemos considerar una institución formada por una sola persona. Cuando una persona es miembro de una institución puede ocurrir a veces que el significado que atribuye a los objetos matemáticos no sea totalmente acorde con el que se acepta como válido dentro de la institución. Por ejemplo, algunos alumnos de primaria o secundaria creen posible controlar los fenómenos aleatorios, y éste es uno de los razonamientos considerados "sesgados" desde el punto de vista de la institución de enseñanza de la probabilidad. Lo mismo ocurre cuando un investigador emplea los métodos estadísticos en forma considerada "incorrecta" desde el punto de vista de la teoría matemática o desde el punto de vista de su comunidad investigadora particular, (por ejemplo, si un investigador no considera problemático tomar menos casos por variable de lo que se considera "adecuado" en el análisis factorial).

Por ello, en la teorización propuesta por Godino y Batanero se diferencia entre significados personales (subjetivos) e institucionales (objetivos) de los objetos matemáticos, que son dos dimensiones interdependientes y que tiene el interés de resaltar los conflictos que, como consecuencia de la no coincidencia de los puntos de vista personal e institucional tienen a veces los sujetos y que, en particular, en el caso de los alumnos, explican el fracaso en las tareas escolares.

En la resolución de los problemas matemáticos se realizan cierto tipo de prácticas, entendiendo por tal cualquier actuación o manifestación realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validarla o generalizarla. La resolución de problemas no es, usualmente, un proceso lineal y deductivo. Por el contrario, se manifiestan intentos fallidos, ensayos y errores. Por ello los autores consideran necesario introducir la noción de práctica significativa.

Una práctica es significativa si desempeña una función en algunos de los procesos descritos. Prácticas significativas habituales en el estudio de las situaciones aleatorias son el registro de sus resultados y el análisis estadístico de las regularidades identificadas en largas series de repeticiones del experimento. En otros casos y cuando existe una simetría de tipo físico o haya motivo para preferir un resultado sobre otros posibles, se cuantifica la verosimilitud de ocurrencia de un cierto suceso sobre la base de sus posibilidades frente a otros diferentes, haciendo uso del cálculo combinatorio. Finalmente, la existencia de información relevante sobre la verosimilitud de los diferentes resultados puede llevar a la modificación del espacio de posibilidades y originar una cuantificación subjetiva de su incertidumbre. Prácticas más sofisticadas incluyen el uso del aparato del análisis matemático, tales como el empleo de funciones generatrices para determinar las funciones de densidad o los momentos de variables aleatorias transformadas a partir de otras con distribución conocida.

Para cada campo de problemas e institución (persona) hay un sistema de prácticas institucionales (personales) significativas asociadas al campo de problemas. El objeto matemático se presenta como un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Esta emergencia es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado es reconocido como tal objeto por la institución, pero continúa transformándose progresivamente según se va ampliando el campo de problemas asociado o se crean nuevos útiles para su solución. Este desarrollo es muy notorio en el caso del cálculo de probabilidades. La primitiva acepción de probabilidad definida por Laplace cuya finalidad principal fue resolver problemas de cálculo de probabilidades de sucesos asociados a juegos de azar, se fue transformando en la concepción frecuencial, válida para problemas varios como problemas demográficos o teoría de errores, en los que el interés se centró principalmente en el estudio de las distribuciones de variables aleatorias.

La necesidad de incorporación de la información previa para mejorar las estimaciones probabilísticas llevó al establecimiento de la concepción subjetiva de la probabilidad. Finalmente, la axiomática de Kolmogorov logró dotar al concepto de un sentido matemático preciso y resolver, al mismo tiempo, diferentes paradojas y problemas filosóficos asociados a las concepciones anteriores del concepto.

Cuando se quiere caracterizar el significado de un objeto en una institución o para una persona, las prácticas observables son los indicadores empíricos que nos permiten esta caracterización. Por ejemplo, cuando, al tener que elegir entre dos urnas con bolas blancas y negras en diferente proporción, cuál de ellas se debe utilizar si se gana un premio al extraer al azar una bola negra, un alumno elige la que tiene mayor proporción de bolas negras, inferimos que el alumno tiene una intuición correcta sobre el concepto de probabilidad. En otros problemas más complejos se deberá recurrir a información estadística, cálculo con funciones de distribución u otro tipo de métodos, los cuales en su conjunto contribuyen a dotar de significado a la idea de probabilidad. El sistema de prácticas de donde emerge un objeto institucional (personal) se define como el significado institucional (personal) del objeto dado.

Esta relatividad de los objetos matemáticos es compatible, sin embargo, con el papel "dominante" o de "control" de la organización lógica formalizada que los objetos matemáticos adquieren en la institución matemática, constituida por los matemáticos que investigan y producen nuevo conocimiento. Ello es debido a que es en esta institución donde surgen mayor número de problemas nuevos y donde se realiza la justificación de la mayor parte de teorías y proposiciones matemáticas. El rigor de esta institución requiere una organización lógica precisa. Sin embargo, este mismo rigor y organización es a veces la causa de la dificultad de comunicación en los procesos de enseñanza, especialmente cuando se prescinde del contexto donde surgieron los conceptos (Godino, 1996).

La importancia de la noción de significado que hemos descrito se debe a que de ella se deduce una teoría de la comprensión (Godino, 1996). La comprensión personal de un concepto es, en este modelo, la "captación" del significado del dicho concepto. Ahora bien, puesto que el significado de un objeto no se concibe como una entidad absoluta y unitaria sino compuesta y relativa a los contextos institucionales, la comprensión de un concepto por un sujeto, en un momento y circunstancias dadas, implicará la apropiación de los distintos elementos que componen los significados institucionales correspondientes.

1.2.2. TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA Y SIGNIFICADO

Otra noción teórica que resultará útil para nuestro trabajo es la de transposición didáctica. Chevallard (1985) introdujo este término, para referirse a los cambios que experimenta el conocimiento matemático, cuando es adaptado para pasar a ser objeto de enseñanza. En el paso del saber científico al saber enseñado son necesarias adaptaciones del mismo, se le debe desglosar, dividirlo en partes cuyo conocimiento sea susceptible de ser evaluado, secuenciarlo en forma conveniente, buscar ejemplos comprensibles, utilizar esquemas o diagramas, etc. En este proceso de adaptación influye todo un sistema complejo formado por profesores, diseñadores curriculares, escritores de libros de texto, autoridades académicas, etc., que Chevallard denomina "noosfera".

En una primera etapa de la transposición se pasa del saber matemático al saber a enseñar, así como de la descripción de las aplicaciones de un concepto particular a la descripción del concepto en sí mismo. Se va constituyendo paulatinamente un texto con fines didácticos, pero se reduce la dialéctica, esencial al funcionamiento del concepto, de los problemas matemáticos y los útiles que se emplean en su solución, debido a que se ha producido una descontextualización del concepto. También se asiste a un fenómeno de deshistorización, donde no tiene importancia el autor o las circunstancias que dieron origen al conocimiento, que toma una forma ahistórica, intemporal.

Una vez realizada la introducción del concepto en el sistema de enseñanza, el dispositivo didáctico va, progresivamente, a buscarle aplicaciones, que no tienen por qué tener relación con los móviles de quienes concibieron inicialmente el concepto. Su inmersión en el saber enseñado va a permitir finalmente su recontextualización, ya que será necesario buscar ejemplos y problemas que den sentido al saber. Pero ésta no conseguirá, en general, sobre todo en los primeros niveles de enseñanza, ni reconstituir el modo de existencia original de la noción, ni llenar todas y únicamente las funciones para las cuales se había decidido introducirlo. Es decir, probablemente haya una gran distancia entre los problemas originales de los que surgió el concepto y los que se presentan al alumno en el sistema de enseñanza.

En nuestro estudio mostraremos algunos ejemplos de este fenómeno. Un caso muy claro lo vemos en la aproximación frecuencial a la probabilidad, que surgió de problemas de tipo estadístico, como la determinación de la esperanza de vida o de la función matemática que siguen los errores de medición. La actividad usual en la escuela, respecto a esta aproximación es la realización de experimentos aleatorios, tales como lanzar un dado, para obtener frecuencialmente una estimación de su probabilidad. Pero esta estimación es, por un lado, innecesaria, puesto que la probabilidad teórica puede determinarse por razonamientos combinatorios. Por otro lado, la estimación nunca nos llega a dar un valor exacto, como el que podemos obtener con la concepción laplaciana.

Otro ejemplo, referido a la probabilidad condicional, es la presencia en los libros analizados de un nuevo concepto relacionado con ella que es inexistente en el cálculo de probabilidades en el ámbito académico. Nos referimos al denominado "suceso condicionado". Mostraremos también la falta de correspondencia entre las definiciones teóricas de los conceptos y las aplicaciones prácticas de los mismos. El estudio de la transposición didáctica se preocupa, entre otras cuestiones, de detectar y analizar esta clase de diferencias y hallar las causas por las cuales se han producido, con objeto de subsanarlas en caso de que estas diferencias impliquen la transmisión de significados inadecuados sobre los objetos matemáticos.

La noción de transposición didáctica puede interpretarse desde un doble punto de vista: Como proceso, la transposición didáctica será el conjunto de transformaciones que experimenta un conocimiento para que pueda ser introducido en un sistema de enseñanza. Como resultado se refiere a las diferencias que podemos observar entre un conocimiento matemático dentro de la institución matemática y este mismo conocimiento en una institución escolar dada. Como indica Ruiz Higueras (1994, p. 28) "*en el sistema de enseñanza, el fenómeno de transposición didáctica a veces se oculta y en muchas ocasiones la "distancia" entre el saber a enseñar y el saber científico tiende a pasar desapercibida*".

Estas diferencias deben producirse forzosamente, puesto que los usos y problemas asociados a un cierto objeto matemático en la enseñanza, necesariamente han de estar restringidos, debido a las disponibilidades de tiempo y a las limitaciones del conocimiento previo de los alumnos sobre este objeto matemático u otros en los que se apoya. También un factor importante es la necesidad de establecer una secuenciación de los contenidos. Esto produce una paradoja en la enseñanza: Los objetos matemáticos tienen una naturaleza compleja y sistémica. Comprender completamente un objeto matemático precisará conocer todas sus propiedades y relaciones con otros conceptos. Sin embargo, y puesto que hay que secuenciar el contenido, la comprensión será un proceso gradual y creciente a lo largo de la vida escolar y posteriormente profesional de los estudiantes.

En la construcción de un currículo o en la elaboración de un libro de texto para un cierto currículo ya fijado, se debe elegir qué parte del significado del concepto se presentará y qué tipos de problemas y ejemplos se usarán para contextualizar los conocimientos. Es decir, se lleva a cabo un muestreo sobre el significado de los objetos matemáticos, para seleccionar una muestra de propiedades, usos y problemas que se presentaran a los alumnos. El problema didáctico se plantea cuando, en forma innecesaria, se presenta a los alumnos una muestra sesgada de los componentes del significado de un objeto matemático.

Ello puede ser debido a que se añaden problemas para los cuales el concepto no es pertinente, se le atribuyen propiedades inexistentes, se añaden prácticas inadecuadas, representaciones que no tienen contrapartida en la matemática, etc. también cuando se suprimen partes relevantes del contenido o tipos de problemas necesarios para la comprensión del concepto. Asimismo ocurre cuando a un supuesto útil didáctico se le atribuye el carácter de saber a enseñar, esto es, cuando se produce un "**deslizamiento metadidáctico**" (Brousseau, 1986).

Godino y Batanero (1994) interpretan esta noción de transposición didáctica dentro del marco de su teorización. Para ellos el concepto de institución es muy amplio. Una institución especial es la institución matemática (M) formada por los productores del saber matemático. Otras posibles instituciones son las instituciones de enseñanza en los diversos niveles. En este sentido amplio, podemos considerar también los libros de texto como instituciones, ya que en ellos se proponen problemas matemáticos y se describen prácticas específicas para resolverlos, usando unos medios expresivos con frecuencia idiosincrásicos.

En Godino y Batanero (1997) describen una agenda de investigación en didáctica, basada en la noción de significado de los objetos matemáticos. Señalan como problema fundamental de investigación la caracterización de los significados institucionales de los objetos matemáticos dentro de las diversas instituciones. "*Una clase primaria de investigaciones se debe orientar a determinar los significados institucionales. Debemos investigar los usos característicos de los conceptos, proposiciones y teorías matemáticas e identificar sus diferentes representaciones. Este significado de referencia puede ser comparado con el significado de los objetos matemáticos en las instituciones de enseñanza"* (p. 13).

El describir esta caracterización en la institución didáctico-matemática es requerido para la evaluación del conocimiento y el diseño de situaciones didácticas. Es necesario ver cuáles son los usos característicos de los conceptos y proposiciones, cuáles son las situaciones problemáticas que dan sentido al concepto, las notas esenciales de las nociones, las representaciones que se emplean. Una vez hecha esta caracterización estaremos en condiciones de analizar el significado institucional de los objetos en otras instituciones así como el significado personal de los mismos.

Asimismo, y dentro del apartado que denominan "ecología de significados" proponen como prioritario el estudio de los cambios que el significado institucional de un objeto matemático sufre hasta llegar a ser un objeto de enseñanza en diferentes instituciones didácticas, especificando los diseños curriculares y los libros de texto matemáticos como ejemplos de tales instituciones.

1.2.3. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO Y SUS TIPOS

En este trabajo vamos a analizar con particular detalle la noción de *elemento de significado* (Godino y Batanero, 1998 a, en prensa), aplicándola al estudio del significado de los conceptos probabilísticos elementales en una muestra de libros de texto de bachillerato.

Los trabajos de Godino y Batanero (1994, 1998 a) definen el significado de un objeto $S(O_x)$ como "*el sistema de prácticas realizadas por X (persona o institución) para resolver una cierta clase de situaciones problemáticas*". El significado de un objeto se concibe, por tanto como una entidad compuesta. Desde el punto de vista del análisis de libros de texto y otro material didáctico o en la construcción de instrumentos de evaluación, conviene analizar los constituyentes de este significado global o sistémico. Los componentes de este sistema son los elementos del significado y podemos diferenciar en ellos varios tipos, adoptando la forma de definiciones, enunciados de propiedades características, descripciones de situaciones prototípicas y notaciones simbólicas.

Los autores denominan *elementos intensionales del significado* de un concepto a los atributos o rasgos característicos del concepto. Por ejemplo, la noción de suceso puede definirse como "el posible resultado de un experimento aleatorio", "todo subconjunto del espacio muestral", "cualquier colección de sucesos elementales", "un suceso puede o no ocurrir en una realización de un experimento (contingencia)", "no se puede predecir la ocurrencia de un suceso (impredecibilidad)". A cada uno de estos enunciados lo consideramos "*elemento intensional de significado*". El sistema formado por estos elementos es el *núcleo intensional* del concepto.

Los *elementos extensionales del significado* del concepto son las situaciones-problema prototípicas en cuya resolución emerge el concepto. El sistema de tales elementos es el *núcleo extensional* del concepto. Ejemplos de estas situaciones para la noción de frecuencia relativa son la realización de experimentos, el registro de sus resultados y el estudio de patrones o tendencias en los mismos, así como de las fluctuaciones en series largas y cortas de ensayos.

Asimismo, las notaciones simbólicas usadas por una persona, o en un contexto institucional determinado, son consideradas como *elementos representacionales del significado* del concepto. El sistema formado por estos elementos es el *núcleo representacional* del concepto. Por ejemplo, la letra E para el espacio muestral, letras mayúsculas A, B,... , las notaciones conjuntistas, o los diagramas de Venn, para los sucesos, etc.

$$E = \{C, X\}; \ E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Estos elementos son objetos ostensivos que se pueden observar y manipular y tienen una doble función. En primer lugar sirven para evocar los objetos abstractos inobservables. Por ejemplo, mediante la expresión P(A) evocamos el concepto abstracto "probabilidad del suceso A" con sus diferentes propiedades y relaciones con otros conceptos. Por otra, los elementos representacionales se usan para operar con ellos (en representación de los correspondientes objetos matemáticos) y producir resultados aplicables a dichos objetos. Ello supone una economía de pensamiento, pues el sujeto opera con los objetos ostensivos sin tener que hacer referencia a los correspondientes objetos en los diferentes pasos de la operación.

Por ejemplo, cuando indicamos $P(A \cap B) = P(B).\ P(B/A)$, usamos los elementos ostensivos que nos remiten a la regla de multiplicación de probabilidades, combinando la probabilidad simple de un suceso B y la condicionada de este mismo suceso por otro suceso A para obtener la probabilidad de la intersección de los sucesos A y B. Diferenciaremos en este trabajo tres tipos de elementos representacionales: Palabras, símbolos y representaciones tabulares gráficas o icónicas.

El sistema formado por todos los elementos de significado será el *significado sistémico* del objeto correspondiente. Las descripciones que hacemos en este trabajo de estos conceptos debemos entenderlas en sentido no absoluto ni determinista. Esto es, el significado sistémico y los elementos de significado serán siempre relativos a una institución o persona, y unas circunstancias temporales previamente especificadas. En este trabajo tratamos de caracterizar el significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de primer curso de bachillerato utilizados en el período 1975-1991.

Las listas de elementos intensionales, extensionales y representacionales del significado de las nociones estocásticas elementales que hemos identificado en este estudio (incluidas en el Anexo III) no se presentan como el significado absoluto o universal de tales objetos. Constituyen el significado, para el equipo de investigación que realiza el análisis de los libros de texto, desde el punto de vista de la enseñanza y aprendizaje de dichas nociones en el nivel de primer curso de bachillerato en el periodo citado.

1.2.4. CORRESPONDENCIAS SEMIÓTICAS

Entre los diferentes tipos de elementos de significado que hemos descrito se establecen durante la actividad matemática correspondencias, ya que con frecuencia uno de estos elementos se presenta en lugar de, o representando, a otro de la misma o diferente naturaleza. Esto es característico del trabajo matemático, ya que precisamente las prácticas realizadas para la resolución de problemas pueden verse como una serie de procesos interpretativos encadenados.

Godino y Batanero (1998 b) presentan algunos elementos de un modelo semiótico, específico para la didáctica de la matemática, partiendo de la noción de función semiótica de Eco (1979), y de su clasificación previa de las entidades matemáticas en los tres tipos descritos: Extensionales, notacionales e intensionales. Esto amplía su teoría sobre el significado de los objetos matemáticos, que se aplica no sólo a los conceptos, sino a cualquier otra entidad que aparece en el trabajo matemático. Podemos preguntarnos ahora no sólo por el significado de un concepto, sino de una notación, de un problema o de una propiedad; es decir, para cada uno de los posibles elementos del significado de un concepto, o para un grupo de ellos,

Además este trabajo enfatiza la diversidad de actos y procesos interpretativos entre los distintos tipos de objetos y de los modos de producción de signos, y cómo la diversidad de contextos y circunstancias determinan y relativizan dichos procesos.

La idea de función semiótica, que toman de Eco (1979) se concibe como un par, formado por el significante (expresión) y el significado (contenido), e implica también un acto de interpretación. Ligada a esta idea se encuentra la de código, que se concibe como la regla de correspondencia entre los planos de expresión y de contenido de las funciones semióticas.

Habitualmente, en el trabajo matemático usamos unos objetos en representación de otros, en especial de los objetos abstractos, existiendo una correspondencia, con frecuencia implícita, entre el objeto representante y el representado. En el trabajo matemático, los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados). Esto es muy importante para la didáctica, que no sólo se interesa porque el uso formal de los símbolos que hacen los alumnos sea correcto, sino por la captación del significado de estos símbolos y de las reglas de operación entre los mismos.

Godino y Batanero (1998 b) clasifican los tipos de funciones semióticas que aparecen en la actividad matemática atendiendo al contenido (significado) puesto en juego, en tres tipos:

1. Significado notacional: Una función semiótica es notacional cuando el objeto final, o contenido de la misma, es una notación, esto es, un instrumento ostensivo, como cuando usamos el símbolo P_n para referirnos a la notación n x (n-1) x.. x2 x1, o cuando usamos el símbolo P(A) para representar la expresión "probabilidad de A".
2. Significado extensional: Cuando el contenido de la función semiótica es un elemento extensional, por ejemplo, el enunciado de un problema, cuando un fenómeno aleatorio viene representado por una simulación, una gráfica estadística que representa a un conjunto observado de datos, etc.
3. Significado intensional: Una correspondencia semiótica es intensional cuando su contenido es un objeto abstracto. Quizás este es el tipo de correspondencia que más abunda en el trabajo matemático, ya que siempre estamos haciendo referencias explícitas o implícitas a objetos matemáticos. Por ejemplo, en la expresión: $0 \leq P(A) \leq 1$, cada uno de los símbolos nos remite a un objeto abstracto y la expresión completa a una relación entre los mismos. Los símbolos 0 y 1 nos remiten a los números naturales correspondientes, con sus propiedades especificas que queremos aplicar a esta situación; P(A) hace referencia al objeto "probabilidad de un suceso"; el símbolo de desigualdad establece una ordenación entre los objetos matemáticos, 0, 1 y P(A) y, por tanto, remite a la idea de orden, y la expresión completa nos remite a un elemento intensional específico del concepto de probabilidad.

De los supuestos epistemológicos y teóricos descritos se derivan, entre otras, las siguientes consecuencias instruccionales (Godino y Batanero, 1998 b), que sirven para justificar el interés de nuestra investigación centrada en el análisis de los elementos de significado de los conceptos probabilísticos elementales en una institución educativa particular:

(1) El estudio significativo de los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos, teorías) debe poner en juego una muestra representativa de las prácticas que constituyen el significado sistémico de los mismos en el seno de un contexto institucional dado. Es por ello importante definir cuáles elementos consideramos debieran constituir esta muestra representativa y detectar los sesgos respecto a este significado deseado dentro de una institución educativa.

(2) Los estudiantes deben tener oportunidad de explorar problemas relevantes para ellos, formular hipótesis y conjeturas, confrontar diferentes sistemas de representación, comunicar y validar las soluciones propuestas para los problemas a sus compañeros, así como confrontarlas con las convenidas en la cultura matemática. Ello implica la importancia del análisis de los elementos intensionales y representacionales o notacionales en los libros de texto, así como del análisis de las variables de tarea y los valores de las mismas.

(3) Los significados construidos por los participantes en un proceso instruccional sobre un objeto matemático -o lo que viene a ser equivalente, su conocimiento, comprensión o relación personal a dicho objeto- serán siempre parciales y relativos al contexto institucional, material y temporal en que tiene lugar el proceso. Por ello, el análisis del significado presentado para un concepto o grupo de conceptos dentro de una institución educativa nos proporciona claves interpretativas del aprendizaje de los alumnos.

1.3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.3.1 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN E IMPORTANCIA PARA LA DIDÁCTICA

Este trabajo se engloba dentro del análisis del significado institucional de los conceptos probabilísticos básicos y de su transposición didáctica en los libros de texto de primer curso de bachillerato del período 1975-1991. Un libro de texto es un medio típico de "conservar" el conocimiento matemático. Se considera como un segundo nivel de transposición didáctica, después del primer nivel que lo constituirán los currículos y programas oficiales.

Es por ello que lo consideramos un punto importante del camino seguido por el conocimiento matemático desde el "saber sabio" hasta el "saber a enseñar", que son las matemáticas escolares. Si en un texto aparece un significado sesgado, éste puede llegar a transmitirse a los alumnos, debiendo el profesor que los usa mantener una permanente vigilancia epistemológica sobre el contenido de los libros de texto. En el caso de la estadística, algunos autores como Brewer (1986) han llamado la atención sobre la transmisión de errores conceptuales entre los libros de texto universitarios en el campo de las ciencias sociales.

La transposición didáctica en los libros de texto puede tener ciertas limitaciones lógicas, pues un texto presenta el conocimiento en forma secuencial. Así Kang (1990), cita una cuestión planteada por Kilpatrick (1985) en los siguientes términos: *"¿Es posible archivar la resolución de problemas?" (Is problem solving bookable?*) (p. 4). Con ello quería indicar la contradicción entre el carácter estático de un texto frente al carácter dinámico del proceso de resolución de problemas. Entendiendo la resolución de problemas como la actividad central de las matemáticas, la cuestión planteada por Kilpatrick puede ser extendida así: *"¿Es posible archivar el conocimiento matemático?"* (p. 4), donde queremos presentar la contradicción entre el carácter dinámico del conocimiento matemático y el carácter estático de las matemáticas escolares, como cuerpo declarado de conocimiento. Este aspecto ha sido señalado también por Llinares y Sánchez (1990), quienes afirman que *"los libros de texto y las guías del profesor, consideradas por muchos como los únicos apoyos del profesor para realizar su enseñanza, pueden llegar a mostrar de forma implícita esta concepción de las Matemáticas escolares y su enseñanza"* (p.104).

Como se ha indicado en el apartado 1.2.2, la transposición didáctica puede considerarse como proceso y como un resultado. En la línea de investigación que hemos comentado, sugerida por Godino y Batanero (1998 a), el objetivo general de nuestra investigación es caracterizar, en el nivel de enseñanza fijado, el significado que, como resultado de la transposición didáctica, presentan los libros de texto sobre los siguientes conceptos:

- Experimento aleatorio;
- Espacio muestral. Sucesos aleatorios, tipología de sucesos aleatorios;
- Operaciones con sucesos aleatorios y álgebra de sucesos;
- Frecuencias relativas y sus propiedades;
- Probabilidad en sus distintas concepciones y axiomas de probabilidad;
- Experimento compuesto, probabilidad condicional, dependencia e independencia;
- -Variable aleatoria, su distribución, media y varianza.

La importancia que, para la didáctica de la probabilidad, tiene el estudio que proponemos, se debe fundamentalmente a que el análisis nos permitirá mostrar las diferencias que, en el significado de un mismo concepto, se presentan para un mismo nivel escolar en los diferentes manuales. La identificación de los diferentes elementos de significado asociados a cada concepto servirá también de base para la construcción de situaciones didácticas e instrumentos de evaluación para la enseñanza de la probabilidad a alumnos de secundaria.

A partir del objetivo general de la investigación, que hemos descrito sucintamente y en forma genérica, podemos identificar los siguientes objetivos parciales de la misma:

1. Describir los elementos intensionales característicos de cada uno de los conceptos probabilísticos citados y analizar su presencia y forma de presentación en los manuales escolares. Este es un objetivo básico, pues es el punto de partida para estudiar el resto de elementos de significado de los conceptos probabilísticos.
2. Identificar las situaciones prototípicas o elementos extensionales de cada uno de los conceptos probabilísticos citados y analizar su presencia, bien como ejercicios o ejemplos, en los manuales escolares. Puesto que nuestros supuestos teóricos nos llevan a asumir que el conocimiento se construye a partir de las prácticas empleadas en la resolución de problemas del campo de problemas asociados a un concepto determinado, la presencia de estos elementos extensionales de significado en los libros de texto es para nosotros requisito indispensable de una verdadera enseñanza del tema.
3. Analizar las principales variables de tarea de estos ejemplos y ejercicios y llevar a cabo un estudio comparativo de su distribución en algunos libros de texto. Puesto que las variables y sus valores aportan matices diferenciados al significado de los conceptos, la distribución de los ejercicios y ejemplos respecto a las mismas nos indica claramente el significado particular que podrían construir los alumnos a los que el libro de texto va dirigido. Las carencias notables nos proporcionan, asimismo, pautas de desarrollo de las nuevas propuestas curriculares.
4. Identificar los diferentes elementos representacionales asociados a los conceptos probabilísticos elementales y llevar a cabo un estudio comparativo de su empleo en algunos libros de texto. Puesto que una de las características que asociamos a la matemática es el ser un lenguaje en que se expresan los problemas y las soluciones encontradas, el lenguaje matemático es parte fundamental de la enseñanza.
5. Estudiar la variabilidad de presentación de los conceptos mencionados en los textos elegidos, estudiando si se inducen concepciones diferenciadas sobre los mismos conceptos. Este objetivo es consecuencia directa de los anteriores.
6. Detectar los sesgos en el significado de los conceptos presentados a los alumnos. Estos sesgos nos permitirán mejorar las nuevas propuestas curriculares incluyendo los complementos necesarios para paliarlos en el futuro.

Puesto que estos objetivos son muy ambiciosos, incluso dentro de la limitación del nivel de enseñanza, en este trabajo nos limitaremos al estudio de una muestra intencional, de tamaño limitado, de libros de texto. Este análisis se basa en los escritos de diferentes autores en matemáticas y didáctica de las matemáticas relativos a la epistemología de la probabilidad y los resultados de la investigación psicológica sobre desarrollo cognitivo, razonamiento estocástico y dificultades de aprendizaje de los alumnos.

1.3.2. IMPORTANCIA DEL LIBRO DE TEXTO Y SU ESTUDIO

Aunque el estudio se lleva a cabo en una muestra concreta y reducida de libros. creemos que nuestros resultados revisten interés para el campo de la didáctica, por el peso específico que los libros de texto tienen en la enseñanza, como es señalado por diversos autores.

En el informe Cockcroft (1985), se afirma que *"los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula"* (p. 114). En Alonso y otros (1987), después de indicar algunos inconvenientes sobre la utilización de un solo libro de texto, se propone que en clase se disponga de diversos materiales, que permitan realizar diversos tratamientos, ya que "c*on esto el profesor no estará supeditado al currículo prefijado por el libro de texto"* (p. 44). En Rico (1990), encontramos varias citas interesantes sobre el libro de texto, que recogemos a continuación. La primera, haciendo referencia al papel tradicional que en ocasiones ha desempeñado el profesor, afirma: *"El profesor conserva, mantiene y transmite el saber institucionalizado en los manuales, donde aparece seleccionado y adecuadamente estructurado.*

El libro proporciona seguridad y continuidad en los puntos de vista, facilita la imagen de que el conocimiento es algo localizado, que se puede encontrar fácilmente y con respecto al cual el único trabajo posible consiste en su asimilación. Su determinación ya está hecha, y su base fundamentalmente es "científica", apoyada por la tradición y la experiencia. Como el libro supone un gran esfuerzo de síntesis, planificación, estructuración y acomodación de contenidos, por encima de la capacidad del profesor medio, se considera el paradigma del conocimiento que hay que transmitir" (p. 22).

Sobre el papel que en ocasiones ha desempeñado el profesor, Rico (1990) afirma que *"en las matemáticas escolares el profesor ha concentrado sus esfuerzos en hacer de puente entre el libro de texto y el alumno, poniendo a veces un énfasis excesivo en que el segundo se adapte al primero*" (p. 57). Asimismo considera que uno de los factores que pueden hacer fracasar los intentos de cambio de un currículo de matemáticas son los libros de texto, ya que *"la carencia de materiales y libros de texto adecuados a los nuevos currículos son en ocasiones obstáculos insalvables"* (p. 29).

Para Goetz y Lecompte (1988) el análisis de libros de texto sirve para identificar las diferencias entre los objetivos de un programa y los medios llevados a cabo para su puesta en práctica. También perfila los sesgos de los contenidos y objetivos de los curricula: "*la recogida y análisis de libros de texto, guías curriculares, apuntes de clase y otros archivos ofrecen una fuente inestimable de datos de clase*" (p. 63).

Chevallard (1991, pp. 61-62), afirma que los libros de texto tienen dos características, una que ofrecen una concepción legitimada del texto del saber a enseñar y otra que se convierten en la norma de progresión del conocimiento de los alumnos.

Robert y Robinet (1989) señalan que el estudio de los libros de texto es un medio indirecto de conocer el pensamiento de los profesores sobre un contenido especifico. Romberg y Carpenter (1986) por su parte indican que "*el libro de texto es visto como la autoridad del conocimiento y guía del aprendizaje. La propiedad de las matemáticas descansa en los autores del libro de texto y no en el maestro*" (p. 867). Aclaran también que, en su país no es costumbre apartarse de lo que se indica en los libros de texto y que, cuando se hace es para aumentar el control de la clase y no para hacer el contenido más significativo.

Los libros de texto, junto con la pizarra han sido el medio predominante en la clase de matemáticas (Fey, 1980). A partir del National Longitudinal Study of Mathematical Abilities, Begle (1973) concluyó que el libro de texto tiene una influencia muy poderosa en lo que aprenden los estudiantes. Aunque algunos profesores enseñan temas no incluidos en el libro de texto, el autor concluye que, en general lo que se enseña coincide con el contenido de los libros de texto.

Según Konior (1993), los libros de texto son una de las formas más utilizadas para transmitir los conocimientos en matemáticas. Por ello la investigación de tales textos puede contribuir a la adquisición de conocimiento y maestría de métodos matemáticos en los diferentes niveles de educación matemática.

1.3.3. ESTUDIOS SOBRE LIBROS DE TEXTO EN DIDÁCTICA

No sólo en el campo de la didáctica de la matemática, sino que, desde la didáctica general se ha estudiado el libro de texto y se ha resaltado su importancia. A continuación recogemos las conclusiones de alguno de estos estudios.

Para Gimeno (1995), los materiales didácticos difieren según el soporte a través del que fluye la información; entre ellos dominan todavía los materiales impresos, fundamentalmente los libros de texto, porque seguramente a través de ellos pervive una metodología pedagógica muy bien asentada, unos intereses económicos y una pauta de control eficaz sobre la escolaridad. Un alumno que haya completado el bachillerato se ha enfrentado alrededor de 70 asignaturas con casi seguro libro de texto, lo que le eleva a varias decenas de miles de páginas las que han podido transcurrir ante su mirada. En consecuencia, lo que significa información y cultura en el sistema educativo tiene mucho que ver con la presencia, profusión, calidad y uso de esas fuentes de difusión que son los materiales curriculares... *"lo que nos lleva a pensar que la enseñanza y su calidad están en muy estrecha relación con estos artefactos" (*p. 97).

Funciones del libro de texto

Los materiales y libros de texto tienen varias funciones, que cumplen, bien por separado, bien simultáneamente. Por un lado, son depósito de informaciones varias para profesores y estudiantes, ya que guían o estructuran el proceso de enseñanza aprendizaje al sugerir actividades, resaltando informaciones y guiando el proceso de desarrollo de una unidad. También pueden sugerir el tipo de actividad a través de la que se evalúa el proceso seguido por el alumno. *Los libros son el mecanismo de proposición-imposición de una determinada cultura, deben ser objetos de atención porque a través de ellos se eleva a la categoría de normal y universal un tipo de conocimiento y unos determinados valores*" Gimeno (1995, p. 98).

Las cuestiones principales del currículo son las de contenido y organización. Lo que se debe enseñar, en qué forma y cómo se pone a disposición de las escuelas este saber legitimo, se determina, en gran medida, a través del libro de texto.

En los casos en los que no existe curriculum prescrito y/o control expreso sobre el mismo, los textos universalizados homogeneizan la cultura con la que se encontrarán los escolares, garantizando un conocimiento bastante uniforme en todo el sistema que los consume. Su contenido cultural expresa su naturaleza política. Detrás del texto hay toda una selección cultural que presenta el conocimiento oficial, colaborando de forma decisiva en la creación del saber que se considera legítimo, verdadero, consolidando los cánones de lo que es verdad y es moralmente aceptable.

La conclusión de estos análisis presta a los contenidos textuales que sirven al desarrollo del curriculum la condición de ser prácticas ideológicas en educación. No estamos ante simples instrumentos para proporcionar hechos, sino que simultáneamente son el resultado de acciones políticas, económicas y culturales, de batallas y compromisos. Se conciben, diseñan y elaboran por personas reales con intereses reales (Apple, 1989).

Para Torres (1992), dentro de las instituciones escolares los libros de texto representan y traducen, en teoría, la interpretación autorizada de los requisitos para considerarse una persona educada y en general, la definición institucional de cultura; o sea lo que por tales conceptos entienden los grupos sociales con capacidad de control e influencia en el Estado.

Este recurso viene a ser uno de los principales instrumentos de intermediación y coordinación entre los discursos y prácticas ideológicas y políticas y hegemónicas en una sociedad concreta, y las prácticas curriculares que tienen lugar en las instituciones escolares. Es obvio, por tanto que existen libros de texto con sesgos sexistas, clasistas, racistas, urbanos, centralistas, militaristas y religiosos. Otra peculiaridad de los libros de texto es que en ellos no se encuentran explicaciones de los porqués de las elecciones que realizan, de las interpretaciones que apoyan, de cuáles no aceptan y por qué, y de cuáles omiten. Tampoco atienden a los procesos de cómo se construye la ciencia. La presentan ya como acabada y no es fácil adivinar cómo se obtiene ese conocimiento, quienes tiene posibilidad de hacer ciencia, dónde, cómo, con qué problemas se suelen encontrar, etc. No se presta atención a los conflictos y condicionamientos en la elaboración de la ciencia, a no ser de manera un tanto anecdótica. Los libros de texto tratan de delimitar y fijar el rol docente, sus tareas, los estímulos que necesita ofrecer al alumnado, la manera de evaluar, las actividades de refuerzo, etc.

Los textos escolares se han elaborado desde un punto de vista social y político y los autores de los mismos despliegan su carga ideológica y unos recursos materiales adecuados para conseguir sus fines individuales y colectivos (Goodson, 1995).

El polo opuesto a la centralización, que marca todo el proceso educativo y lo fija en unas normas y sobre todo en unos libros de texto oficiales, será la consecución de un buen grado de autonomía que llegase hasta los propios colegios, verdaderos y últimos factores del cambio (Sánchez, 1995).

Forma pedagógica de los textos escolares

Un punto importante en estos estudios son las características especiales de los libros de texto. El tipo especifico de información que el libro de texto propone se caracteriza por dos notas fundamentales:

- Es sistemática. El libro de texto proporciona las claves necesarias para llegar a dominar una materia, el saber y el saber hacer que la caracterizan.
- Es gradual. Desarrollada paso a paso y prestando especial atención a los prerequisitos de cada aprendizaje concreto.

La forma pedagógica de los libros escolares los convierte en productos específicos, aislados de otras formas culturales. Su calidad literaria cuenta menos: Ni el autor se expresa con su estilo al crear contenido, pues tiene que responder a lo que está regulado, ni tampoco puede ser original en las formas que, además de estar reguladas, harán peligrar la demanda de un consumidor (el profesor) acomodado a determinados estilos (Gimeno, 1995).

Para Selander (1990), el libro de texto es una reconstrucción social, que toma como referencia el mundo exterior. Posee una estructura interna, está enmarcado por la institución que denominamos educación. Se configura no como algo destinado a presentar conocimientos nuevos, sino a reproducir conocimientos ya sabidos. De aquí surge el problema de la transformación: la transferencia de los textos y artefactos científicos, culturales, etc. a un conocimiento de libro de texto. El proceso se puede dividir en tres partes: delimitación del contenido, selección de contenidos y actividades y reformulación para hacerlo asequible a los alumnos.

Para Gimeno (1995), el texto porta y representa una objetivación cultural interpretable, mediatizado por las condiciones de elaboración, difusión, adopción, consumo y legitimación en la escuela. El significado a extraer de los textos depende de los contextos subjetivos de quienes los interpretan y utilizan: Profesores y estudiantes; bien entendido que al estudiante le llegan con la mediación del profesor. En esta condición existe un potencial innovador importante. El libro de texto está elaborado para la institución escolar y su uso está enmarcado en ella. La interpretación y el uso que del texto hacen los profesores y los estudiantes tiene que ver con los contextos escolares y de aula, así como con el ambiente más inmediato para su utilización que son las tareas académicas que caracterizan un determinado estilo metodológico.

Según Stenhouse (1987), un curriculum, si posee un valor, expresa, en forma de materiales docentes y de criterios para la enseñanza, una visión del conocimiento y un concepto del proceso de educación. Proporciona un marco dentro del cual el profesor puede desarrollar nuevas destrezas y relacionarlas, al tiempo que tiene lugar ese desarrollo, con conceptos del conocimiento y del aprendizaje.

Así mismo Apple (1989), considera que se les responsabiliza de la desprofesionalización docente, en tanto codifican un tipo de pedagogía que el profesor está reclamado a desarrollar. En consecuencia se debe clarificar la política curricular y especialmente el control de la misma. Debe haber financiación publica dirigida a fomentar productos de calidad, asegurando su distribución entre todos los centros, así como información y formación de los consumidores y potenciación de la vertebración profesional.

Análisis del contenido del libro de texto

Finalmente recogemos algunos puntos relacionados con las recomendaciones sobre la forma de análisis de contenido de los libros de texto. Para Selander (1990), la mejor forma de conseguir una adecuada perspectiva es analizar el mismo tema en distintos libros y la principal fuente para el análisis del libro de texto es su mismo texto y sus ilustraciones. El análisis se debe centrar, primeramente en la selección que se hace de los contenidos y temas. En nuestro caso, esto incluye el estudio de los elementos de significado intensionales que describen los conceptos propiedades y teoremas incluidos.

Por otro lado, se recomienda revisar el estilo de redacción y composición. Nosotros estudiaremos el lenguaje, notaciones y representaciones utilizadas, así como los ejercicios y ejemplos incluidos, junto con sus variables de tarea.

Martínez Bonafe (1995) recomienda preparar un guión para el análisis y elaboración de materiales para el desarrollo del curriculum. En nuestro caso, este guión estaría constituido por la lista de elementos de significado identificada que se incluye en el Anexo III y que ha sido elaborada inductivamente a partir del análisis de los textos.

1.3.4. ESTUDIOS SOBRE LIBROS DE TEXTO EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Correspondencia con el currículo

El estudio de los libros de texto ha sido abordado por diferentes autores. Un primer grupo estudia la correspondencia entre los libros de texto y el contenido pretendido en el currículo.

Alford (1986) encontró los siguientes resultados en un estudio de libros de texto realizado en Estados Unidos:

a) Del 70% al 80% del contenido en los libros de texto elementales de matemáticas se dedicaba al cálculo, mientras la evaluación que se realiza al finalizar la enseñanza en su país, normalmente se distribuye más equitativamente, incluyendo conceptos, destrezas y aplicaciones;
b) Los contenidos son muy variados entre una serie de libros de textos correspondientes a un grado dado. Los libros de texto no solo difieren en la presentación, secuencia y localización de los tópicos, sino también en el énfasis dado a cada tema.
c) Una gran proporción del material en los libros de texto no fue cubierta en los tests estandarizados. Parece, en consecuencia que los autores de estos libros no tuvieron en cuenta realmente el sistema de evaluación para el que se preparaban los alumnos a los que iban destinados los libros.

Según la autora, estos resultados tienen dos implicaciones importantes: Primera, que los profesores deben ser conscientes de las diferencias entre lo que se espera enseñar y lo que los libros de texto contienen. Siguiendo el libro de texto, los profesores a veces se desvían de las expectativas del curriculum. Segunda, que los tests estandarizados podrían jugar un importante papel en la toma de decisiones instruccionales. Los tests estandarizados evalúan sólo una muestra de lo que puede ser enseñado. Los libros de texto suelen cubrir un curriculum generalmente más amplio, e incluso algunos profesores aumentan todavía más el contenido cubierto por dichos textos. Las diferencias entre los libros de texto y el contenido de los tests, ayudan a separar dos aspectos de la evaluación de los programas instruccionales. Una cuestión es cómo los buenos estudiantes aprenden lo enseñado, y otra es si el contenido enseñado ha sido adquirido por la mayoría de los alumnos, cuestiones que generalmente son confundidas en los resultados de los tests estandarizados.

McGinty y cols. (1986) se preguntaron acerca de sí los libros de texto de matemáticas reflejaban lo que se proponía en el currículo de su país. Así, en una agenda para la acción del NCTM (1980), la recomendación primera es que la resolución de problemas fuese el foco de las matemáticas escolares en la década de los 80. Se sugirió también que los programas de matemáticas diesen oportunidades a los estudiantes para aplicar las matemáticas. Sin embargo, los libros de texto estudiados por McGinty, sugieren todo lo contrario.

En su trabajo, compararon libros de texto de quinto grado publicados en 1924, 1944 y 1984, encontrando una reducción del tipo de problemas verbales en 1984 a un tercio de los que se proponían en 1924 y un incremento del 57% en actividades de ejercitación y práctica. Por consiguiente, parece que hubo en este período un desplazamiento del interés por la resolución de problemas y un aumento de la ejercitación, creándose un desfase respecto al interés que en el currículo americano se daba a que los alumnos enfaticen la resolución de problemas y la aplicación de las matemáticas.

Para mejorar los problemas encontrados en los libros de texto, los autores proponen reducir las páginas dedicadas a ejercicios repetitivos, aumentando las aplicaciones, la cantidad y calidad de las situaciones de resolución de problemas. Se sugiere poner el énfasis en los problemas verbales, consiguiendo así que los alumnos sean buenos lectores de problemas matemáticos. También recomiendan la incorporación de las nuevas tecnologías en los libros de texto, ya que ello puede contribuir a motivar a los alumnos para resolver problemas. El uso de la calculadora y los microcomputadores les permite centrarse en dicha resolución y dedicar menos tiempo a las tareas algorítmicas de lápiz y papel.

Concluyen los autores, que, visto el decrecimiento del valor de la lectura y del número de problemas verbales en los actuales libros de texto con respecto a los antiguos, debemos cambiar esta tendencia. Hay que proveer a nuestros alumnos de muchísimas oportunidades de resolución de problemas y de actividades que nosotros creamos apropiadas y que expresen sus intereses. Así nuestros textos reflejarán lo que predicamos.

El fin del estudio de Chandler (1992) fue comparar el contenido de los libros de texto más usados en su región para la enseñanza de las matemáticas con el contenido de las pruebas de evaluación en matemáticas usadas en la misma. Más concretamente, comparar el contenido de los libros de texto de primero a octavo con el del test "Ohio ninth grade proficiency test", empleado por el departamento de educación e inspirado en los estándares del NCTM para evaluar el progreso de los estudiantes al alcanzar el grado noveno. Desde 1993, la superación de esta prueba es obligatoria en este estado para obtener la graduación escolar.

El autor examinó series completas de libros de texto, desde primer a octavo nivel. El estudio sólo midió la cantidad de contenido de cada texto respecto a diferentes tópicos del currículo de matemáticas, sin intentar evaluar la calidad con que este contenido estaba expuesto. En total se identificaron 16 áreas temáticas agrupadas en las cinco categorías básicas de aritmética, medida, geometría, análisis de datos y álgebra.

En cada una de ellas se identificaron tres niveles de uso que se consideraban en el test de Ohio: Destrezas, comprensión conceptual y resolución de problemas. El método empleado fue el recuento del numero de páginas en cada texto dedicadas a cada categoría temática y nivel identificado. Sus resultados mostraron una falta de correspondencia entre el porcentaje dedicado en los libros a cada una de las categorías conceptuales y el resultado dedicado a estas mismas categorías en la prueba de evaluación requerida para la graduación de los alumnos. Mientras que el contenido de aritmética en los libros era casi el doble que en la prueba, en el resto de las categorías el contenido de los libros era menor que el del test, particularmente en lo que se refiere al álgebra.

Un estudio realizado por el SMSG (School Mathematics Study Group), coordinado por Begle (1973), sobre los distintos componentes de la educación matemática incluyendo los objetivos, los profesores, el curriculum, los procesos instruccionales, los estudiantes y el medio, aporta algunas cuestiones que pueden ser de interés para este trabajo.

En primer lugar comenta dos hechos obvios: Uno, que el curriculum que forma parte del proceso educativo, claramente influye en el aprendizaje de los alumnos. Otro, que el sistema educativo no trabaja igual para todos los alumnos, y que aminorar esta desigualdad es precisamente una de las tareas propias de la educación matemática.

Más adelante menciona que estudiantes de las escuelas elementales, cuyos libros de texto dedicaban un gran numero de páginas para geometría, puntuaban considerablemente más alto en los tests geométricos que los estudiantes cuyos textos no incluían geometría. Ejemplos similares encontró en los diferentes análisis de datos recogidos en el estudio longitudinal, que demostraron que el libro de texto tiene una poderosa influencia en los estudiantes. Así, si un tópico matemático está en el texto, los estudiantes lo aprenden y si no está, los estudiantes, en promedio, no aprenden esto, utilizando la frase "promedio" porque puede haber algunos profesores que enseñen tópicos que no están en el texto. De cualquier modo, concluye que la mayor parte de los aprendizajes de los estudiantes son dirigidos por el texto antes que por el profesor. Considera esto un importante hallazgo, ya que el contenido del texto es una variable que puede ser manipulada, y que sabemos afecta al aprendizaje del estudiante.

No obstante, matiza que el libro de texto no es una variable tan poderosa como se pudiera desear. Recuerda que cuando SMSG comenzó sus trabajos muchos de ellos estaban convencidos que los textos basados en la estructura matemática podían resolver todos los problemas de educación matemática, y otros de que tales textos serán un absoluto desastre. Todos se equivocaron. Los textos que se concentran en la estructura de las matemáticas no son ciertamente desastrosos. De hecho, los estudiantes que usaron tales textos puntuaron mejor en los tests de resolución de problemas comparados con los estudiantes que usaron textos que se concentraban en el desarrollo de las destrezas matemáticas. De cualquier modo la diferencia no fue tan grande como esperaban.

Otras variables en los libros de texto parecen ser menos importantes, por ejemplo, el estilo en que está escrito un libro de texto. Otra diferencia que encontró, pero tampoco muy grande, fue que los libros considerados como abiertamente formales parecen ser menos efectivos que otros.

Así mismo, a través de los textos escolares elementales, demostró que los conceptos básicos de probabilidad, son tópicos apropiados para cualquier nivel. Un nuevo curriculum escolar de alto nivel, elaborado por ellos, para jóvenes, resultó ser efectivo para los estudiantes de todos los niveles de habilidad. Aritmética, álgebra, geometría y probabilidad, son introducidas de tal forma que cada una apoya y es apoyada por las otras. Esto quiere decir según el autor que la situación de tópicos específicos en el curriculum podrá estar basada no en la edad del estudiante, sino en la estructura conjunta de las matemáticas.

Los libros de texto y el currículo integrado

Sierpinska (1993) estudia cómo interpretan los alumnos las secciones de aplicación de libros de texto de álgebra lineal con la ayuda del tutor. Este estudio fue puesto dentro del marco de una cuestión más general, a saber, si es realista pensar en una implementación del llamado "curriculum integrado".

Por "currículo integrado" Sierpinska entiende una ampliación de los límites de las matemáticas; una relación más personal entre el profesor y el alumno; libre elección de problemas por parte de los alumnos y una evaluación basada más en el conocimiento del progreso de los estudiantes que en los resultados de tests escritos. Cita ejemplos de escuelas organizadas alrededor de un curriculum integrado donde las actividades de los estudiantes no fueron divididas en clases y asignaturas sino en laboratorios, talleres y temas de trabajo.

Esta autora opina que el libro es estático, y está pensado para ser usado en cursos de matemáticas, no en talleres. Los modelos matemáticos de economía o demografía, como aplicaciones del álgebra lineal en estos dominios, son abundantes en el libro. El curriculum representado por los libros que analizó, lo considera "integrado" porque el álgebra lineal se presentaba principalmente como útil para otras disciplinas.

Como conclusión da varias razones por las que considera no es realista hacer una aproximación demasiado radical al "curriculum integrado", entre otras las siguientes:

- Una mala enseñanza puede dañar un curriculum integrado; esta enseñanza depende de muchos factores: El profesor, su habilidad para adaptarse a los intereses y problemas particulares de los estudiantes, su conocimiento profundo y flexible del tema y su conocimiento pedagógico.
- Se puede caer en una perspectiva mecanicista, con muchos ejercicios repetitivos. La diferencia puede ser que ahora, en lugar de una simple resolución de sistemas de ecuaciones, los estudiantes estarán interminablemente encontrando "producto de vectores" o "resolviendo decenas de circuitos eléctricos usando las leyes de Kirchhoff".
- Una enseñanza radical integrada de matemáticas puede conducir a no enseñar matemáticas en absoluto, si la integración consiste en quedarse en el nivel de los problemas concretos. La ratio de fracaso puede incrementarse, y otra vez oiremos el eslogan "vuelta a lo básico".
- Tampoco es realista esperar que la relación pedagógica tenga en cuenta la libre "negociación de metodología o contenidos". La verdad de los teoremas matemáticos no es usualmente un asunto de opinión, al menos aquellos que son enseñados a niveles elementales.
- Para satisfacer las mínimas metas del curriculum integrado, los problemas de aplicación deben ser matemáticamente relevantes y ricos. Ello puede estimular el interés de los estudiantes durante largos periodos de tiempo, y fomentar la búsqueda de herramientas para contestar sus cuestiones.

Señala también la dificultad de proponer auténticos "problemas de aplicación" en los textos. Queremos que un problema de aplicación tenga suposiciones realistas y al mismo tiempo buscamos que sea lo suficientemente fácil para que los estudiantes puedan resolverlo con las herramientas restringidas que tienen accesibles. Queremos implicar al estudiante en la actividad de matematización, pero al mismo tiempo, queremos que usen un modelo matemático especifico. Así organizamos los datos para que sugieran este modelo, lo cual no hace que el modelo sea auténtico. Pero un problema de aplicación de un libro de texto nunca será un auténtico problema-aplicación como esos que son resueltos por los economistas, demógrafos y otros profesionales.

Análisis de la transposición didáctica

Otro autor muy interesante para nuestro estudio es Kang (1990), quien presentó en la Universidad de Georgia, un trabajo realizado bajo la dirección de Kilpatrick, titulado "Transposición didáctica del conocimiento matemático en los libros de texto" (Kang y Kilpatrick, 1992).

El propósito de Kang fue investigar cómo el conocimiento matemático ha sido modificado en los textos de matemáticas escolares. La transposición didáctica la definió en línea con el trabajo de Chevallard como proceso de reorganización del conocimiento con una intención didáctica y como el resultado de esta operación. Como tal transformación, la transposición didáctica del conocimiento matemático tiene dos atributos: Declaración del conocimiento y cambio del medio. Según Chevallard (1985) podemos distinguir entre el conocimiento usado y el conocimiento enseñado, desde una perspectiva social del conocimiento. Mientras que la característica principal del primero es su relevancia, la del segundo es su aceptación social. Es en este sentido que indicamos que las matemáticas escolares son declaradas como un todo, como un cuerpo de conocimiento para ser enseñado en las escuelas.

En relación con el cambio del medio, el autor considera que para que el conocimiento sea enseñado, es necesario un intento didáctico donde habrá que cambiarlo y reconstruirlo desde el comienzo. A este proceso de cambio de medio en la transposición didáctica en los libros de texto es lo que llama procesos de pseudocontextualización y pseudopersonalización, los cuales son temporales e hipotéticos para adecuar el medio del conocimiento a la situación del estudiante.

Kang seleccionó tres libros de texto de álgebra elemental donde buscó ejemplos de transposición didáctica, para dar una descripción fenomenológica usando técnicas etnometodológicas. Las transposiciones analizadas las categorizó en cuatro grupos: Localizaciones de conceptos matemáticos, modelos del mundo real para conceptos matemáticos, problemas verbales y cuerpos de conocimiento extramatemático. En cada categoría fueron seleccionados y descritos dos ejemplos de transposiciones didácticas. Fueron las siguientes: Localización de factorizaciones, localización de exponentes, el modelo de área para la multiplicación, el modelo lineal del número para la adición, adivinanza de números, problemas de movimiento uniforme, y programación en BASIC.

En el estudio de cada una de ellas se tuvieron en cuenta los siguientes apartados: Descripción del texto, pseudo-contextualización, pseudo-personalización (explicación, actividad, retención) y conclusión.

Sus resultados sugieren que la forma del conocimiento involucrado en las transposiciones didácticas en los libros de texto es inestable, a pesar de que las matemáticas escolares como un cuerpo declarado de conocimiento tiene un aspecto estático. Los procesos de pseudopersonalización en los libros de textos muestran escasos ejemplos de fenómenos didácticos tal como el deslizamiento metacognitivo, la evidencia formal, y los efectos Topaze y Jourdain (Brousseau, 1986).

Un libro de texto de matemáticas es una forma típica de preservar el conocimiento modificado para las matemáticas escolares. Es un punto muy esencial en la ruta de las transposiciones didácticas en matemáticas escolares. Esto provee una fuente en la cual algunos aspectos de las transposiciones didácticas actuales pueden ser investigadas.

La transformación del conocimiento está dada por un propósito escolar. Esta transformación puede ayudar a retener lo enseñado, pero también puede destruir pensamientos originales. Es en este sentido que el autor opina que el conocimiento es muy frágil. La fragilidad del conocimiento tiene un aspecto paradójico en que una forma constante no puede mantener un significado constante.

Kang observó que las transposiciones en los libros de texto pueden tener varias limitaciones. Por ello alude a la cuestión planteada por Kilpatrick sobre si la resolución de problemas es archivable, y más generalmente, si el conocimiento matemático puede ser archivado, que fueron comentadas anteriormente.

Las principales cuestiones tenidas en cuenta para investigar el proceso de cambio de medio fueron dos: 1. ¿Qué se cambia de los contextos originales del conocimiento por las transposiciones didácticas en los libros de texto? (pseudocontextualización); 2. ¿Qué aspectos cognitivos de los estudiantes son asumidos en las transposiciones didácticas en los libros de textos? (pseudopersonalizaciones).

Como conclusión, y en relación con los textos analizados, Kang descubrió que están escritos desde la posición del profesor. Contienen una explicación y una serie de ejercicios que puede dar a los alumnos. Siguen una metodología basada en el esquema teoría seguida de práctica. A veces inventan conceptos auxiliares que pueden ser necesarios en algunos casos, pero que también se pueden constituir en una dificultad añadida. Por lo general las actividades que presentan a los alumnos suelen estar agrupadas como ejercicios de rutina o problemas no rutinarios, pero siguiendo imperativos didácticos más que intentar proveer de una gran variedad de situaciones de aprendizaje.

El trabajo de Perrin-Glorian (1992), trataba sobre áreas de superficies planas y números decimales. Consta de cuatro capítulos. En el primero se ocupa de la enseñanza de la noción de área a los alumnos de la escuela elemental. En el segundo, de las secuencias de enseñanza que observaron. En el tercero, realiza un análisis de las respuestas de los alumnos de las dos clases observadas que se produjeron en el transcurso de coloquios y como resultado de pruebas escritas. Ello le permitió evaluar los conocimientos, las dificultades que se resisten y las dificultades no previstas, provocadas por ellos mismos, al hacer nuevas hipótesis y al modificar las secuencias. El objeto del cuarto capítulo fue de recapitulación y conclusión.

Centrándonos en el capítulo primero, que es el más relacionado con nuestro actual trabajo, en él se aportan elementos de análisis de la transposición didáctica de la noción de área de superficie plana, interrogándose sobre el contenido matemático pretendido y sobre las maneras de abordar la enseñanza. Examinaron los programas de la escuela elemental desde el fin del siglo y un cierto número de manuales utilizados en los últimos treinta años. Observó que el significado de los términos superficie y área, había evolucionado al mismo tiempo que el objetivo de la enseñanza de la medida de las áreas. En este cambio influyeron notablemente las asociaciones de profesores de matemáticas.

Del análisis de los programas y de los manuales, concluye la autora que dos objetivos se manifiestan en la enseñanza de las áreas y más generalmente de las medidas, de manera muy desigual según las épocas, con una ruptura muy marcada al comienzo de los años 70:

- De una parte, se trata de responder a una necesidad de la sociedad de dispensar conocimientos elementales, principalmente lo concerniente al sistema métrico, útiles tanto para la vida cotidiana como para la vida profesional de todo adulto;
- de otra, se trata de enseñar nociones matemáticas que serán retomadas nuevamente y generalizados más tarde. Se trata de alguna manera de poner bases para la continuación de la enseñanza de las matemáticas.

Observó que la ruptura de los años 70 correspondía al paso de la predominancia del primer punto de vista al segundo, y que este paso había sido preparado por un trabajo comenzado mucho antes en el seno de la asociación de profesores de matemáticas. Conforme al espíritu de los programas de esta época, se optó por elegir el camino lo más directo posible para presentar el concepto matemático deseado, aquí el de medida que permite asociar un número a las superficies ocultando el aspecto dimensión. El área es así identificada al número que la mide. Esta identificación, tiene además como consecuencia que no se presenta en la escuela elemental el área como un invariante de la superficie. Además, la utilización casi exclusiva de cuadrículas parece dar a los alumnos una respuesta al problema de la medida sin plantearlo(enunciarlo), y sin construir el invariante que se trata de medir.

El trabajo de Ruiz (1994),"*Las concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*", dedica un capítulo al estudio del tratamiento dado en los cuestionarios oficiales y en los manuales escolares a dicha noción, al objeto de caracterizar la transposición didáctica tanto en los cuestionarios como en los manuales escolares.

Analizó los cuestionarios oficiales correspondientes a los niveles de E.G.B., B.U.P. y C.O.U. intentando encontrar la progresión que determinan los saberes a enseñar, así como la información facilitada por éstos a los profesores. Para ello estudió la presentación, diferentes representaciones y situaciones de empleo de la noción de función. Vio que cumplían las exigencias fundamentales que, según Chevallard (1991), precisa todo saber que se desea figure en un sistema de enseñanza y que son: Exigencia de dividirlo, despersonalización del saber, programabilidad de la adquisición del saber, progresión legal, pública y lógica y la necesidad de evaluación.

Después de analizar los importantes movimientos en cuanto a la enseñanza de las matemáticas durante los años en que han estado vigentes estos cuestionarios, la autora concluye que la caracterización de la transposición didáctica realizada por los cuestionarios oficiales de la noción de función inducen la concepción de que una función es una aplicación entre conjuntos numéricos.

Para analizar los manuales escolares la autora consideró las siguientes variables: Modo de presentación de los conceptos teóricos, definición presentada, ejemplos propuestos, relación establecida entre la función y los objetos matemáticos relacionados con ellas y ejercicios propuestos. Después de un minucioso estudio, la autora concluye que la caracterización de la transposición didáctica de la noción de función que realizan los manuales escolares es la siguiente: se adaptan a la exigencia de programabilidad, utilizan un modelo de presentación teoría-práctica, introducen los conceptos a partir de la definición formal, las definiciones presentadas sufren un proceso de deshistorización, incluye notas explicativas (efecto Topaze) y los ejercicios casi siempre son propuestos en el marco algebraico. Las concepciones inducidas son como expresión algebraica o fórmula, como curva representada en un diagrama cartesiano y como aplicación entre conjuntos numéricos.

Los libros de texto y el lenguaje matemático

Cuando leemos un texto matemático, al no haber sido instruidos en técnicas de estudio y lectura de este tipo de textos, empleamos estrategias de lectura propias elaboradas a lo largo de nuestra experiencia que no siempre funcionan con éxito cuando las transferimos a los textos matemáticos. Por ello, Konior (1993), propone que son necesarias investigaciones que estudien la estructura de un texto matemático y las técnicas adecuadas para su lectura. Ello debe hacerse en dos direcciones: Una, estudiar los actuales procesos de lectura utilizados tanto por lectores noveles como avanzados y otra analizar la estructura del texto matemático. En este último sentido fue su investigación, donde analizó la estructura de cerca de setecientos textos matemáticos, todos ellos sobre demostraciones, escritos por especialistas en matemáticas.

El punto de partida de la investigación fue la afirmación general de que el texto clásico de matemáticas tiene su construcción especifica, planteándose el objetivo de comprender el carácter especifico de estos textos. En particular trata de revelar los rasgos específicos de la construcción de una demostración, los medios de presentación escrita de la construcción mental. Uno de los métodos principales que utilizan los autores de textos para guiar el trabajo de sus lectores es la fragmentación del texto, que puede ser verbal y no verbal. Muchas veces los signos, denominados delimitadores de estructura, utilizados para tales fragmentaciones no están indicados explícitamente. Después de estudiar como ejemplo individual el teorema de Cantor-Bernstein, concluye que los lectores de textos matemáticos han de ser instruidos en estas técnicas de lectura y en el conocimiento de la estructura de los textos matemáticos, con lo que estarán preparados para utilizar los signos delimitadores, y obtener el máximo provecho a dichas lecturas.

Otro estudio fue el realizado por Sanz (1990;1994), que basándose en las teorías semióticas y de la representación, sobre todo en el "Tratado de Semiótica General" de Eco (1979) y en otra propuesta más adaptada a las matemáticas de Kaput (1987), analizó varios textos de E.G.B. correspondientes a los Ciclos Inicial, Medio y Superior.

Entre las formas de expresión que podemos encontrar en un libro de texto, basándose en un modelo global de representación la autora enumera las siguientes: Verbal, escrita y simbólica específica. Entre las gráficas, pictogramas, fotografías, diagramas y esquemas. Quedan fuera de la posibilidad de ser representadas en los libros de texto la mental interna, la manipulativa y la oral. Por ello, en los primeros niveles de aprendizaje, sobre todo en el Ciclo Inicial, la importancia del libro de texto es relativa, aumentando al avanzar dichos niveles. Una vez analizados los libros de texto, y después de un exhaustivo estudio de algunos ejemplos sobre las formas de expresión que aparecen en dichos textos, nos indica la autora que las condiciones que deben cumplir en relación con los aspectos expresivos son: No sustituir la realidad con dibujos de la misma, no utilizar expresiones gráficas o simbólicas que sean más complejas que el propio concepto a enseñar, evitar el uso de expresiones irrelevantes, no desviar el sentido en el que se emplea el lenguaje natural.

Por último, Sanz recomienda el uso de problemas abiertos, a los que exige dos condiciones. Una, que sea un problema abierto para un cierto margen de personas entre dos extremos (el experto y el que lo desconoce totalmente) y otra que tenga la estructura específica de un problema. El interés que presenta este modelo de enseñanza es que los procedimientos necesarios para resolverlos destacan valores muy estimados en la sociedad actual, como la colaboración entre compañeros, el respeto a la opinión de los demás, etc.

Morgan (1996) indica que el lenguaje de las matemáticas ha sido una preocupación de la comunidad de educación matemática desde hace tiempo, aunque algunos aspectos de este lenguaje han sido descuidados. En su trabajo hace uso de las teorías lingüísticas para explicar como el lenguaje de un libro de texto puede influenciar la forma en que el lector se acerca al mismo. La descripción del lenguaje matemáticos se ha centrado en el vocabulario y simbolismo. Una estructura gramatical que ha recibido cierta atención por su relevancia en la formación de nuevos objetos y conceptos matemáticos es el uso extensivo de la nominalización, es decir, formar un nombre a partir de un verbo, es decir, un objeto a partir de un proceso (como permutación, rotación, etc.). Menos atención se ha dado a la actividad de formación de argumentos matemáticos, posiblemente porque los alumnos no realizan muchas actividades que impliquen la producción de sus propios textos matemáticos.

Los textos matemáticos se diferencian en el tema, la relación entre el autor y los lectores y la formación de los argumentos. Estos aspectos corresponden a tres metafunciones del lenguaje: Ideacional, interpersonal y textual. La función ideacional o experiencial se refiere al tipo de objetos que participan en la actividad matemática, es decir la forma en que el lenguaje expresa las categorías de la propia experiencia del mundo. La función interpersonal expresa las relaciones sociales y personales entre el autor y los lectores. La función textual es lo que hace al lenguaje operacionalmente relevante en su contexto y diferencia un mensaje vivo de una simple entrada en un diccionario.

Morgan cree que la cuestión central en el análisis de la función ideacional es qué es la matemática, tal como aparece en el texto analizado. Esta pregunta general se puede descomponer en las siguientes:

- ¿Qué clase de sucesos, actividades y objetos se consideran matemáticos?
- ¿Cómo se crea o descubre nueva matemática?
- ¿Cuál es el papel de las personas en la matemática?

Al analizar la actividad matemática presentada en un texto, un papel significante es los tipos de procesos activos y sus participantes. Una gran proporción de procesos materiales pueden interpretarse como que sugieren matemáticas pre-existentes (por ejemplo, ver, pensar) que en cierto modo es descubierta por los matemáticos; los procesos relacionales presentan una visión de las matemáticas como un sistema de relaciones entre objetos o entre objetos y sus propiedades.

También es necesario estudiar las clases de objetos participantes en el texto y por tanto qué tipos de objetos son los actores de los procesos matemáticos o son afectados por dichos procesos. Una consecuencia del uso de la nominalización es que oculta el agente de la transformación, no precisa especificar el actor en el proceso. El uso, por ejemplo, de la palabra permutación sin indicación que este proceso es realizado por alguien supone una imagen absolutista de las matemáticas como un sistema independiente de la acción humana. Una función similar es realizada por el uso de objetos representacionales como tablas, gráficos o diagramas, como actores en procesos verbales, así como el uso de la forma pasiva.

Los roles y relaciones del autor y el lector se pueden observar examinando el uso de los pronombres personales, la amplitud del vocabulario matemático especializado y las formas convencionales, tales como el imperativo que expresan autoridad y certeza.

Además de mirar las características internas del texto es importante considerar su estructura global. Por ejemplo, cómo las diferentes partes llenan distintas funciones. y si tales secciones se señalan explícitamente mediante títulos o cambio de estilo de presentación,

Los ejercicios en los libros de texto

Respecto al análisis de los ejercicios en los libros de texto, podemos citar el trabajo de Cerdán y Puig (1983), que analizaron cuatro colecciones de textos dirigidos a alumnos comprendidos entre 8 y 11 años de edad. Clasificaron los ejercicios por el contenido, tipo de problema y herramienta heurística utilizada en su resolución. Robert y Robinet (1989), es otro trabajo donde analizaron los ejercicios de cinco manuales dirigido a alumnos de 12 años. Además de estudiar diversas cuestiones referidas a los ejercicios, intentaron obtener algunas conclusiones sobre la representación que de la matemática y su enseñanza poseían los autores de los textos.

1.3.5 ESTUDIOS SOBRE LIBROS DE TEXTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Combinatoria

Navarro-Pelayo (1991, 1994) utiliza el análisis de libros de texto para mostrar la relevancia didáctica de una nueva variable de tarea de los problemas combinatorios. Esta variable, que denomina MCI (modelo combinatorio implícito) no había sido tenida en cuenta, ni en la enseñanza, ni en la investigación del tema, en trabajos anteriores al de esta autora. Es, sin embargo, una variable relevante desde el punto de vista matemático, ya que los problemas que pertenecen a uno u otro modelo no se traducen en forma inmediata entre sí, puesto que el modelo de partición o colocación es más amplio que el modelo de selección, en el que se suelen definir las operaciones combinatorias elementales.

La autora muestra el efecto de la mencionada variable sobre la dificultad de los problemas combinatorios. En su estudio sobre los libros de bachillerato, analiza 11 libros de texto desde el punto de vista de las definiciones propuestas, los ejercicios presentados y los recursos didácticos utilizados. Muestra que el modelo combinatorio no es tenido en cuenta en los ejercicios escolares que se proponen a los alumnos. Por otro lado, las definiciones de las operaciones combinatorias usualmente se presentan usando el modelo de selección o de distribución. El modelo combinatorio de partición no se usa para definir las operaciones combinatorias. En otros casos no hay homogeneidad en la presentación y un mismo libro utiliza un tipo de definición para las variaciones y otro diferente para las combinaciones. Las notaciones empleadas son, asimismo, inconsistentes y pueden producir confusión a los alumnos. Como conclusión, la autora sugiere que todos estos resultados en la forma de presentación de la combinatoria podrían contribuir a la mayor dificultad que los alumnos encuentran para resolver problemas combinatorios de partición.

Probabilidad

En el campo de la probabilidad, encontramos el trabajo de Malara.(1989), que se justifica, debido al papel que juega la probabilidad y la estadística en los temas científicos, sociales y económicos, así como la importancia que tiene su enseñanza en la escuela, incluso desde los primeros niveles.

Este documento es el fruto de un seminario sobre probabilidad y estadística, donde colaboraron profesores de enseñanza media y universitarios, con el objetivo de completar su formación de base sobre estos temas y analizar el tratamiento didáctico dado en diez libros de texto analizados. Este seminario se desarrolló en dos fases: La primera para construir una base común de conocimiento y la segunda, para afrontar el análisis de los libros de texto. Se esperaba con ello lograr los siguientes objetivos:

- Conocer las líneas esenciales en el itinerario didáctico propuesto por los diversos textos;
- confrontar las diversas aproximaciones de los diferentes libros sobre un mismo contenido;
- recoger material del trabajo que permitiera construir la propia estrategia para la enseñanza de la probabilidad y estadística con un enfoque novedoso;
- efectuar una programación articulada y consciente para el tema, basándose en lo recogido en los libros analizados;
- comprender, gracias a la profundización del conocimiento, la potencialidad y limitaciones del itinerario didáctico propuesto en cada uno de los libros de texto.

La autora comenzó su trabajo con la construcción de una rejilla de análisis del tema tratado. Sobre la base de la misma, se estudió cada uno de los textos seleccionados y se realizó una ficha resumida de su contenido. Construyó, finalmente una serie de tablas de comparación de textos, para una serie de conceptos. En el análisis tuvo además en cuenta los siguientes aspectos externos: Apariencia tipográfica, lenguaje usado, organización de los contenidos, metodología adoptada y tipología de ejercicios. Asimismo, estudió la correspondencia entre los ejercicios propuestos y el contenido y señaló las actividades consideradas por algunos autores como profundización.

El trabajo se llevó a cabo como una actividad de formación de los profesores participantes más que de investigación sobre las características de los textos. Por ello, no se realizan valoraciones sobre la correspondencia entre el significado institucional y el significado en los textos de los conceptos analizados. Tampoco se aportan conclusiones sobre la existencia de interpretaciones incorrectas o errores en los textos analizados. Las tablas presentadas por la autora son tabla de presencia/ausencia, sin un estudio cualitativo o un análisis epistemológico de los contenidos presentados en los manuales, de donde se deduce el interés de completar el estudio de Malara en los aspectos citados.

Este trabajo ha sido para nosotros de gran utilidad, porque nos ha aportado elementos sobre los cuales realizar nuestro análisis y para continuar nuestro trabajo en el futuro. Sus resultados no obstante, no agotan la posibilidad de investigación sobre la presentación de la probabilidad en los libros de texto, por lo cual, hemos decidido completar en nuestra investigación algunos aspectos analizados por Malara.

Análisis de la correlación y regresión

Sánchez Cobo (1996) realiza un estudio de la presentación de la correlación y regresión en una muestra de 11 libros de texto de bachillerato, desde el punto de vista teórico y práctico. Para el análisis de la presentación teórica se tiene en cuenta los objetivos de los libros, la metodología usada en la exposición del tema, contenidos matemáticos presentados, número de ejercicios y ejemplos y presencia de consideraciones históricas. Se ofrece una taxonomía de definiciones y un análisis de las demostraciones, tanto desde el punto de vista de la función que realizan como de las componentes que la integran. Concluye que existe una presentación basada en el esquema teoría-práctica, reforzada por la ubicación de los ejemplos con relación al concepto que ejemplifican. Las definiciones son principalmente de tipo instrumental, que pudieran transmitir la visión de las matemáticas como conjunto de reglas y hechos a ser recordados. Las demostraciones tienen casi exclusivamente una función de convicción y explicativa de escaso interés para los alumnos.

Respecto al análisis de ejercicios se estudia la distribución de las siguientes variables de tarea: Contextos utilizados, contenido matemáticos, tipo de dependencia y valor absoluto del coeficiente de correlación. Entre los tipos de tarea se diferencia: Cálculo, interpretación, representación gráfica, predicción, comprobación de propiedades, comparación de grados de asociación y recogida y análisis de datos. Hay un fuerte sesgo en estos ejercicios y diagramas de dispersión hacia la asociación directa y de fuerte intensidad. Se destaca la vertiente del ajuste de la recta de regresión olvidando la problemática de la predicción a partir de la misma. Asimismo es escasa la discusión de los diferentes tipos de covariación, falta de contextualización en los ejercicios que, además, parecen pensados para ser resueltos con papel y lápiz y no mediante el uso de las nuevas tecnologías.

Textos universitarios de estadística

Los libros de texto son un área de especial preocupación dentro de la educación estadística. Así Kempthorne (1980) escribió: *"Ha habido una gran explosión de textos para la enseñanza de la estadística, pero algunos de nosotros estamos muy descontentos con el resultado de la misma"*. Naturalmente este descontento depende de la organización del libro, su contenido y el tipo de audiencia a la que va dirigido. El problema de la elección de un texto de estadística depende también de la especialidad del alumno, sobre todo si el texto se dirige a alumnos con baja preparación matemática, ya que el libro debe suplir esta falta de preparación.

Brewer (1986) analizó 18 textos de estadística, seleccionados entre los más vendidos en su país y publicados durante 1982. Seleccionó los textos siguiendo tres criterios: 1) Que el autor previamente hubiera publicado otros libros de textos de estadística, 2) que hubiera habido un proceso de revisión externa de los textos manuscritos y 3) que los textos fuesen relativamente bien conocidos en el mundo académico.

En general, observó que en sus intentos para explicar estadística inferencial de modo que tenga sentido para los lectores, los autores de algunos textos de estadística sacrifican la corrección matemática. El efecto de una aproximación incorrecta a la estadística (pero que "sea fácil de comprender") es que los lectores y usuarios son conducidos a creer que la inferencia estadística permite a los investigadores decir más de lo que es permisible y de ahí sacar más conclusiones de las que están realmente garantizadas por los datos. Se induce una fe exagerada en los resultados del análisis estadístico de los datos.

Después de enumerar una serie de posibles causas por lo que ocurre este fenómeno, este autor opina que una fuente de falsas concepciones y de errores estadísticos son los análisis estadísticos que se muestran en la literatura de investigación publicada, en revistas de prestigio, pero que no someten los trabajos a la revisión de un estadístico profesional, lo mismo que ocurre en algunas tesis y disertaciones en diferentes áreas de conocimiento. Sin duda ello es debido a la gran dificultad de la materia. Su reflexión final es que son los profesores de estadística, después de todo, los que seleccionan y validan, en última instancia, los libros de texto, teniendo, por tanto, la mayor carga de responsabilidad de elegir textos teóricamente sólidos y bien escritos para sus alumnos. Para hacer esta selección correctamente, opina Brewer, los profesores deben ser formados no sólo en la teoría estadística, sino también en las aplicaciones de esta materia.

La evaluación de los textos de estadística tiene lugar en diferentes contextos, desde los profesores, congresos profesionales, como la AERA o la ASA y en revistas especializadas. Por ejemplo, revistas como Biometrika o The Journal of the American Statistical Association publican regularmente revisiones de libros de texto. Dependiendo de la institución que hace la evaluación, el interés se concentra en la metodología instruccional, el contenido o la corrección técnica de la presentación. El autor indica que, en general, son escasos los estudios de evaluación comparativos de libros de texto en estadística, a pesar de las muchas publicaciones que hacen referencia al interés de este tipo de estudio.

Huberty y Barton (1990) emplearon cuatro criterios para evaluar la calidad de los textos de estadística multivariante, incluyendo el contenido cubierto, la facilidad de lectura y el tipo de ejercicios. Usaron una escala tipo Likert para clasificar los libros respecto a dichos criterios aunque no llegaron a ninguna conclusión sobre cómo usar la escala para seleccionar un libro adecuado. Huberty (1993) estudió 28 libros de estadística para analizar las prácticas referentes a los contrastes de hipótesis y describió criterios para comparar estos libros incluyendo la lógica de contraste, los pasos y métodos de contraste, e inclusión o no del estudio del p-valor.

Cobb (1987) reconoce la dificultad e importancia de la evaluación de los libros de estadística introductoria y presenta un marco para llevar a cabo estas evaluaciones organizado bajo los puntos siguientes: a) Nivel técnico y calidad de la exposición; b) temas cubiertos y c) calidad de los ejercicios. Realiza un estudio de 16 libros, llegando a la conclusión que el análisis de los ejercicios es un buen criterio para juzgar la calidad completa del libro.

Harwell (1994) indica que faltan guías basadas en la literatura de investigación que ayuden al profesor a seleccionar los textos que recomiendan a sus alumnos y que ello ha contribuido a la aparición de patrones no deseados en estos textos. Su trabajo continúa el de Cobb (1987), Huberty y Barton (1990) dirigidos a proporcionar una guía de este tipo. Intenta describir criterios válidos para la evaluación de los textos introductorios de estadística en la universidad y analiza cuatro libros básicos, a partir de los instrumentos desarrollados. En Harwell y cols. (1996) describe una serie de cuestionarios a alumnos profesores y expertos que usa para evaluar seis libros básicos de estadística a partir de las opiniones recogidas de los mismos, es decir, usando una aproximación cuantitativa al problema de investigación.

Nolen (1987) estudia el efecto que, sobre la lectura de los libros de texto de estadística tiene el hecho de que los estudiantes conozcan al autor y tengan interacción con el mismo. La relación con el autor del libro de texto pareció influenciar la comprensión, motivación y respuesta efectiva de los estudiantes en una investigación con 47 estudiantes universitarios, todos ellos mujeres. La autora deduce de su estudio implicaciones para la construcción de textos y la metodología de investigación sobre la interacción entre cognición y afecto durante el aprendizaje.

De todos estos estudios, podemos concluir, por un lado, el interés de continuar en esta línea de investigación, y por otro, que las limitaciones encontradas en los libros son lógicas, si tenemos en cuenta el carácter estático de los mismos y el triple carácter de las matemáticas señalado por Godino y Batanero (1994): Las matemáticas como actividad de resolución de problemas socialmente compartida; como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido. Esta complejidad hace sin duda más relevante el papel de una adecuada selección de situaciones didácticas en la elaboración de los libros de texto.

1.4. MARCO CURRICULAR

El trabajo que hemos realizado se ha circunscrito a textos publicados en el período 1975-1991. Para enmarcar el análisis conviene realizar una descripción del marco curricular en el que se desarrolla la enseñanza secundaria en el período estudiado, así como de las corrientes de reforma previas en las que se apoya, las que aparecen a lo largo del período y producen su paso a una nueva etapa en la historia educativa de nuestro país. Este estudio es el objetivo de esta sección que comienza con la Ley General de Educación de 1970 y finaliza con los decretos que desarrollan la Ley General de Educación del Sistema Educativo (LOGSE). Entre estos dos periodos aparecen una serie de proyectos educativos y trabajos relacionados con el diseño curricular en el campo de la probabilidad que han tenido notable influencia sobre el cambio, tanto en los contenidos como en la metodología de enseñanza de esta materia, no sólo en los nuevos decretos curriculares de la LOGSE, sino también en los libros de texto publicados al final del periodo que estamos analizando en nuestro estudio. A continuación describimos brevemente estas diferentes etapas, restringiéndonos al caso particular de la enseñanza de la probabilidad.

1.4.1. LA REFORMA CURRICULAR DERIVADA DE LA LEY GENERAL DE EDUCACIÓN

Aunque, desde el período de reforma educativa en que nos encontramos, nos pueda parecer que la etapa anterior ha estado marcada por una enseñanza demasiado formal y estructuralista, no debemos olvidar que esta enseñanza fue también, a su vez, fruto de movimientos educativos de reforma, que tuvieron su especial relevancia para el caso de la probabilidad, puesto que esta materia no había sido incluida con anterioridad en los niveles no universitarios. Rico y Sierra (1997) indican que al comienzo de la década de los 70 se inicia en España una reestructuración del sistema educativo que tenía una estructura estable desde la Ley Moyano de 1857. La Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa, propiciada por Villar Palasí se promulgó el 4 de agosto de 1970. Esta ley estructuró el sistema educativo por niveles y modalidades, diferenciando la educación preescolar, educación general básica, bachillerato unificado y polivalente (BUP) y enseñanza universitaria.

El BUP, que es el nivel que nos ocupa en nuestro estudio, y en particular el primer curso de este nivel, no era obligatorio y comenzaba, generalmente a los 14 o 15 años de edad, en que algunos alumnos, particularmente las mujeres daban por finalizada su formación. Tenía también un carácter selectivo, ya que era preciso el nivel de graduado escolar para su acceso. El currículo escolar que desarrolló estas enseñanzas se publicó en el decreto de 23 de enero de 1975 (BOE 13/2/75). Posteriormente la orden ministerial de 22 de marzo (BOE 18/4/75) establece la programación de las diversas materias, con enunciados muy genéricos y poco especificados, lo que explicará la gran variabilidad que observaremos en la presentación de la probabilidad en los diversos libros de texto, durante el citado período.

Los cuestionarios oficiales de BUP publicados en el BOE del 18 de Abril de 1975, realizan las siguiente recomendaciones para el área de las ciencias matemáticas y de la naturaleza, que define los objetivos formativos de esta materia "*El área de las ciencias matemáticas y de la naturaleza tratará de capacitar al alumno para comprender los fenómenos naturales, científicos y técnicos de su entorno. Se resaltará la importancia del mecanismo lógico implícito en el razonamiento científico, habituando al alumno a los métodos deductivo e inductivo y a la experimentación*".

Para las matemáticas de primer curso se introduce el tema de probabilidad escuetamente en los siguientes términos: "*Combinatoria. Probabilidad*". La única referencia concreta a estos temas es la siguiente: "*Introducir la teoría combinatoria y noción de probabilidad para el caso de un universo finito*"; "*Continuar el tratamiento estadístico de los colectivos, iniciado en la educación general básica; En la combinatoria se estudiarán las variaciones y permutaciones ordinarias y con repetición y las combinaciones*". En consecuencia no se especifican contenidos detallados conceptuales ni procedimentales, ni se dan criterios concretos sobre la evaluación que indiquen los conocimientos específicos que se espera adquieran los alumnos respecto al tema.

No se hace nueva referencia en estos cuestionarios a la enseñanza de la probabilidad hasta llegar al tercer curso de bachillerato donde se indica "*Variable aleatoria. Distribución binomial y normal*", aclarando "*Adquirir el concepto de variable aleatoria que permite la* *utilización de las funciones de distribución en su aplicación a las ciencias biológicas, físicas y sociales. Se definirá, mediante ejemplos sencillos el concepto de función de distribución, valor medio y varianza de la misma. Se introducirá el concepto de variable aleatoria continua. Estos conceptos se aplicarán a las distribuciones binomial y normal, respectivamente, debiendo utilizarse las tablas correspondientes en la resolución de ejercicios de aplicación. Las distribuciones estadísticas bidimensionales se limitarán al caso de variables discretas".* Por contraste con los cuestionarios de primer curso el contenido está ahora mucho más especificado. Se hace referencia a conceptos específicos (variable aleatoria, función de distribución, media, varianza, distribuciones binomial y normal, variable aleatoria bidimensional discreta) y contenidos procedimentales (manejo de tablas, resolución de ejercicios de aplicación).

Estos contenidos de tercer curso sin duda implican unos conocimientos previos por parte de los alumnos (probabilidad, cálculo de probabilidades simples y compuestas, probabilidad condicionada, experimentos compuestos y probabilidades asociadas...). Creemos que es el análisis de estos prerequisitos lo que sin duda ha marcado la concretización de los contenidos del primer curso en el tema de la probabilidad. Por tanto, el contenido de este curso, aunque no explícitamente, ha estado marcado desde los documentos curriculares de una forma implícita por los contenidos asociados al tercer curso de bachillerato.

Merece la pena hacer notar que el currículo de matemáticas regido por estos cuestionarios oficiales tiene una orientación formalista y estructuralista que se plasma especialmente en los temas de álgebra y análisis. Aunque esta orientación tampoco se especifica explícitamente para el caso de la probabilidad, es natural que, sobre todo al principio del periodo, y por coherencia con el enfoque dado a otros temas, se tratase de este tipo de tratamiento al tema de probabilidad. Este tema, por otro lado, constituye un campo en el que pueden ejemplificarse fácilmente conceptos tales como conjunto y subconjunto, operaciones entre conjuntos, aplicación, producto cartesiano. Permite también mostrar la potencia de estructuras algebraicas como el álgebra de Boole para poder definir modelos matemáticos (probabilidad, probabilidad condicional, experimentos compuestos, variable aleatoria) aplicables directamente y sin necesidad de una matemática compleja a un sinnúmero de situaciones cotidianas que, de otra forma no serían matematizables.

Como indica Heitele (1975), el modelo de probabilidad permite reducir toda la complejidad del mundo que nos rodea al intervalo [0, 1], puesto que a cualquier tipo de suceso, le podemos asignar una probabilidad en este intervalo, incluyendo los modelos deterministas a los que asignamos los extremos del mismo. Una vez asignada esta probabilidad, todos estos sucesos, aparentemente diferentes entre sí, pueden ser comparables. Es la definición de un álgebra de sucesos precisamente lo que nos permite definir la probabilidad y la estructura axiomática asociada y su transformación, mediante la idea de función indicatriz, variable aleatoria y función de distribución en funciones matemáticas para las que podemos utilizar todo el aparato del álgebra y análisis. Todas estas consideraciones explican el enfoque, posteriormente criticado, axiomático y basado en la teoría de conjuntos que observaremos en los libros de texto analizados, en especial al principio del periodo.

Los cuestionarios de 1975 están formalmente vigentes hasta su sustitución definitiva el curso 1999-2000 por los nuevos programas derivados de la Ley General de Ordenación General del Sistema Educativo. Sin embargo, la implantación progresiva de esta ley, primero en fase experimental y luego cada vez más generalizada, ha marcado el cambio de orientación en los textos escolares a lo largo del período. Notaremos especialmente este cambio en la comparación que hacemos de los ejercicios y el lenguaje utilizado en dos de estos libros de texto que corresponden al principio y final del período que nos ocupa.

1.4.2. EL MOVIMIENTO DE REFORMA EN LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

Las nuevas tendencias en la enseñanza de la probabilidad en secundaria sustituyen el enfoque axiomático y estructuralista por una aproximación experimental y constructivista. Este cambio de punto de vista no ha sido brusco, sino que ha estado preparado por toda una corriente gradual en la que se ha notado la influencia de investigadores y educadores estadísticos dentro y fuera de nuestro país.

La introducción de la enseñanza de la probabilidad en los currículos españoles de 1975 no fue un hecho aislado en el panorama internacional. Casi simultáneamente a la publicación de estos documentos curriculares comenzó un movimiento de reforma en todo el mundo para introducir la probabilidad en el currículo primario y secundario, ya que hasta esa fecha eran pocos los países que incluían estos contenidos. La necesidad de la formación en estocástica se justificó por las razones siguientes (Rade, 1970):

- La estocástica es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos. La habilidad para comprender la incertidumbre que nos rodea y la información estadística en la prensa y medios de comunicación será tan necesaria en el futuro como los es hoy día saber leer y escribir.
- Un conocimiento básico de probabilidad es útil para la vida posterior, el trabajo y el tiempo libre. Cada vez con mayor frecuencia es precisa esta formación para la vida profesional y social.
- La formación sobre estocástica ayuda al desarrollo personal. Permite formar ciudadanos críticos que basen sus opiniones en la información disponible, usando razonamientos estocásticos adecuados.
- Ayuda a comprender los restantes temas del curriculum, tanto de la educación obligatoria como posterior, puesto que un gran número de ciencias y técnicas precisan conocimientos estocásticos.

Otro aspecto señalado por Fischbein (1975) para justificar la enseñanza de la probabilidad en las escuelas es el carácter exclusivamente determinista de los currículos, hasta aquella fecha, y la necesidad de mostrar al alumno una imagen más equilibrada de la realidad: *"En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico"* (p. 131).

Esta corriente de opinión quedó plasmada en proyectos y materiales curriculares con un enfoque innovador, entre los cuales, a continuación describimos algunos de los que han tenido una mayor repercusión en nuestro país.

El Schools Council Project on Statistical Education

Entre los proyectos relacionados con la introducción de ideas estocásticas en la enseñanza primaria y secundaria ha tenido una gran influencia el llevado a cabo en Inglaterra durante la década de los 70 por el School Council Project on Statistical Education, creado en 1975 en la Universidad de Sheffield, donde más tarde se comenzaría a editar la revista Teaching Statistics y se organizaría el primer congreso internacional sobre la enseñanza de la estadística (ICOTS I, 1982).

En este proyecto se generaron una gran cantidad de datos sobre la evaluación de los materiales producidos que han sido traducidos a otros idiomas, por ejemplo el catalán, y han influido en muchos de los posteriores diseños curriculares en el tema de estadística y probabilidad. La filosofía subyacente en este proyecto es la siguiente:

- La probabilidad se debe ligar con el mundo del niño, por lo que los conceptos y técnicas deben introducirse en un contexto práctico.
- No hay por qué desarrollar completamente una técnica la primera vez que se estudia. Se sigue la idea de la espiral curricular.
- No es deseable demostrar teóricamente todas las propiedades de un concepto, sino que es mejor reforzar la comprensión intuitiva del mismo.
- Se debe resaltar el carácter interdisciplinar de la probabilidad y estadística relacionándola con sus aplicaciones en el mundo biológico, físico, social y político que rodea al niño.
- Se recomienda el trabajo en grupos, la realización de experimentos y el método de ensayo y error para resolver los problemas.

Trabajos de Glayman y Varga

Estos autores han llevado a cabo un gran número de experimentos de enseñanza en su país, produciendo además materiales impresos y manipulativos para la enseñanza de la estocástica.

Glayman y Varga (1975) produjeron un material para la enseñanza de las probabilidades en la escuela, basado en tres etapas: Experimentación, recogida de datos y estimación de la probabilidad y razonamiento intuitivo. En la primera etapa se trata de familiarizar al niño con los fenómenos aleatorios, por medio de fichas, bolas en urnas, ruletas u otros experimentos. Después de repetir un número de veces la experiencia, se pide al niño que realice ciertas predicciones sobre las propiedades inherentes a los fenómenos aleatorios. Los resultados obtenidos se confrontan con las predicciones de los alumnos, de modo que éstos entren en un conflicto cognitivo, en caso de que los resultados choquen con sus intuiciones previas incorrectas.

Trabajo de Bruni y Silverman (1986)

Estos autores sugieren un proceso de enseñanza de la probabilidad basado en cuatro pasos, usando materiales manipulativos e integrándolo con otras ideas como fracciones. En cada experiencia se recomienda:

- Discutir con los alumnos sobre el problema planteado con el fin de progresivamente construir un modelo y adquirir un vocabulario adecuado.
- Transcribir los resultados de las experiencias a tablas, y gráficas para sintetizar los resultados obtenidos a partir de un sistema de registro, identificar posibles patrones y modelos en los datos, resumir la información y formular cuestiones o conjeturas relacionadas con la experiencia.
- Explorar actividades relacionadas para reforzar y extender los conceptos adquiridos.

1.4.3. LA REFORMA DE LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN ESPAÑA

El grupo Cero

En pleno auge del debate sobre la reforma de las enseñanzas medias, dentro del área de matemáticas, surge un grupo de profesores e investigadores en Valencia, "Grupo Cero", que han contribuido en gran medida, a la elaboración y desarrollo del actual currículo de secundaria del área de matemáticas. Fruto de todos sus trabajos e investigaciones, es la publicación del libro de Borras, E. y otros: De 12 a 16, un proyecto de curriculum de matemáticas, publicado en 1984, con la ayuda de la Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado del Ministerio de Educación, a través de la Conselleria d'Educació de la Generalitat Valenciana (Grupo Cero, 1984).

En él se recogen los principios filosóficos y metodológicos, que inspiran a los autores, así como sus propuestas para el tratamiento de los distintos tópicos en el área de matemáticas. Son tratados los siguientes temas: 1.Filosofía del proyecto. 2. Métodos de enseñanza. 3. Algoritmos y técnicas. 4. Resolución de problemas. 5. Estructuras conceptuales. 6. Investigaciones. 7. Programa. 8. Indice analítico. 9 Indice de autores. 10. Bibliografía. 11. Indice general. Dentro del tema 7, programa, dedica un apartado a la estadística y probabilidad, que divide en tres partes: La primera llamada núcleo básico, sobre la importancia y aplicaciones de la estadística y la probabilidad a la resolución de problemas de diverso tipo: Biológicos, económicos, geográficos, sociales, etc. La segunda, denominada extensiones, donde propone el tratamiento de los siguientes conceptos: Estabilidad de las frecuencias y medias muestrales, combinatoria, frecuencia y probabilidad condicionadas y situaciones dinámicas citando entre ellas, el juego de las cadenas de Markov, indiferencia, equilibrio, catástrofe y selección. La tercera parte sobre situaciones, donde propone, entre otras, ciertas actividades sobre la ruleta, el movimiento de un insecto, estabilidad de las frecuencias, ley de los grandes números, paseo del borracho, cajas de Bertrand y algunos juegos.

Como mencionamos anteriormente, este libro ha tenido una gran difusión entre los profesores de secundaria, al menos entre todos los profesores con deseo de innovación, y ha sido un documento de trabajo y debate en muchos congresos, jornadas y reuniones.

Trabajo de Godino y colaboradores (1987)

La mayor influencia en España sobre el cambio de contenido y orientación en el currículo de probabilidad no universitario se debe sin duda al libro de Godino, Batanero y Cañizares: Azar y Probabilidad, publicado en la colección Síntesis en 1987. Este libro ha sido reeditado varias veces y ha sido citado y utilizado como base en la mayor parte de los diseños y decretos curriculares de primaria y secundaria del MEC y comunidades autónomas. También se ha referenciado con amplitud en muchos de los trabajos posteriores, tanto de diseño curricular como de investigación en el área de la didáctica de la probabilidad. Sin duda ello se debe al gran esfuerzo de síntesis de materiales muy dispersos y desconocidos en nuestro país y al uso de los mismos para plantear una propuesta curricular progresiva e innovadora para las edades 8-16. Los citados autores recogieron todas las recomendaciones de los trabajos que acabamos de analizar, juntamente con la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986), que es una teoría general de aprendizaje de las matemáticas, aunque puede ser adaptada con éxito al campo de la probabilidad. Esta teoría toma elementos de las anteriores, aunque se apoya en el carácter específico del conocimiento matemático y en la importancia particular de las situaciones de enseñanza y la gestión de las mismas por parte del profesor.

Como consecuencia de la conceptualización del conocimiento matemático que hemos realizado anteriormente, no podemos reducir el hecho de "conocer" o "saber" matemáticas a identificar las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos. Es preciso usar el lenguaje y el sistema conceptual matemático en la resolución de problemas. La atención a los tres aspectos o dimensiones de las matemáticas (actividad, lenguaje, red conceptual) está en la base de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986), quien propone el diseño de situaciones didácticas de formulación, comunicación, validación e institucionalización como complementos imprescindibles de las situaciones de acción o investigación.

Partiendo de estos supuestos se elabora una metodología propia que recoge los rasgos fundamentales de las previamente descritas. Se usa también un análisis detallado del contenido matemático y del campo de aplicación del cálculo de probabilidades. Las catorce unidades didácticas abarcan desde la idea intuitiva de experimento aleatorio a los procesos estocásticos simples. Más concretamente el contenido abarcado es el siguiente, que nos ha servido de primera base en la identificación de los elementos de significado de nuestro estudio:

1. Nociones de azar y probabilidad: Experimento y suceso aleatorio; carácter impredecible del azar. Frecuencia absoluta y relativa de un suceso aleatorio. La frecuencia relativa varía entre 0 y 1. Estabilidad de las frecuencias relativas. Noción frecuencial de probabilidad. Recuento de resultados elementales posible en experimentos sencillos. Noción y representación conjuntista del espacio muestral.

2. Comparación y asignación de probabilidades: El lenguaje del azar: fenomenología del azar, suceso seguro, imposible, probable, improbable; la escala ordinal de probabilidad; probabilidad como grado de creencia; asignación subjetiva de probabilidades. Axiomas 1 y 2 de la probabilidad; comparación de frecuencia relativas; comparación de probabilidades. Sucesos simples equiprobables, postulado de indiferencia, asignación de probabilidades a sucesos elementales equiprobables. Sucesos simples no equiprobables: frecuencias relativas; asignación de probabilidades empíricas; sesgo en experimentación; probabilidades geométricas.

3. Cálculo de probabilidades: Sucesos compuestos; frecuencias relativas en sucesos compuestos. Unión de sucesos; representación conjuntista, intersección de sucesos; sucesos incompatibles. Axioma 3 de la probabilidad. Muestreo aleatorio de un elemento de una población finita conocida. Regla de Laplace. Juego equitativo; su conexión con la equiprobabilidad. Suceso contrario; representación; probabilidad del suceso contrario. Probabilidad de la unión de sucesos compatibles. Experimentos compuestos. Espacio muestral y producto; representación: tabla de doble entrada y diagramas en árbol; cálculo mediante la regla de Laplace.

4. Combinatoria: Muestreo con reemplazamiento; variaciones con repetición; formación, representación con diagramas en árbol, número de variaciones. Muestreo sin reemplazamiento. Muestras ordenadas; variaciones sin repetición, permutaciones, muestras no ordenadas, combinaciones.

5. Probabilidad condicional. Dependencia e independencia. Frecuencias relativas marginales y condicionadas en una tabla de doble entrada. Relaciones entre ellas. Probabilidad condicional. Sucesos independientes y dependientes. Probabilidad de la intersección de sucesos; caso de sucesos dependientes e independientes. Experimentos compuestos dependientes e independientes. Cálculo de probabilidad mediante la regla del producto. Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes.

6. Modelos y distribuciones de probabilidad. Variable aleatoria y distribución de probabilidad; representación mediante diagrama de barras; esperanza matemática, su conexión con los juegos equitativos; problemas sencillos de decisión. Modelo discreto uniforme. Modelo binomial. Distribución hipergeométrica. Distribución geométrica. Distribución normal. Proceso estocástico discreto.

1.4.4. TENDENCIAS ACTUALES: LA NUEVA REFORMA EDUCATIVA

Ahlgren y Garfield (1991) indican que las investigaciones educativas realizadas durante década 1980-90 mostraron que los estudiantes tienen una escasa comprensión de las ideas matemáticas o habilidad para aplicarlas en los problemas de la vida real, incluso cuando parezcan comprender y aplicar los algoritmos de cálculo. Ello explica la nueva reforma de los anteriores planes de estudio y el esfuerzo hacia unos contenidos más realistas y unas matemáticas más activas y ligadas con la vida real.

Los estándares del N.C.T.M.

Un documento curricular de interés para los profesores es el elaborado por la prestigiosa asociación de profesores de matemáticas de EE.UU. National Council of Teachers of Mathematics, conocido como "Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática", de los cuales existe traducción al castellano realizada por la Sociedad de Profesores de Matemáticas de Andalucía "Thales" (NCTM, 1989). Por primera vez en las matemáticas de los grados K-12 de los Estados Unidos hubo un contenido claramente especificado en el área de probabilidad y estadística, que pasaron a formar una parte importante de las matemáticas escolares. También en este diseño se da un gran énfasis a la formación en estocástica, incluyéndose los siguientes contenidos:

1. Para el nivel P-4 (Preescolar a 9 años) propone que el currículo incluya experiencias con análisis de datos y probabilidades para que los alumnos sean capaces de:

- Recoger, organizar y describir datos;
- construir, leer e interpretar datos presentados de manera organizada;
- formular y resolver problemas que impliquen la recogida y análisis de datos;
- explorar el concepto de casualidad.

2. En los niveles 5-8 (que corresponden a los dos últimos cursos de enseñanza primaria en España y los dos primeros de enseñanza secundaria obligatoria) en el "Estándar" sobre "probabilidad" de estos niveles indica que el currículo de matemáticas debe incluir la exploración de la probabilidad en el mundo real para que los estudiantes sean capaces de:

- Elaborar modelos de situaciones diseñando y llevando a cabo experimentos o simulaciones para estimar probabilidades;
- elaborar modelos de situaciones construyendo un espacio muestral para determinar probabilidades;
- apreciar las posibilidades de usar un modelo de probabilidad comparando los resultados experimentales con soluciones matemáticas esperadas;
- realizar predicciones que se basen en probabilidades experimentales o teóricas;
- llegar a reconocer el uso constante que se hace de la probabilidad en el mundo real.

3. Para los niveles 9-12 se recomienda el uso de la probabilidad experimental y la probabilidad teórica; simulaciones para representar y resolver problemas relacionados con la incertidumbre; comprender el concepto de variable aleatoria; crear, interpretar y aplicar propiedades de las distribuciones de probabilidad normal, binomial uniforme y chi cuadrado.

Propiciado por estas recomendaciones, se ha desarrollado bastante material curricular, con la filosofía recomendada, como el Quantitative Literacy Project promovido por la NCTM y la American Statistical Association.

Panorama internacional de la enseñanza de la probabilidad en los niveles no universitarios

No sólo es en Estados Unidos e Inglaterra donde se está renovando la enseñanza de la probabilidad en las escuelas. En el congreso ICME 8, Nemezts (1997) presentó los resultados de una amplia encuesta sobre la enseñanza de la probabilidad en los niveles no universitarios. Los resultados obtenidos fueron muy variados, dependiendo de los diferentes países. Entre otros factores que resultaron relevantes para la determinación del contenido y enfoque de la enseñanza de la probabilidad en secundaria fue la existencia de una evaluación nacional o regional de carácter general (similar a nuestra selectividad) al finalizar la enseñanza y el hecho de que en la misma se incluyeran preguntas sobre probabilidad. Asimismo influyó el hecho de que las calificaciones a lo largo de la secundaria complementaran o no esta nota para el ingreso en la universidad, y la educación estocástica recibida por los profesores.

La enseñanza de la probabilidad figuraba en la mayor parte de los países que respondieron la encuesta (21), aunque se mostró una gran variación en el contenido enseñado y el enfoque. En unos casos (Austria, Holanda) la probabilidad es el núcleo central de la estocástica, mientras que en otros en un tema opcional asociado al estudio de la inferencia (Inglaterra, Tailandia). La probabilidad se puede desarrollar en forma axiomática (Dinamarca, Ghana), ser esencialmente combinatoria (Estonia, Finlandia), restringirse a modelos de urnas y simulaciones (Australia), extenderse a las aplicaciones (Francia, Libia), enfatizar el razonamiento inferencial (Dinamarca), o desarrollarse a partir de proyectos y trabajo experimental (Inglaterra y España recientemente).

Entre los temas desarrollados con mayor frecuencia se encuentran los siguientes: Sucesos y operaciones, probabilidad, dependencia e independencia, probabilidad condicional, teorema de Bayes, variables aleatorias y algunas distribuciones sencillas, como la uniforme, binomial, normal y exponencial. Veremos que estos contenidos coinciden esencialmente con los que analizaremos en nuestro trabajo.

En la mayor parte de los casos, entre los que se cuenta España, la probabilidad se enseña dentro de las clases de matemáticas y más raramente también aparecía ligada a otras materias. Sólo en países como Italia y Hungría hay una tradición consolidada de introducción gradual del tema a lo largo de la enseñanza primaria y secundaria, siguiendo la idea de "curriculum en espiral", aunque en los nuevos diseños curriculares de España, Francia, Inglaterra y USA se propone este tipo de enseñanza. En el resto, la enseñanza se concentra actualmente en unos pocos cursos. Aproximadamente la mitad de los países enseñan estadística y probabilidad en forma unificada e interrelacionada, mientras que en el resto estos temas aparecen separados en el curriculum. El uso de lecciones magistrales y el libro de texto es casi generalizado, aunque también en algunos países se complementa con discusiones, trabajos prácticos de los alumnos, y otros recursos didácticos, tales como ordenadores, videos, o material manipulativo.

La evaluación en casi todos los casos se realiza con exámenes escritos tradicionales, complementados a veces con tests de opciones múltiples y proyectos realizados por los alumnos en forma individual o colectiva.

1.4.5. LA PROBABILIDAD EN LA LEY GENERAL DE ORDENACION DEL SISTEMA EDUCATIVO

Finalmente, y aunque los libros que analizaremos no corresponden a este nuevo período del sistema educativo, haremos un breve análisis del contenido de probabilidad en los diseños curriculares derivados de la LOGSE a nivel del territorio MEC y de nuestra Comunidad Autónoma. Por la autonomía dada a las diferentes comunidades el contenido sobre probabilidad varía bastante en otras comunidades autónomas, en especial en lo relativo a la edad de iniciación del tema, aunque no en la metodología recomendada para la enseñanza. Hemos creído de interés comentar aquí estos diseños curriculares para que el lector tenga una visión más completa de las influencias de la misma sobre los libros de texto publicados al final del periodo analizado, ya que la publicación de los decretos ha sido sólo la última fase de un proceso en el que han participado toda la comunidad educativa y que ha sido precedido por un amplio debate dentro de la misma.

Comenzaremos por comentar los decretos de educación primaria, puesto que ya en ellos se incluye la probabilidad, a diferencia del periodo anterior.

Decreto de Educación Primaria (Junta de Andalucía, BOJA, 20-6-92)

El decreto de educación primaria de la Junta de Andalucía hace una tímida mención al tratamiento de las situaciones aleatorias dentro del bloque de contenidos denominado *"Operaciones".* Posiblemente es la nuestra una de las comunidades autónomas en que más tímidamente de hace referencia a la introducción de la probabilidad en este periodo. Concretamente dice: *"En casos sencillos se pondrá a los alumnos en situaciones de exploración de la noción de casualidad, pretendiendo el descubrimiento del carácter aleatorio de algunas experiencias y la representación sencilla del grado de probabilidad de un suceso experimentado"* (p. 110).

Una interpretación muy ajustada de este párrafo implicaría simplemente el proporcionar a los niños oportunidades de realizar juegos o experimentos aleatorios y observar sus resultados. Por el contrario, una visión más amplia podría descubrir en esta frase la recomendación de una iniciación a la comparación y asignación de probabilidades simples y al estudio de las diferencias entre experimentos aleatorios y deterministas.

Decreto de enseñanzas mínimas para la educación Primaria (M.E.C., BOE, 26-6-91)

En el caso de este decreto se encuentra una mención algo más explícita. El objetivo general 6 para el área de matemáticas formulado por el M.E.C. dice:

"Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma". Este objetivo es desarrollado en el bloque de contenidos referido a organización de la información en los siguientes términos, donde se alude explícitamente a los experimentos aleatorios:

Conceptos:

1. La representación gráfica
2. Las tablas de datos.
3. Tipos de gráficos estadísticos: bloques de barras, diagramas lineales, etc.
4. Carácter aleatorio de algunas experiencias.

También dentro de los procedimientos, el objetivo 4 hace mención a la *"expresión sencilla del grado de probabilidad de un suceso experimentado por el alumno".*

Respecto a *criterios de evaluación* sobre los contenidos escolásticos el M.E.C. especifica el número 11, en el que se contempla claramente una introducción a la asignación de probabilidades en casos sencillos: *"Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado de juegos de azar sencillos, y comprobar dicho resultado".*

Real Decreto 1345/1991 de 6 de Septiembre, que establece el currículo de la educación Secundaria Obligatoria

La enseñanza de la probabilidad se contempla mucho más claramente en los decretos de secundaria del Ministerio de Educación y Ciencia, donde constituyen uno de los cinco bloques fundamentales del currículo. A continuación reproducimos el contenido de este bloque.

Bloque 5. Tratamiento del azar

Conceptos

1. Fenómenos aleatorios y terminología para describirlos:

Regularidades en fenómenos y experimentos aleatorios.

Posibilidad de realización de un suceso.

2. Asignación de probabilidades a sucesos:

Frecuencia y probabilidad de un suceso.

Ley de Laplace.

3. Asignación de probabilidades en experimentos compuestos:

Experimentos dependientes e independientes.

Probabilidad condicionada.

Vemos en consecuencia que se contemplan todos los conceptos analizados en nuestro estudio que, por lo tanto, puede servir de guía para la elaboración de materiales curriculares en esta nueva etapa. El contenido solo se detalla en líneas generales, dejando bastante libertad para la concreción final del currículo. Analizamos a continuación los procedimientos incluidos:

Procedimientos
Utilización de distintos lenguajes

1. Utilización de vocabulario adecuado para describir y cuantificar.
2. Confección de tablas de frecuencias y gráficas para representar el comportamiento de fenómenos aleatorios.

Un primer bloque de procedimientos se refiere al lenguaje probabilístico. Estos contenidos enlazan directamente con nuestro análisis del vocabulario, notación y representaciones realizado en el capítulo 4.

Algoritmos y destrezas:

1. Obtención de números aleatorios con técnicas diversas, tales como sorteos, tabla, calculadora, etc.
2. Utilización de distintas técnicas de recuento para la asignación de probabilidades.
3. Utilización de informaciones diversas (frecuencias, simetrías, creencias, observaciones previas, etc. para asignar probabilidades a los sucesos.
4. Cálculo de probabilidades en casos sencillos con la Ley de Laplace.
5. Utilización de diversos procedimientos (recuento, diagramas de árbol, tablas de contingencia, etc.) para el cálculo de la probabilidad en sucesos compuestos.
6. Detección de los errores habituales en la interpretación del azar.

La lista de algoritmos y destrezas es muy detallada, incluyendo la realización de experimentos, así como el cálculo de probabilidades a partir de procedimientos combinatorios.

Estrategias generales

1. Reconocimiento de fenómenos aleatorios en la vida cotidiana y en el conocimiento científico.
2. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.
3. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentales en distintos contextos.
4. Planificación y realización de experiencias sencillas para estudiar el comportamiento de fenómenos de azar.

Tanto los procedimientos como las estrategias se relacionan directamente con el análisis de ejercicios y ejemplos realizados en el capítulo 3. Finalmente en los diseños curriculares se añaden las siguientes actitudes, cuyo análisis requeriría una observación directa del trabajo del profesor en el aula, y que no abordamos en nuestro estudio.

Actitudes
Referentes a la apreciación de las matemáticas:

1. Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas.
2. Disposición favorable a tener en cuenta las informaciones.

3. Curiosidad e interés por investigar fenómenos relacionados con el azar.
4. Valoración crítica de las informaciones probabilísticas en los medios de comunicación, rechazando los abusos y usos incorrectos de las mismas.
5. Cautela y sentido crítico ante las creencias populares sobre los fenómenos aleatorios.

Referentes a la organización y hábitos de trabajo:

1. Sensibilidad y precisión en la observación y diseño de experiencias relativas a fenómenos de azar.

Junta de Andalucía: Orden de 28 de Octubre de 1993 por la que se establecen criterios y orientaciones para la elaboración de proyectos curriculares de centro, secuenciación de contenidos, así como distribución horaria y de materias optativas en la educación secundaria obligatoria.

En los diseños curriculares de la Junta de Andalucía los temas de estadística y probabilidad aparecen ligados. A continuación reproducimos la parte de esos contenidos que se refiere directamente a la probabilidad:

Tratamiento de la Información Estadística y del Azar:

En la Introducción de este bloque se indica que se pretende que los alumnos incorporen a su desarrollo cognitivo elementos potentes para enunciar y poner en práctica estrategias en sencillas situaciones de juego y expresar predicciones razonables ante fenómenos aleatorios y tomar decisiones coherentes con esas predicciones. Más adelante se indica:

> *"El trabajo con probabilidades facilitará la adquisición de convicciones acerca de los axiomas de probabilidad. Se señala que el curriculum de matemáticas no debe solamente presentar un enfoque determinista de los fenómenos que se proponga a los alumnos para su estudio. La comprensión, interpretación y predicción de fenómenos aleatorios debe iniciarse en el primer ciclo mediante un análisis de términos usados frecuentemente en la vida ordinaria, matizando los distintos significados según los contextos y tratando de reconocer situaciones de incertidumbre."*

Situaciones de incertidumbre

Estas situaciones se definen en la forma siguiente, indicando también fuentes de situaciones problemáticas:

"*Las situaciones en las que no es posible conocer con toda certeza y de antemano el resultado se podrán extraer de:*

Los juegos de azar (imposibilidad de prever el ganador de una partida de parchís; imposibilidad de asegurar que, al lanzar un dado o una moneda, se obtendrá el resultado que una persona desea; ampliación a la interpretación de torneos -entre iguales- como juegos de azar).

La genética (incertidumbre en la predicción del sexo de un hijo, etc.)

Las elecciones locales."

Se prescriben dos condiciones para la elección de las situaciones: por una parte deben poder experimentarse o al menos simularse, por otra, su temática debe ser cercana al alumno. Para el segundo ciclo los contenidos planificados son los siguientes:

"- Situaciones de incertidumbre; frecuencias relativas.

- El manejo (experimentación o simulación) de muestras de tamaño creciente permite acercarse a la comprensión de la estabilización de las frecuencias relativas.

- Medida de la probabilidad: El estudio de la probabilidad permite establecer múltiples conexiones entre diferentes núcleos de esta área: concepto de fracción, fracciones equivalentes, relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes, etc.

- Sucesos: Reconocimiento y descripción en castellano oral o escrito excluyéndose explícitamente toda referencia al concepto de espacio muestral y al uso de notaciones procedentes de la teoría de conjuntos.

- Sucesos equiprobables: Entendidos como sucesos que son igualmente posibles antes de realizar una experiencia.

- Suceso seguro; suceso imposible. En el contexto de una situación de incertidumbre.

- Ley de Laplace: La existencia de un número, hacia el que tienden a estabilizarse las frecuencias relativas, permite conjeturar una medida de la probabilidad en el caso de sucesos equiprobables.

- Cálculo de probabilidades elementales: La práctica adquirida mediante simulaciones y asignación de probabilidades experimentalmente dará paso al cálculo de la probabilidad de sucesos. El cálculo de la probabilidad de un suceso puede requerir que se efectúen recuentos. Se utilizarán preferentemente los diagramas de árbol u otras herramientas que permitan representar los casos posibles y seleccionar, a partir de ellos, las que sean favorables.

- Sucesos independientes; sucesos dependientes: Su relación con los sucesos compuestos.

- Probabilidad de un suceso conocida la de su complementario."

Todos estos contenidos refuerzan y completan los correspondientes a primer ciclo y básicamente coinciden con los indicados en los diseños curriculares del MEC

1.5. DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA EMPLEADA

Siguiendo a Taylor y Bogdan (1986) consideramos que la metodología es el modo de enfocar los problemas de investigación y encontrar respuestas para los mismos. El enfoque de nuestra investigación es cualitativo, por lo que la metodología empleada se ha adaptado a este tipo de investigación. De acuerdo con Kirk y Miller (1986), creemos que el término cualitativo implica un compromiso con el trabajo de campo y no un compromiso con lo anumérico. La investigación cualitativa incluye técnicas diversas, como la inducción analítica, el análisis de contenido, la semiótica, las entrevistas, los estudios documentales y los tratamientos informáticos y estadísticos, herramientas que han sido combinadas en esta investigación.

Podemos considerar nuestro enfoque como global, descriptivo y teórico, apoyándose en las consideraciones de Eisenhart (1988). En términos de Goetz y Lecompte (1988), se trataría de una cuasi-etnografía, ya que usamos técnicas etnográficas, como es el estudio de documentos.

Pero estos métodos están complementados con el análisis estadístico más propio de los métodos cuantitativos.

También podemos describirla como interpretativa en el sentido de Erikson (1989), quien indica que este término evita la connotación no cuantitativa y recoge el interés por el significado de las actividades humanas y por la interpretación de ellas que hace el investigador. Específicamente se trata de un estudio documental, encuadrado por Van Dalen y Meyer (1984) en la investigación de tipo descriptivo.

Estos autores indican que el estudio documental de los libros de texto puede determinar el contenido de la enseñanza, el tiempo que se dedica a bs diversos aspectos y los temas que forman parte de una materia. Estudiando los libros de texto es posible enumerar los conceptos que se incluyen, determinar la frecuencia con que aparecen errores y distorsiones, el espacio asignado a ciertos temas y el nivel del vocabulario. Puede también ayudar a describir las costumbres y requerimientos específicos de la escuela y la sociedad, describir tendencias existentes, identificar problemas, poner de manifiesto las diferencias existentes en las prácticas vigentes en las distintas escuelas y evaluar la relación entre la enseñanza que reciben los alumnos y los objetivos pretendidos.

Según las diferentes clasificaciones recogidas en Bisquerra (1989), el proceso de investigación seguido es inductivo, pues del examen de casos particulares obtenemos conclusiones de tipo general y el objetivo es descubrir generalizaciones y teorías a partir de observaciones sistemáticas de la realidad. Es una investigación aplicada ya que está encaminada a la resolución de problemas prácticos de la enseñanza de la probabilidad, como es la de obtener instrumentos de evaluación de los libros de texto y criterios para el desarrollo curricular. Se orienta al establecimiento de conclusiones, y es descriptiva, puesto que no se manipula ninguna variable, sino que se limita a observar y describir los fenómenos. En esta sección recogemos las principales características de esta metodología.

Fases del estudio

Como en toda investigación cualitativa, el proceso seguido no ha sido lineal, sino que se han seguido diferentes etapas de diseño, toma de datos, análisis, reformulación de las preguntas e hipótesis de investigación y reformulación del diseño. Sin embargo, podemos diferenciar dos grandes etapas en el desarrollo del trabajo de campo, una vez completado el primer trabajo de revisión bibliográfica del tema objeto de estudio.

En una primera fase se llevó a cabo un estudio cualitativo del contenido teórico y actividades incluidas en los libros que constituyen la muestra para una parte de los conceptos probabilísticos que se incluyen en el estudio completo. Estos conceptos fueron los de experimento aleatorio, espacio muestral y suceso, frecuencia relativa y probabilidad. Los resultados constituyeron la Memoria de Tercer Ciclo (Ortiz, 1996) y han sido publicados y presentados en distintos congresos y revistas, nacionales e internacionales, en. Ortiz y cols. (1995, 1996), Ortiz y Serrano (1996) y Ortiz y cols. (1997).

Como consecuencia, se obtuvo una primera categorización de los elementos de significado intensionales y extensionales de los conceptos probabilísticos mencionados que han sido la base para la categorización definitiva y el método de análisis empleados en la tesis doctoral.

En una segunda fase se incluyeron los conceptos de experimentos compuestos, probabilidad condicional, independencia y variable aleatoria y sobre el conjunto de todos estos conceptos más los incluidos en la primera fase se re-elaboró y amplió el estudio de los elementos intensionales y extensionales. Para estos últimos, se analizaron también las variables de tarea y se llevó a cabo un estudio estadístico de su distribución sobre dos de los libros de texto. Finalmente se ha hecho un estudio y categorización de los elementos de significado representacionales de los conceptos probabilísticos elementales, analizando las diferencias existentes respecto a los mismos en dos libros de texto.

1.5.1. ENCUESTA A PROFESORES SOBRE EMPLEO DE LIBROS DE TEXTO

Para enmarcar la elección de la muestra de libros de texto y relativizar el análisis realizado al empleo real del libro de texto en el aula, hemos llevado a cabo una encuesta a una serie de profesores en formación y profesores en ejercicio. Nuestra finalidad fue recabar información complementaria sobre los libros de texto empleados por los profesores y el uso que de ellos se hace para la enseñanza, tanto en su vertiente teórica como práctica.

Los profesores en ejercicio que proporcionaron los datos ejercen su labor docente en distintos centros de secundaria de la ciudad de Melilla. En primer lugar elegimos algunos de los profesores por su amplia experiencia docente, y, posteriormente completamos la muestra con otros profesores más jóvenes, que se habían interesado por nuestros trabajos en el área de probabilidad, lo que permitió ampliar el número de centros encuestados. Los datos se recogieron mediante una entrevista personal con el profesor realizada por el investigador. En total colaboraron 17 profesores, licenciados en Matemáticas, a quienes previamente explicamos la finalidad de nuestro trabajo. Todos ellos, lo hicieron de forma desinteresada, mostrando gran interés por la investigación en curso.

Los futuros profesores que colaboraron en la recogida de datos eran alumnos de la Licenciatura de Técnicas y Ciencias Estadísticas de la Universidad de Granada, en el cuarto año de la licenciatura, que cursaban la asignatura de didáctica de la probabilidad y estadística. Hay que advertir que la asignatura es optativa, dentro de la licenciatura y que un 30 % de los alumnos del cuarto curso eligieron esta asignatura. Muchos de estos alumnos estaban cursando simultáneamente el Curso de Aptitud Pedagógica y, la mayor parte, contemplaban la enseñanza, bien de la estadística o de las matemáticas, como una posibilidad bastante deseable en su futura labor profesional. Su formación estadística era bastante completa, ya que todos ellos poseían el grado de Diplomado en Estadística. Completaron la encuesta en forma individual, como una actividad dentro de la asignatura y como punto de apoyo para un debate sobre la importancia relativa del libro de texto en la enseñanza y una actividad de análisis de los contenidos de estadística y probabilidad en los libros de texto de la LOGSE. La encuesta se completó en los últimos días del curso, por lo cual los alumnos tenían una formación básica en didáctica. En total participaron 24 futuros profesores, de los 28 que habían elegido la asignatura.

En la entrevista preguntamos a los profesores en ejercicio de qué editoriales elegían los libros de texto que recomiendan a sus alumnos. Los profesores citaron las siguientes editoriales: SM (9), Anaya (7), Vicens-Vives (5), Santillana y Bruño (3), Edelvives y Alhambra (1), siete de las once editoriales analizadas en nuestro trabajo. El resto de las editoriales no aparecen citadas. En el apartado de otros libros usados, aparece una vez, Didascalia, Teide y Editex todos ellos una vez y un profesor contesta en blanco. Como vemos las más citadas por los profesores son SM, Anaya, han sido incluidas en nuestra investigación.

A los profesores en formación les preguntamos qué libros de texto habían usado durante su período de estudios de secundaria. Las editoriales citadas por los futuros profesores fueron las siguientes, en orden de mayor frecuencia de cita S.M, Anaya, Edelvives, Vicens-Vives, Santillana, Akal, S.M. y Alhambra.

Observamos que todas las editoriales citadas por los futuros profesores forman parte de nuestro estudio. Incluyendo las citadas por los profesores en ejercicio, aparecen todas las utilizadas en nuestro estudio, salvo Magisterio y Everest. Estas dos editoriales habían sido citadas en la encuesta de Nevarro-Pelayo, por lo que en conjunto podemos considerar que de los resultados de ambas encuestas se puede justificar la elección de la muestra de libros de texto.

1.5.2. SELECCIÓN DE LA MUESTRA DE LIBROS DE TEXTO

La muestra de los libros de texto utilizada en nuestro estudio se tomó entre los publicados en el periodo 1975 - 1991 eligiéndose en forma intencional, entre manuales de amplia difusión. La encuesta realizada a los profesores ha servido también como control de la validez de elección de estos textos, ya que todos los libros incluidos en la muestra han sido citados bien por los profesores de nuestra encuesta o por los que formaron parte de la realizada por Navarro-Pelayo (1991).

Hay que señalar también que no pretendemos generalizar los resultados de nuestro análisis a otros libros de texto no incluidos en nuestra muestra. Sin embargo, hemos querido que, de alguna manera, se refleje en la muestra de textos seleccionada la evolución de los libros de texto en el período estudiado. Por ello, el procedimiento para seleccionar los manuales incluidos en nuestro estudio ha sido el siguiente:

Tabla 1.5.1. Lista de libros que formaba la muestra inicial

Boada, J.; Romero, R. (1975). Matemática. Bachillerato 1º. Teide, Barcelona.
Valdés, J.; Marsinyach, S. (1975). Matemáticas Bachillerato 1º Ed. Bruño, Madrid.
Anzola, M; Caruncho, J. (1975). Matemáticas.1º Bachillerato. Ed.Santillana, Madrid.
González, A., Jiménez, L. (1976). Matemática 1º BUP Ed., Madrid.
Pérez, J. M. (1977). Matemáticas BUP 1. Ed. Everest, León.
Etayo, J; Colera, J. (1978). Matemáticas 1º. Ed. Anaya, Salamanca.
Etayo, J; Colera, J. (1980). Matemáticas 1º. Ed. Anaya, Madrid.
Lazcano, I; Barolo, P. (1980). Matemáticas 1º BUP. Ed. Edelvives, Zaragoza.
Peña, J; Taniguchi, P: (1981). Matemáticas Bachillerato 1º. Ed. Magisterio Español, (Coslada) Madrid.
Villa, A.; Agusti, J. M. (1981). Matemáticas. Funciones.BUP/1º Curso. Ed.Vicens-Vives, Barcelona.
Caruncho, J.; Gutiérrez, M.; Gil, J. (1985). Matemáticas. BUP 1º. Ed. Santillana, Madrid.
Alvarez, F.; García, C.: (1986). Matemáticas. Factor - 1. Ed. Vicens-Vives, Barcelona.
Negro, A.; Pérez, S. (1986). Matemáticas, 1º BUP. Ed. Alhambra. Madrid, Reimpresión 1986.
López, V; Sánchez, J.L. (1986). Matemáticas 1 Bachillerato. Ed. SM, Madrid.
Compostela, B.; González, A. y otros. (1987). Matemáticas 1º BUP. Ed. AKAL, Madrid.
Hernández, F.; Lorenzo, F. (1987). Signo I-Matemáticas 1º Bachillerato. Ed. Bruño, Madrid.
Guzmán, M.; Colera, J.; Salvador, A. (1988). Matemáticas, Bachillerato 1º, Ed. Anaya, Madrid.
Gil, J.; Burgos, J. (1990). Matemáticas 1º BUP. Ed, Santillana, Madrid.
Alvarez, F.; García, C. (1990, 1ª Ed.). FACTOR- 1. BUP 1º. Ed. Vicens- Vives, Barcelona.
Vizmanos, J.R.; Anzola, M. (1991). Matemáticas. Algoritmo 1 BUP Ed. SM, Madrid.
Vizmanos, J.R.; Anzola, M; Primo, A. (1991): Funciones 1. Matemáticas 1º BUP. Ed. SM, Madrid.

Se ha usado un muestreo en dos etapas (Kish, 1972), en el que primero se selecciona una primera muestra y a partir de ella y con un nuevo proceso de selección se determina la definitiva que será objeto del estudio. En primer lugar fijamos un período temporal, que se concretó entre 1975 y 1991, para recoger el desarrollo del tema posterior al decreto publicado en el B.O.E. de 18-IV-75. En él se recogen los cuestionarios que han estado vigentes oficialmente hasta la puesta en marcha de la nueva reforma del curriculum, a partir de los diseños curriculares publicados por el M.E.C. (1989) y Junta de Andalucía (1989). Dicha reforma se está llevando a cabo gradualmente a partir de esas fechas.

Nos concentramos en el análisis de los libros de texto de primer curso de bachillerato, que es donde se iniciaba la enseñanza de la probabilidad en estos cuestionarios. La riqueza de conceptos probabilísticos incluidos en este curso nos proporcionaba material de análisis suficiente, sin tener que ampliar el estudio a cursos posteriores.

Para este período elaboramos una primera lista de libros de texto publicados por las editoriales de mayor difusión en Andalucía. La selección de estas editoriales se llevó a cabo contando con nuestra propia experiencia docente en bachillerato durante 15 años; el consejo de los compañeros de seminario en nuestro centro de trabajo, así como el de otros profesores con experiencia docente en bachillerato de las provincias de Jaén, Córdoba y Granada. Asimismo tuvimos en cuenta la lista de libros de texto incluidos en la investigación de Navarro-Pelayo (1991). De esta forma obtuvimos una primera colección de 21 manuales, incluidos en la tabla 1.5.1, de los cuales se seleccionó la muestra que ha sido finalmente analizada.

Ante la dificultad de hacer el análisis en todos los textos de esta primera muestra, decidimos seleccionar de ellos una sub-muestra intencional de once textos. En esta investigación usaremos el término "intencional" en el sentido de Azorín (1972): "*Es la persona que selecciona la muestra la que procura que ésta sea representativa; por consiguiente la representatividad depende de su intención u opinión y la evaluación de la representatividad es subjetiva*" (p. 4). Hemos considerado que este tipo de muestra es preferible al muestreo aleatorio para el fin perseguido en nuestra investigación.

Tabla 1.5.2. Muestra definitiva de libros de texto

[A]:Valdés, J.; Marsinyach, S. (1975). Matemáticas Bachillerato 1º Ed.Bruño, Madrid
[B]: Pérez, J. M. (1977). Matemáticas BUP 1. Ed. Everest, León.
[C]: Etayo, J; Colera, J. (1978). Matemáticas 1º. Ed. Anaya, Salamanca.
[D]: Lazcano, I; Barolo, P. (1980). Matemáticas 1º BUP. Ed. Edelvives, Zaragoza.
[E]: Peña, J; Taniguchi, P: (1981). Matemáticas Bachillerato 1º. Ed. Magisterio Español, (Coslada) Madrid.
[F]: Caruncho, J.; Gutiérrez, M.; Gil, J. (1985). Matemáticas. BUP 1º. Ed. Santillana, Madrid.
[G]: Negro, A.; Pérez, S. (1986). Matemáticas, 1º BUP. Ed. Alhambra, Madrid. Reimpresión 1986.
[H]: Compostela, B.; González, A. y otros. (1987). Matemáticas 1º BUP. Ed. AKAL, Madrid.
[I]: Guzmán, M.; Colera, J.; Salvador, A. (1988). Matemáticas, Bachillerato 1º, Ed. Anaya, Madrid.
[J]: Alvarez, F.; García, C. (1990, 1ª Ed.). FACTOR- 1. BUP 1º. Ed. Vicens – Vives, Barcelona.
[K]: Vizmanos, J.R.; Anzola, M; Primo, A. (1991): Funciones 1. Matemáticas 1º BUP. Ed. SM, Madrid.

Azorín señala que el muestreo intencional es preferible al aleatorio en los estudios exploratorios, cuando se quiere tener un mayor control de los procesos de selección de la muestra, y cuando se quiere incluir por sus características especiales cubiertos elementos de la población en estudio.

Pretendiendo una mayor representatividad de la muestra, se han escogido textos de diferentes años y editoriales. Finalmente, la muestra de libros abarca 11 años y 10 editoriales diferentes y se presenta en la tabla 1.2.2, donde cada uno aparece entre corchetes con una letra mayúscula que lo designa, y que utilizaremos en nuestro estudio para referirnos a ellos.

1.5.3. UNIDADES DE ANÁLISIS Y VARIABLES CONSIDERADAS

La investigación se sitúa en un paradigma inductivo exploratorio (Herman, 1990) que nos ha parecido el más adecuado para abordar un problema complejo, como la caracterización del contenido matemático en los libros de texto. Para describir adecuadamente la metodología seguida, debemos comenzar por clarificar el proceso seguido para obtener nuestros datos. Como indica Gil Flores (1994), el dato es inseparable del proceso que lo registra y del modo en que se comunica. No es la realidad que puede captar el investigador, sino las elaboraciones que hace de la misma. En este proceso intervienen la elaboración conceptual y el lenguaje en que se expresa la información, que es el resultado del modo en el que el investigador se acerca al problema e interacciona con el objeto de su estudio. En consecuencia, una vez elegidos los textos a analizar, describiremos el proceso seguido hasta llegar a los datos básicos.

Como en la mayor parte de las investigaciones sobre textos, hemos empleado el análisis de contenido, que empieza por definir las unidades de análisis y, a partir de ellas, las variables consideradas. *"Es un proceso complejo, seguramente el que más esfuerzo intelectual requiere de entre todas las técnicas de análisis de datos y es uno de los pocos campos de los comprendidos en las etapas finales del proceso de investigación en la que el investigador desempeña un papel individual y creativo"* Fox (1981, p. 704). Para Ghiglione y Matalón (1989) el análisis de contenido sirve para efectuar inferencias mediante la identificación sistemática y objetiva de las características especificas de un texto.

Fox (1981) indica que el análisis de contenido comienza por elegir la unidad de contenido a analizar. Luego se elaboran un conjunto de categorías, junto con un fundamento lógico que sirva para asignar las unidades a estas categorías. En los programas de investigación cualitativa, el análisis de datos implica un proceso en varias etapas en el que el fenómeno global es dividido en unidades, éstas son clasificadas en categorías y a continuación ensambladas y relacionadas para conseguir un todo coherente (Goetz y Lecompte, 1988).

La metodología para el análisis de datos cualitativo es más compleja, en el sentido de que se encuentra menos estandarizada. *"El análisis de datos cualitativos representa, en cierto modo, un problema para el investigador"* Gil Flores (1994, p. 39). Este autor cita como fuentes de estos problemas, la indefinición de los métodos de análisis, la importancia de la componente creativa, la pluralidad de enfoques y el escaso tratamiento del tema en la bibliografía de investigación. Nosotros hemos seguido las recomendaciones de este autor, así como de Miles y Huberman (1984), y Huberman y Miles (1994), dividiendo el proceso en tres etapas: la reducción de datos, la disposición de datos y la obtención y verificación de conclusiones. Este apartado se dedica a describir el proceso de reducción de datos. El resto del proceso se describe en el siguiente apartado.

La primera operación ha sido la separación de segmentos o unidades de análisis, en varios niveles. Esta segmentación de los datos en unidades relevantes y significativas es considerada como una de las prácticas más características del análisis de datos cualitativos. Las unidades de análisis primarias han sido los capítulos de los textos seleccionados dedicados al tema de probabilidad.

La división de las unidades primarias puede realizarse siguiendo diversos criterios, como espaciales o temporales. Sin embargo, es más frecuente hacer una división en función del tema abordado. Siguiendo este criterio, se fijaron, de acuerdo con los objetivos de la investigación, los siguientes contenidos a analizar:

a) Experimento aleatorio.
b) Suceso aleatorio; espacio muestral; tipos de sucesos y operaciones con sucesos.
c) Frecuencia relativa y sus propiedades.
d) Probabilidad en sus diversas acepciones; clásica, frecuencial, subjetiva y axiomática.
e) Cálculo con probabilidades.
f) Probabilidad condicional. Dependencia e independencia. Experimentos compuestos.
g) Variable aleatoria.

Para cada uno de estos contenidos se han identificado en cada uno de los textos unidades secundarias de análisis. Estas unidades han sido párrafos elegidos si cumplen algunos de los siguientes criterios: a) Contienen las definiciones explícitas de algunos de los conceptos descritos; b) contienen la descripción de algunas de sus propiedades; c) unidades que describen ejemplos o presentan ejercicios que requieren el uso implícito o explícito de los mismos; d) cuando se emplea lenguaje, símbolos o representaciones gráficas de los conceptos analizados.

El identificar estos tipos de unidades se debe a que, de acuerdo con nuestros supuestos teóricos los conceptos no se reducen a su definición, sino que incluye también las situaciones en las que se presenta y las representaciones que le son asociadas (Vergnaud, 1982; 1990).

Hemos elegido estos conceptos porque los consideramos fundamentales para determinar el significado que en estos textos se presenta del concepto de probabilidad. Por supuesto, se pueden tener en cuenta muchos otros aspectos conceptuales, como los indicados en Malara (1989) en su estudio de la presentación que se hace de la probabilidad y estadística en algunos textos italianos. El estudio de estas cuestiones se ha dejado para una segunda fase de nuestra investigación.

Además, en el análisis de los ejercicios, que se describe en el capítulo 3, hemos tenido en cuenta las siguientes variables adicionales:

V1: Tipo de actividad que se pide al alumno: Dentro de esta variable hemos considerado cuatro categorías: 1) Ejemplo introductorio; 2) ejemplo después de la definición; 3) ejercicio introductorio; 4) ejercicio después de la definición. y 5) ejercicio después de haber hecho un ejemplo similar.

V2: Concepto al que el ejercicio se refiere explícitamente o implícitamente, entre los citados anteriormente.

V3: *Tipología del ejercicio o ejemplo dentro de cada concepto.* Esta es la principal variable dentro de nuestro estudio, pues describe la actividad especifica que debe realizar el alumno para resolver el ejercicio o que se ejemplifica en el ejemplo. Esta tipología de situaciones se describirá con detalle, para cada uno de los conceptos, en las secciones 3.4 a 3.9 y permitirá describir los *elementos extensionales* de los conceptos probabilísticos elementales.

V4: *Tipos de espacio muestral.* Hemos considerado de interés analizar el tipo de espacio muestral del experimento aleatorio que interviene en las situaciones propuestas al alumno, diferenciando entre espacio muestral infinito, finito, con dos elementos equiprobables; finito, con más de dos elementos equiprobables, finito, con sucesos no equiprobables e impreciso.

V5: Posible asignación de probabilidades a los sucesos. Un punto importante es la asignación de probabilidades a los sucesos dentro de los experimentos que intervienen en la situación, porque ello está directamente relacionado con los distintos significados del término probabilidad descritos en la sección 2.5.

V6: Contexto del enunciado del ejercicio: Se refiere al campo de aplicación mostrado.

V7: Presentación de la información: Verbal, numérica o gráfica.

De la consideración de estas variables hemos obtenidos dos tipos de datos: Cualitativos y cuantitativos. Los datos cualitativos se refieren a la presencia o ausencia de un cierto elemento del significado en el texto analizado y al matiz específico con que el mismo se presenta.

Los datos cuantitativos se utilizan sólo en el análisis de ejercicios y se refieren a las distribuciones de frecuencias de las variables descritas anteriormente dentro de los ejercicios relacionados con los diversos conceptos probabilísticos en dos libros de texto.

1.5.5. LAS HIPÓTESIS DEL ESTUDIO

Una vez planteado un problema de investigación, los métodos para tratar de obtener respuestas al mismo dependerán de su naturaleza. Pero el trabajo científico no tiene lugar en el vacío. Se proyectan en él ideas determinadas que se interpretan con ayuda de teorías. Por tanto, vale la pena examinar las hipótesis y cómo han sido generadas a lo largo de la investigación.

Bunge (1985) denomina hipótesis factual a las proposiciones que se refieren a hechos no sujetos hasta el momento a experiencia y corregibles a la vista del nuevo conocimiento. Se contraponen a las proposiciones empíricas o datos en que cualquier hipótesis va más allá de la evidencia (datos) que trata de explicar. El centro de la actividad cognoscitiva de los seres humanos son las hipótesis. Los datos se acumulan para utilizarlos como evidencia en favor o en contra de las mismas y su misma recogida implica un núcleo hipotético subyacente. Otra característica es que las hipótesis no pueden quedar establecidas por la sola experiencia: los datos no pueden validar sino sólo refutar las hipótesis.

Bunge sugiere las siguientes condiciones de formulación de las hipótesis factuales: 1) Tienen que ser bien formadas (formalmente correctas) y significativas (no vacías semánticamente); 2) deben estar fundadas en alguna medida en el conocimiento previo o en caso de ser totalmente novedosas, ser compatibles con el cuerpo de conocimiento científico; 3) deben ser empíricamente contrastables mediante los procedimientos objetivos de la ciencia, es decir los datos empíricos controlados por técnicas y teorías científicas.

Siguiendo estos supuestos, nuestra investigación partió de una serie de hipótesis, en un principio definidas en forma difusa y que han ido configurándose y perfilándose a lo largo del trabajo; particularmente al finalizar la primera fase, que culminó con la Memoria de Tercer Ciclo. En dicho momento se inició una etapa de reflexión sobre lo aprendido en la primera fase del estudio y de diseño de la nueva etapa. A continuación describimos estas hipótesis, que no deben entenderse en el sentido de hipótesis estadísticas, sino como las expectativas iniciales sobre los resultados del trabajo. Estas hipótesis nos han servido también para estructurar el estudio y para la redacción de las conclusiones finales.

En primer lugar, los resultados de la Memoria de Tercer Ciclo apuntaron a la diversidad de elementos intensionales y extensionales de los conceptos analizados en la primera fase del estudio, así como a la interrelación entre muchos de ellos, lo que no sólo hizo difícil el análisis de los libros, sino que apuntaba a la dificultad de la preparación del texto escolar. Nuestra primera hipótesis hace referencia a que esta complejidad se presentaría en el resto de conceptos a analizar, así como en los elementos representacionales del significado, no analizados en la primera etapa.

H1: El significado de los conceptos probabilísticos elementales mostrado en los libros de texto tiene un carácter complejo, debido a la interrelación entre los diferentes conceptos, lo que hace difícil la secuenciación de su enseñanza.

Otro punto ya confirmado en la primera etapa es la variabilidad de los textos escolares, incluso en un mismo contenido, que esperábamos ver confirmada también en el estudio completo, así como en el análisis estadístico de los ejercicios. Además esta hipótesis venía fundada por los resultados de otros trabajos sobre libros de texto, como los de Malara, Navarro-Pelayo y Sánchez Cobo.

H2: Hay una gran variabilidad en el significado que, para los diferentes conceptos probabilísticos, presentan los libros de texto de un mismo nivel de enseñanza.

Estas dos primeras hipótesis tienen un carácter general. Además, también formulamos algunas hipótesis específicas respecto a contenidos particulares concretos, que se guiaron, tanto por nuestra experiencia docente, como por los resultados de la Memoria de Tercer Ciclo. Estas hipótesis, que son las siguientes, serán discutidas en el capítulo de conclusiones finales.

H3: Aunque las diversas concepciones de la probabilidad se presentan desde un punto de vista intensional, las actividades propuestas a los alumnos se orientan casi exclusivamente a la concepción laplaciana y formal de este concepto.
H4: La fenomenología de la probabilidad presentada al alumno en los textos está sesgada hacia el campo de los juegos de azar, sin mostrar la relevancia y aplicabilidad real del tema.
H5: Existen convenios implícitos en el vocabulario usado en la presentación del tema de probabilidad a los alumnos.
H6: La notación empleada en el trabajo con conceptos probabilísticos no siempre es consistente con la notación empleada por los alumnos en otras ramas de las matemáticas.
H7: En el tema de probabilidad se incluye una variedad de representaciones tabulares, gráficas, e icónicas cuya interpretación requiere con frecuencia de conocimientos no específicos del tema, por parte de los alumnos.

1.5.5. PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS DE DATOS

Una vez descritos los métodos de recogida de datos, variables y categorías e hipótesis, conviene resumir el procedimiento de análisis de datos. Entendemos como análisis el proceso que nos permite discriminar los componentes de la realidad en algún cierto sentido o nivel, describir las relaciones entre estos componentes y, de esta primera visión, obtener síntesis adecuadas a nuestro problema de investigación.

El proceso de análisis puede ser aplicado a objetos o fenómenos diversos, los cuales pueden ser analizados de más de una forma. El fin del análisis es lograr una mayor comprensión de la realidad analizada (Gil Flores, 1994). Es el conjunto de actividades tendentes a reducir los datos a unidades significativas y manejables, estructurar y presentar los datos y extraer conclusiones de ellos (Miles y Huberman, 1984); (Huberman y Miles, 1994).

En el análisis de los diversos conceptos probabilísticos que se describe en los capítulos 2, 3 y 4, se ha seguido un procedimiento cualitativo. Para cada uno de los contenidos analizados y unidades de análisis se ha procedido, en las siguientes fases:

1. Una lectura analítica de los textos, tratando de recoger todos los aspectos relacionados con el contenido analizado que estuviera presente en los mismos. Los párrafos significativos en relación con el contenido que se pretendía analizar fueron seleccionados en cada texto como unidades de análisis. Este paso es la identificación de elementos, que consiste en examinar los datos para encontrar en ellos determinados componentes temáticos que nos permitan clasificar en una u otra categoría de contenido (Gil Flores, 1994).
2. Clasificación de dichos párrafos significativos en función de las diversas propiedades matemáticas a las que se hacía referencia, en relación con un mismo contenido. Es decir, clasificación en función de los "elementos de significado" resaltados explícitamente o precisados implícitamente, cuando se tratase de un ejercicio propuesto al alumno.
3. La lista de "elementos de significado" usados en cada uno de los conceptos analizados ha sido elaborada mediante un doble proceso. Por un lado, el análisis conceptual previo, que ha permitido tener "a priori" unos posibles elementos de significado de cada concepto. Por otro, ha sido necesario trabajar inductivamente sobre los propios datos, dado que algunos de los elementos previstos no se han presentado en los textos. En algunos casos (escasos, en general) se han introducido también nuevos "elementos" que no tienen contrapartida en el significado matemático de los conceptos.
4. Comparación de los diversos textos clasificados en un mismo apartado para uno de estos "elementos de significado" y depuración de la clasificación.Aunque, en este nivel de análisis, no hemos llegado a codificar los datos, en realidad, hubiera sido posible, pues, con la identificación de estos "elementos de significado" hemos realizado una categorización. La categorización es una potente herramienta en el análisis de datos cualitativos, pues permite clasificar conceptualmente las unidades que corresponden a un mismo tópico. *"Una categoría soporta un significado o tipo de significado"* Gil Flores (1994, p. 47). El proceso de categorización conlleva una decisión que es cómo asociar cada unidad a una determinada categoría. En la elaboración de las categorías para hacer un análisis de contenido semántico el investigador determina primero el nivel más general al que desea trabajar y detalla los aspectos concretos de ese nivel.
5. Elaboración de unas tablas que recogiesen los "elementos de significado" incluidos en los diferentes textos en relación con cada contenido. Una disposición adecuada, permite extraer conclusiones. Los datos cualitativos aparecen en forma textual. Por ello se precisa una transformación y una ordenación para presentarlos en modo abarcable y operativo para la extracción de conclusiones. En nuestro caso hemos utilizado una serie de tablas, que por un lado, pueden considerarse como matrices de incidencia, puesto que permiten comprobar si en cada uno de los textos, se presenta o no una cierta característica. Por otro lado, siguen algunas pautas sugeridas por Miles y Huberman (1984) para la presentación de datos cualitativos, ya que en las celdas de estas matrices o tablas, se alberga en algunos casos

información cualitativa. Estas tablas se recogen en los diversos capítulos y sirven como instrumento de análisis y comparación posterior.

6. Análisis estadísticos de las variables de tarea de ejercicios y ejemplos.Un segundo nivel de análisis cuantitativo se ha llevado a cabo en el capítulo 3 en el que, para cada uno de los ejercicios y ejemplos incluidos en dos de los libros de texto, se ha realizado un estudio estadístico de sus variables. Para ello se ha procedido a una codificación de los valores de las diferentes variables en cada una de las actividades analizadas. Para cada uno de los conceptos probabilísticos, las distribuciones de estas variables en los dos libros de texto han sido comparadas mediante el contraste Chi cuadrado de homogeneidad de muestras. Previamente se han agrupado las categorías necesarias, en el caso de que fuese preciso para asegurar las condiciones de aplicación de este contraste estadístico.
7. Producción del informe que se presenta en las secciones posteriores. Una parte importante del trabajo ha sido la extracción de las conclusiones presentadas en este informe. Estas conclusiones no se lmitan a la presentación ordenada de los datos, sino que se producen mediante un proceso interpretativo guiado por el análisis epistemológico de los conceptos intervinientes y por los resultados de la investigación psicológica y educativa sobre el razonamiento estocástico y el aprendizaje.

Como indican Goezt y Lecompte (1988) el dato solo tiene significación dentro de un contexto y las conclusiones deben superar los límites de la mera descripción. También, siguiendo a Taylor y Bogdan (1986) hemos procurado relativizar nuestras conclusiones, respecto a la forma y el contexto en que fueron recogidos nuestros datos.

1.5.6. EVALUACIÓN DEL ESTUDIO

Fiabilidad y validez

Según Agar (1986) los resultados de la investigación cualitativa emergen de la relación entre las tradiciones del investigador, del grupo estudiado y de la audiencia a la que se dirige el estudio y por tanto es un proceso de mediación entre marcos de conocimiento. Esto lleva a la problemática de definir que entendemos por fiabilidad y validez en la investigación cualitativa. Kirk y Miller (1986) indican que estos dos conceptos pueden considerarse como los componentes que delimitan la objetividad del estudio. La fiabilidad indica hasta qué punto un procedimiento de investigación proporciona el mismo resultado cada vez que se empleen las mismas circunstancias; la validez lo que plantea es si el resultado ha proporcionado o no la respuesta correcta.

Para Goetz y Lecompte (1988) la fiabilidad da la medida de replicación del estudio. Es decir, indica si otro investigador usando el mismo método llegaría a obtener el mismo resultado. Al compararse con la investigación cuantitativa, la cualitativa parece resistirse a los intentos de replicación. El tipo de datos y los métodos pueden excluir la utilización de controles.

Al elaborar una categorización para el análisis de contenido es importante estimar la fiabilidad con que se puede utilizar en estudios posteriores. Metodológicamente, la fiabilidad en el análisis de contenido se estima calculando el porcentaje de veces que dos codificaciones independientes coinciden cuando codifican el mismo material. Fox (1981) indica que es suficiente una muestra de 100 unidades de datos para obtener una buena estimación de la fiabilidad del código, siempre que no haya habido sesgos en la selección de la misma.

En nuestro caso, un segundo codificador independiente revisó la codificación de todas las variables obtenidas en el análisis de los ejercicios, obteniéndose un porcentaje de acuerdo del 95%. Los casos de desacuerdo fueron revisados conjuntamente por los dos codificadores y un tercer investigador y, discutidos con detenimiento, se llegó a un consenso sobre la forma en que debieran codificarse.

Asimismo, las tablas resúmenes de datos presentadas en los capítulos 2 y 4 fueron revisadas dos veces por el autor de la tesis y posteriormente por los dos directores de la misma, para comprobar la ausencia o presencia en los libros de texto de determinados elementos de significado, procediéndose a la corrección de los escasos desacuerdos con la codificación original. Creemos que con este procedimiento puede asegurarse una alta fiabilidad al proceso de codificación de los datos a partir de las categorías definidas.

Respecto a la validez, Fox (1981) indica que el código debe tener una validez inmediata en el sentido de que los temas niveles y las categorías deben tener una relación directa con la finalidad para la que se han creado. Esto se observa claramente en nuestro caso al analizar los elementos de significado y variables utilizadas.

Hemos descrito en las diferentes secciones de los capítulos 2, 3 y 4 los motivos concretos que nos han llevado a la elección de estos elementos específicos de significados y las variables utilizadas en el capítulo 3. En consecuencia, podemos asegurar una validez de contenido de nuestro estudio respecto a estos elementos de significado (incluidos en los anexos) y variables.

Comparabilidad y traducibilidad

Por otro lado, y como se trata de una investigación cualitativa, tratamos de alcanzar la comparabilidad y traducibilidad (Goetz y Lecompte, 1988) en nuestro estudio. La comparabilidad exige que el investigador use una terminología y un marco analítico que le definan con todo detalle. Asimismo deben describirse con claridad las características de los objetos estudiados y de los constructos generados en la investigación para hacer posible la comparación de los resultados con los de otros estudios relacionados. Ello confiere una utilidad científica al estudio.

La traducibilidad consiste en el grado en que los marcos teóricos y las técnicas de investigación resultan comprensibles para investigadores de la misma disciplina o de otras relacionadas. Con estos dos conceptos, la responsabilidad de la generalización no está sólo en el investigador, sino también en el lector del informe resultante.

Significación

Un último parámetro que Gutiérrez (1991) considera para evaluar las investigaciones en educación matemática es el interés o significación. Un objetivo que debe plantearse cualquier investigación en didáctica de las matemáticas es tratar de aportar alguna mejora a la calidad de la formación matemática y por ello centrarse en algún elemento destacado del proceso de enseñanza o aprendizaje.

Creemos que el interés del libro de texto como elemento didáctico y su influencia en la enseñanza que reciben los alumnos han quedado suficientemente resaltado en la sección 1.3. En consecuencia, podemos también justificar la significación de nuestro estudio, sobre la base de las opiniones de los diferentes autores que se incluyeron en dicha sección.

CAPÍTULO II
ELEMENTOS INTENSIONALES DEL SIGNIFICADO DE CONCEPTOS PROBABILÍSTICOS

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo analizamos las definiciones y propiedades asignadas a los conceptos probabilísticos elementales, que constituyen su significado intensional en la muestra de libros de texto que ha sido objeto de nuestro estudio, noción introducida en la sección 1.2.3. Los conceptos analizados han sido los siguientes: Experimento aleatorio; espacio muestral; sucesos, sus tipos y operaciones; frecuencia relativa; probabilidad en sus diferentes acepciones; probabilidad condicional, dependencia e independencia; experimento aleatorio y variable aleatoria. Estos conceptos han sido elegidos por su presencia generalizada en los libros analizados y porque su conjunto contribuye a la presentación de las ideas estocásticas consideradas fundamentales por Heitele (1975), quien opina que dichas ideas deben constituir una guía del curriculum estocástico desde la escuela primaria a la universidad.

Para cada uno de estos conceptos hemos analizado las definiciones y propiedades presentadas explícitamente al alumno, así como el uso implícito que se hace de estas definiciones y propiedades de los conceptos, en los libros. Como consecuencia del estudio deducimos una serie de características esenciales que contribuyen a delimitar el significado intensional de los conceptos y que pueden analizarse independientemente unas de otras. Denominamos a estas características "elementos intensionales del significado del concepto", puesto que pensamos que cada una de estas características aporta un matiz esencial que contribuye a la identificación del concepto o a su diferenciación de otros relacionados. Estos elementos son ejemplificados mediante citas de párrafos significativos de los libros de texto, analizando también las variantes observadas en los mismos. Finalmente, se incluyen unas tablas resumen que permiten mostrar esta variabilidad.

Creemos que nuestro análisis muestra el carácter sistémico de los objetos matemáticos, cuya comprensión por parte del alumno deberá ser gradual, a partir de la adquisición progresiva de estos diferentes elementos del significado. Para el caso particular de los conceptos probabilísticos elementales, la lista de elementos de significado identificada, que se incluye en el anexo III, puede ser utilizada en el análisis de otros libros de texto, en el diseño y evaluación de unidades didácticas destinadas a la enseñanza de la probabilidad en el nivel de secundaria y en la construcción de instrumentos de evaluación de los conocimientos de los alumnos sobre conceptos probabilísticos elementales.

2.2. EXPERIMENTO ALEATORIO

El primer concepto que hemos analizado en nuestro estudio, es el de experimento aleatorio, que, actualmente, se toma como punto de partida en el estudio de la probabilidad. Por ejemplo, en el diseño curricular del Ministerio de Educación y Cultura para la enseñanza secundaria obligatoria, en el bloque 5, denominado *"Tratamiento del azar"* se incluye como concepto a presentar a los alumnos: *"Fenómenos aleatorios y terminología para describirlos"*. Dentro de los procedimientos, se sugiere la *"utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar"* y a la *"confección de tablas de frecuencias y gráficas para representar el comportamiento de fenómenos aleatorios"*.

Entre los algoritmos y destrezas a desarrollar se incluyen la *"obtención de números aleatorios con diversas técnicas, tales como sorteos, tablas, calculadoras"* y la *"detección de los errores habituales en la interpretación del azar"*. Como estrategias generales previstas encontramos el *"reconocimiento de fenómenos aleatorios en la vida cotidiana y en el conocimiento científico"*, la *"formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos"* y la *"planificación y realización de experiencias sencillas para estudiar el comportamiento de fenómenos de azar"*. El currículo del MEC no es una excepción, ya que parecidos términos o expresiones encontramos en los diseños curriculares de las comunidades autónomas y en otros países, como en el NCTM (1989).

Batanero, Serrano y Green (1998) indican que el concepto de aleatoriedad es, por tanto, el punto básico en el estudio de la probabilidad y por ello, es necesaria una correcta comprensión por parte del alumno de esta idea, si queremos que progrese en el terreno del cálculo de probabilidades. Las expresiones "experimento aleatorio", "suceso aleatorio", incluso los sustantivos el "azar", lo "aleatorio", aparecen con frecuencia, tanto en el lenguaje cotidiano, como en los manuales escolares. Pero su significado, al referirse a una entidad abstracta, no queda unívoca y nítidamente determinado, lo cual creará dificultades de comprensión en los estudiantes.

Sorprendentemente, este concepto no tiene una definición sencilla. Las ideas de incertidumbre y aleatoriedad han preocupado a la humanidad desde la antigüedad, puesto que nos enfrentamos a ellos en cada momento de nuestra vida física y social (Rao, 1989). Desde Aristóteles, los filósofos han reconocido el papel del azar en la vida, atribuyéndole lo que queda fuera del alcance de nuestra comprensión. Sin embargo, hasta mucho más tarde no se reconoció la posibilidad de estudiar el azar y cuantificar la incertidumbre asociada a las situaciones aleatorias. La importancia de esta cuantificación se comprende al pensar que toda la actividad humana se basa en la predicción y que no podemos conocer las implicaciones de nuestras decisiones, a menos que podamos especificar en forma significativa la incertidumbre asociada a la misma.

Según Zabell (l992) el concepto de aleatoriedad está lleno de paradojas, y estrictamente hablando, la verdadera aleatoriedad pudiera incluso no existir. Estas paradojas no son de tipo técnico. Los problemas que la axiomatización de Kolmogorov no ha resuelto se refieren a la naturaleza de la probabilidad y a sus aplicaciones. Como indica Matalón (1979), *"de modo más o menos explícito, todos los teóricos admiten que el cálculo de probabilidades formaliza algo que, en cierto sentido "existe" en todas partes; las divergencias se refieren a la naturaleza de ese "algo", el cual estaría representado a través de la probabilidad del matemático"* (p. 121).

Batanero y Serrano (1995, 1997) señalan que el análisis epistemológico del concepto, así como la investigación psicológica han mostrado que el significado de la aleatoriedad no es sencillo para los alumnos. Hay una contradicción fundamental que se muestra en la investigación sobre secuencias y procesos aleatorios y que se relaciona con los problemas psicológicos asociados al concepto. Es la contradicción presente en el significado de la aleatoriedad como *"cualquier resultado podría ocurrir"*. Como indica Rao (1989) al igual que en el concepto hindú de la divinidad, la aleatoriedad es la falta absoluta de patrón y, al mismo tiempo, contiene en ella todos los patrones posibles. Desde un punto de vista matemático, esto se ejemplifica en el estudio de las secuencias de Bernoulli (Serrano y cols., 1991), y los modelos matemáticos derivados de las mismas.

Subjetivamente, sin embargo, muchas personas creen que solo los *"resultados desordenados"* son ejemplos apropiados de la aleatoriedad (Hawkins y cols., 1992). Estos sesgos en la percepción subjetiva de la aleatoriedad se muestran en las tesis de Toohey (1995) y Serrano (1996), quienes encuentran que los alumnos comprenden bien las tendencias en las secuencias de resultados aleatorios, pero no perciben la variabilidad intrínseca de los mismos, o al menos la subestiman. Por ello mismo, una adecuada presentación del concepto en los libros de texto es importante para hacer progresar al alumno en la comprensión de este concepto.

Para Zabell (1992), la aleatoriedad contiene ideas distintas y, a veces, conflictivas, que se refieren al proceso de generación (de una sucesión aleatoria o de los resultados aleatorios), a cada resultado aislado y al patrón obtenido en una serie de resultados de dichos procesos. El proceso de generación es lo que conocemos como *experimento aleatorio*; los posibles resultados de este proceso son los *sucesos aleatorios* y la sucesión obtenida en una serie de ensayos particulares es lo que conocemos como *secuencia aleatoria*. Aunque pudiera parecer que estos aspectos van siempre ligados, esto no es siempre necesario. Puede haber secuencias que, aparentemente, parecen aleatorias, y que se utilizan como tales para fines prácticos, como la extracción de muestras o la asignación de sujetos a los experimentos, pero que han sido producidas por un proceso completamente determinista. Podemos ver un ejemplo de ello al estudiar las cifras decimales del número π. Aunque el patrón que sigue esta secuencia parezca aleatorio, el proceso que la genera no lo es, porque siempre obtendremos la misma secuencia de cifras como resultado del "experimento". Un ejemplo más habitual son los números pseudoaleatorios producidos por las calculadoras y ordenadores usando algoritmos deterministas, pero que se toman como aleatorios en las aplicaciones de la estadística. Sorprendentemente la metodología de exploración de la incertidumbre implica el uso de estos números pseudoaleatorios que se supone muestran una incertidumbre máxima (dada por su entropía), en el sentido que el conocimiento de una parte de la sucesión no supone ventaja sobre la predicción del resto de la misma (Rao, 1989).

Por otro lado, incluso una secuencia aparentemente regular y determinista, como 100100100, puede obtenerse como resultado de un experimento aleatorio. Esta secuencia particular es tan probable como cualquier otra secuencia de ceros y unos obtenida en 9 ensayos en que los valores 1 y 0 sean equiprobables. Su probabilidad será 2^{-9}. Si repetimos el experimento un número mayor que 2^9 veces, cabe esperar que se obtenga alguna vez la sucesión dada por azar. Sin embargo, si preguntásemos a una persona no entrenada en estadística si esta secuencia es o no aleatoria, probablemente pensara que no lo es, puesto que subjetivamente la aleatoriedad se concibe como no ordenada.

El estudio de la aleatoriedad se incluye, en mayor o menor extensión, en todos los textos analizados. Sin embargo, en los libros de texto los tres aspectos diferentes señalados en la idea de aleatoriedad (proceso, resultado y secuencia) no siempre se analizan con la misma intensidad. También suelen variar las expresiones utilizadas para describir esta noción, siendo una de las más usuales la de *experiencias aleatorias* (Texto [J], p. 292). Estas expresiones serán discutidas posteriormente en el capítulo 4.

Las definiciones presentadas sobre el experimento aleatorio nos reflejan distintas propiedades atribuidas por los autores a estos experimentos. Para analizar estas definiciones así como los ejemplos y ejercicios que se presentan hemos identificado "a priori" elementos de significado en el concepto de aleatoriedad, basándonos en el trabajo de Batanero y Serrano (1995). Estos elementos intensionales del significado del concepto son los siguientes:

Aleatoriedad.

A1: Distinción entre proceso (experimento aleatorio), resultado (suceso) y secuencia de resultados (secuencia aleatoria).

A2: Contraposición entre determinismo (causalidad) y aleatoriedad.

A3: La aleatoriedad como modelo matemático.

Experimento aleatorio.

E1: Se conoce el conjunto de todos sus posibles resultados, pero no el que ocurrirá cada vez.

E2: Repetibilidad. Al menos teóricamente es posible repetir el experimento en unas condiciones fijadas de antemano e invariables.

En lo que sigue analizaremos la presentación de estos elementos de significado referidos al experimento aleatorio en los textos seleccionados. Los correspondientes a la noción de suceso aleatorio se analizan en la sección 2.3 y los correspondientes a las secuencias aleatorias en las secciones 2.4. No obstante, debido a la interrelación entre estos diversos conceptos, ocasionalmente habremos de referirnos a ellos en esta sección.

2.2.1. ALEATORIEDAD Y CAUSALIDAD

Desde el punto de vista informal del significado de la aleatoriedad, y siguiendo a Steinbring (1991), el "azar" es un patrón que explica aquellos efectos para los que no conocemos la causa. Se ha usado para tratar relaciones causa-efecto que parecen demasiado complejas para ser analizadas, o en las que no hay una relación determinista entre causa y efecto. Esta acepción de lo aleatorio se encuentra con frecuencia, en el lenguaje cotidiano, como podemos ver en el diccionario del uso del español de M. Moliner (1983), donde encontramos la siguiente definición: *“Azar: "la supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención humana ni divina"*.

Esta interpretación refleja también muchos aspectos filosóficos, epistemológicos, sociales y personales de la aleatoriedad y es una importante fuente de confrontación entre las probabilidades subjetivas y objetivas que, a veces, no pueden separarse, puesto que, como describe Hackings (1975), han estado ligadas desde el nacimiento mismo de la idea de probabilidad. Desde este punto de vista, la aleatoriedad presenta los siguientes matices:

- La aleatoriedad o "el azar" explicaría las situaciones que no se comprenden con los patrones causales deterministas tradicionales;
- "el azar" se concibe como la combinación de muchas causas diferentes y desigualmente distribuidas que llevan a un resultado inesperado; sería ésta la concepción que Piaget e Inhelder (1951) presentan en su estudio del desarrollo de la idea de aleatoriedad en los niños;
- "el azar" como explicativo de los sucesos cuyas causas no conocemos.

Poincaré (1936) indicó, sin embargo, que esta definición no es totalmente adecuada. Ciertos fenómenos cuyas leyes no conocemos no son considerados aleatorios, como ocurriría si se preguntase a un niño si mañana saldrá el sol. Aunque, de hecho, los niños no conocen cuáles son las causas que provocan la salida del sol cada mañana, difícilmente considerarían este suceso como aleatorio. Además, ciertas teorías físicas para las que se conocen sus leyes, como la teoría cinética de los gases, son explicadas precisamente mediante leyes aleatorias, que describen mejor el fenómeno que las leyes deterministas.

En este sentido, aleatoriedad no es ausencia de leyes, puesto que podemos construir leyes de tipo probabilístico. En consecuencia, entre los fenómenos de los cuales ignoramos sus leyes, hay que diferenciar los aleatorios, sobre los cuales el cálculo de probabilidades nos proporciona una cierta información y los que no lo son, sobre los cuales no hay esta posibilidad de predicción hasta que hayamos encontrado las leyes que los rigen. Para los primeros, incluso el día que encontremos sus reglas, el cálculo de probabilidades podrá aplicarse. Un ejemplo típico lo tenemos en la recogida de datos estadísticos, por ejemplo, de la distribución de edad de los habitantes de una población. Conocemos la edad de cada una de las personas, pero, independientemente de ello, el conjunto de edades sigue una distribución que podemos modelizar mediante la ley normal de probabilidades. Por ello, podemos aplicar el cálculo de probabilidades para obtener intervalos de confianza de muestras tomadas de este colectivo, para contrastar hipótesis sobre sus parámetros, etc.

Es precisamente la condición de existencia de una probabilidad a la cual tiende la frecuencia relativa la que define los fenómenos aleatorios para Kolmogorov (1973): "*Un suceso A, que bajo un sistema de condiciones S a veces ocurre y a veces no, se denomina aleatorio con respecto al sistema de condiciones. Esto suscita la cuestión: ¿Demuestra la casualidad del suceso A la ausencia de una ley que relacione el sistema de condiciones S con A?* (p. 269).

Y más adelante, después de hablar de leyes de tipo probabilístico: *"La hipótesis de la existencia de una constante p = P(A/S) (determinada objetivamente por la relación entre el sistema de condiciones S y el suceso A) tal que las frecuencias se aproximen más (hablando en términos generales) a p a medida que aumenta el número de ensayos, está justificada en la práctica para una amplia clase de sucesos. Los sucesos de este tipo se denominan normalmente aleatorios o estocásticos".*

Sin embargo, la persistencia de esta acepción de la aleatoriedad como contrapuesta a lo causado puede explicarse, según Gingerenzer y cols. (1989), por las diferentes acepciones de la idea de determinismo, desde el punto de vista metafísico, epistemológico, científico, metodológico y efectivo. El *determinismo metafísico*, compartido por eminentes probabilistas como Bernoulli y Laplace, se caracteriza por la hipótesis de, que puesto que hay un único pasado, sólo hay un único futuro. Esta postura es independiente de nuestra habilidad para predecir este futuro, aún cuando se suponga que todo está determinado, cada fenómeno obedece a unas determinadas causas, incluso desconocidas. El *determinismo epistemológico* supone que, al menos en principio, podemos predecir el futuro y, en este sentido, no es más que una explicación, entre otras posibles al determinismo metafísico, por lo que no es de extrañar que fuera defendido por los mismos partidarios que el anterior.

Esta falta de distinción efectiva entre el determinismo epistemológico y metafísico es insatisfactoria, pero puede mitigarse si nos fijamos en los medios potenciales de predicción: las leyes generales que gobiernan los fenómenos, las cuales suelen ser parte de teorías científicas. Estas teorías científicas se suelen llamar deterministas si especifican un conjunto de características básicas de sus objetos que determinan unívocamente las propiedades observadas, junto con las leyes necesarias que pueden dar lugar a esas características básicas en el futuro, a partir del conocimiento actual. *El determinismo científico* es una visión caracterizada por la creencia de que podemos dar una descripción completa del mundo en forma determinista, Planck y Einstein, entre otros, soportaron esta concepción.

La posición de *determinismo metodológico*, está caracterizada por la hipótesis que, dado que dos situaciones parezcan completamente idénticas pero lleven a diferentes resultados, deben existir variables explicativas, no suficientemente controladas que sean la causa de la diferencia. Para explicar el determinismo efectivo es preciso distinguir entre los diferentes niveles de las teorías científicas. Por ello, es concebible que admitamos una situación como determinista en un primer nivel, pero aleatoria en otro más localizado. Por ejemplo Darwin admitía una causalidad estricta en cada mutación, pero una aleatoriedad en la evolución global de las especies.

Esta diferencia de tipos de concepciones del determinismo explica que, a pesar de que hoy día la existencia de fenómeno aleatorios sea ampliamente reconocida, cada uno de nosotros pueda consciente o inconscientemente admitir alguna de las formas citadas de visiones deterministas sobre el mundo. En general, el avance científico ha hecho debilitar la concepción científica del determinismo, pero sólo indirectamente ha afectado a la posición metodológica. La notable persistencia del determinismo metafísico y epistemológico en una era probabilista sólo puede ser explicada por las tradiciones filosóficas respecto a nuestro concepto de conocimiento, en especial debido a la influencia de Aristóteles (Gingeenzer y cols., 1989).

Las consideraciones anteriores hacen razonable que un cierto porcentaje de textos analizados podrían dar a entender implícitamente un significado a los fenómenos aleatorios, como contrapuesto a lo causado o como tipo especial de causa. Por ejemplo, en [I], no define experimento aleatorio, sino suceso aleatorio, al que describe de la siguiente forma:

> *"Situaciones que dan lugar a los acontecimientos cuya realización depende del azar, se llaman sucesos aleatorios"* (Texto [I], p. 227).

En [D] encontramos la siguiente definición de suceso aleatorio, que podría inducir esta concepción:

> *"Estos fenómenos que no obedecen a leyes fijas y que más bien dependen del azar, reciben el nombre de sucesos estocásticos o aleatorios" (*Texto [D], *p. 70).*

En el texto [G] no se habla de experimentos aleatorios sino de sucesos deterministas y aleatorios definiendo estos últimos, a los que también denomina *estocásticos* o *de azar*, de la siguiente forma:

> "S*e trata de las experiencias cuyos resultados no son predecibles. Son los denominados sucesos aleatorios, también llamados "estocásticos" o "de azar"*(Texto [G], p. 191).

Como vemos, considera como característica de lo aleatorio que el resultado sea impredecible, y para que exista un suceso debe haber una experiencia. Así afirma:

"E*n efecto: un suceso se presenta siempre como resultado de una experiencia o prueba*" (Texto [G], p. 192).

Se trata en consecuencia de una variante terminológica, puesto que la definición se refiere implícitamente a los experimentos aleatorios.

2.2.2. ALEATORIEDAD E IMPREDECIBILIDAD

Una característica importante de los experimentos aleatorios es su impredecibilidad, es decir el hecho de que en un experimento particular no podemos conocer, con entera seguridad, cual será el resultado. Poincaré (1936) indica que los filósofos clásicos diferenciaban los fenómenos que parecían obedecer a leyes armónicas, establecidas de una vez para siempre, y aquellos que atribuían al azar, que no podían preverse porque se rebelaban ante toda ley. Esta propiedad es también señalada por Green (1989) como una de las fundamentales en la idea de la aleatoriedad, indicando que un suceso es aleatorio cuando no es seguro su ocurrencia ni tampoco imposible. Esta es una característica mencionada explícita o implícitamente en todos los textos analizados. Así en [C], encontramos como característica de los experimentos aleatorios:

"*La imposibilidad de predecir el resultado de cada observación*" (Texto [C], p. 65).

Otros textos que incluyen la mención a la impredecibilidad de los experimentos aleatorios son [J], [F], [D], [G], [E], [I] y [K].

En [A], después de una serie de ejemplos propuestos sobre distintos experimentos, define el experimento aleatorio de la siguiente forma:

" *Un experimento es aleatorio si es imposible predecir el resultado cada vez que se realiza*" (Texto [A], p. 41).

Definición similar es aportada por [H]. En [B], no menciona la palabra experimento aleatorio, pero se refiere a ella implícitamente, y menciona como característica su impredecibilidad ya que habla de que *"abundan las situaciones en que no es posible predecir si un determinado hecho se producirá o no"* (Texto [B], p. 27), proponiendo a continuación un par de ejemplos.

Agregamos aquí que la impredecibilidad de los experimentos aleatorios es una característica bien reconocida por los sujetos, como se ha puesto de manifiesto, tanto en investigaciones con niños pequeños (Green, 1982, 1989, 1991), como con alumnos de secundaria (Toohey, 1995; Serrano, 1996) y adultos (Falk, 1981).

2.2.3. REPETIBILIDAD DE LOS EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Como afirman Batanero y Serrano (1995), un experimento aleatorio sólo tiene interés para el cálculo de probabilidades si es posible, al menos imaginariamente, repetirlo en idénticas condiciones. Esta multiplicidad de posibles realizaciones del experimento (reales o imaginadas) da origen a la idea de población o colectivo que fue empleada por Von Mises para su definición de aleatoriedad. La repetibilidad es una característica asignada a los experimentos aleatorios en la mayor parte de los textos analizados.

Steinbring (1991) señala que el concepto de azar se refiere a dos dominios diferentes: formal e informal. Desde el punto de vista formal (Harten y Steinbring, 1983) el concepto se ha especializado, siendo la idea central de esta especialización la de sucesión aleatoria o sucesión de resultados de un mismo experimento realizado repetida e independientemente. En consecuencia, desde nuestro punto de vista, los textos que incluyen la referencia a la idea de repetibilidad enfatizan una de las dos componentes de la formalización de la idea de azar, mediante el concepto de experimento aleatorio. La segunda condición -la independencia- no aparece de modo explícito, salvo en raras ocasiones. Ello es sin duda debido a la dificultad que en sí mismo supone la idea de independencia (Truran y Truran, 1997), que suele ser definida posteriormente al hablar de la probabilidad condicional.

En [J], después de un ejemplo sobre el lanzamiento de un dado, encontramos las características que según los autores poseen las experiencias aleatorias:

> "*- Se conoce el conjunto de todos los posibles resultados, pero no el que se obtendrá al realizar cada experiencia.*
> *- Se puede repetir tantas veces como se quiera , en condiciones, prácticamente idénticas*" (Texto [J], p. 292).

En [H], una de las condiciones impuestas es la repetibilidad, así encontramos:

> "*En general, diremos que un experimento es aleatorio cuando:*
> *- Podemos repetirlo varias veces.*
> *- No podemos conocer su resultado antes de realizarlo*" (Texto [H], p. 188).

En la exigencia de repetibilidad del experimento se halla implícita la concepción frecuencial de probabilidad (Fine, 1973; Buxton, 1970). En realidad, la noción de repetibilidad estará implícita en todos los textos en que se estudie la noción de frecuencia relativa y su convergencia, por lo que en la sección 2.4 nos referiremos de nuevo a esta propiedad. En algunos experimentos aleatorios, como el resultado de una misión espacial, o la obtención del primer puesto en una competición olímpica, en los que las condiciones y los atletas participantes no permanecen fijos, la repetibilidad es sólo teórica.

En [K] se distingue entre experimentos deterministas y aleatorios. Para los experimentos aleatorios exige la repetibilidad. Al definirlos en contraposición a los experimentos deterministas, nos da a entender que no podemos conocer de antemano el resultado que vamos a obtener, es decir que son impredecibles. Así encontramos lo siguiente:

> "*En este experimento podemos conocer de antemano el resultado que vamos a obtener. A este tipo de experimentos, caracterizados porque al repetirlos en las mismas condiciones se obtiene el mismo resultado, se les llama experimentos deterministas.*
> *En contraposición con este tipo de experimentos tenemos los experimentos aleatorios, que se caracterizan porque al repetirlos bajo análogas condiciones podemos obtener distintos resultados*" (Texto [K], p. 397).

[C], se refiere implícitamente a la repetibilidad, pero como argumento para reforzar lo imprevisible, así encontramos:

> "*Aunque realizáramos el experimento intentando que las condiciones previas al lanzamiento fuesen idénticas (la misma posición del dado en el cubilete, agitar éste el mismo número de veces y con idéntica intensidad, soltarlo desde la misma altura y sobre la misma mesa...), el resultado de cada tirada sería imprevisible*" (Texto [C], p. 65).

En [F], después de una pequeña introducción nos aporta la siguiente definición de experimento aleatorio:

> *"Se dice que un experimento es aleatorio, estocástico o estadístico si pudiéndose repetir indefinidamente en análogas condiciones es imposible predecir el resultado, aún conociendo las condiciones iniciales"* (Texto [F], p. 222).

Concluye con algunos ejemplos de experimentos aleatorios y uno de experimento no aleatorio.

2.2.4. ALEATORIEDAD COMO MODELO MATEMÁTICO

Konold y cols. (1991) argumentan que, de hecho, es preferible ver el término *"aleatoriedad"* como una familia de conceptos, que incluye la idea de experimento, suceso, espacio muestral, probabilidad, etc. En este sentido la aleatoriedad es un modelo abstracto que podemos aplicar en muchas situaciones variadas. Como aplicación de un modelo ideal a un fenómeno dado, es preferible pensar en una orientación que tomamos hacia el fenómeno, más que en una cualidad que pertenezca al fenómeno. Aplicamos el modelo a la situación, pero no creemos que el modelo sea isomórfico a la situación, sino solo en ciertos aspectos. Cuándo el modelo aleatorio es más conveniente o adecuado a la situación que otros modelos matemáticos es un juicio que debemos emitir como parte del trabajo de modelización.

Por mucho tiempo se supuso que todos los sucesos naturales tenían un carácter inambiguo y predeterminado. El determinismo era una creencia incondicional en la potencia y omnipresencia de la lógica formal como instrumento de cognición del mundo. Implicaba, por tanto, la confianza en la posibilidad de descubrir, al menos en principio, dichas leyes. Pero hacia mediados de este siglo se ha llegado a la conclusión de que la búsqueda de leyes deterministas en la naturaleza está erizada de dificultades prácticas, lo que llevó a modelos alternativos basados en mecanismos aleatorios. Los principales desarrollos han tenido lugar en tres campos científicos: Quetelet usó el concepto de probabilidad para describir fenómenos sociales y biológicos. Mendel lo utilizó para formular su ley de la herencia y Boltzman dio una interpretación estadística a una de las proposiciones más fundamentales de la física teórica, que es el segundo principio de la termodinámica (Rao, 1989). A partir de ahí son pocos los campos científicos que no hayan adoptado la probabilidad y estadística como fuente de modelización de sus fenómenos.

Algunos textos analizan este aspecto de la aleatoriedad. En [E], considera que experimentos aleatorios son los que verifican las siguientes propiedades:

> *"a) No se puede predecir el resultado de un experimento aislado.*
> *b) Las frecuencias relativas de los distintos resultados tienden a estabilizarse, es decir, a adquirir un valor determinado, al aumentar el número de experiencias"* (Texto [E], p. 174).

Es en este texto donde se señala más claramente la idea de que un experimento es aleatorio, si es posible aplicarle las leyes de tipo estadístico, donde la visión de probabilidad que prevalece es la frecuencial. Aunque posteriormente en muchos libros de texto, se hará referencia a la propiedad de convergencia de las frecuencias relativas, en este caso, esta propiedad se exige, como condición de aleatoriedad del suceso.

Como resumen, presentamos en la tabla 2. 2.1 las características atribuidas en los textos a los experimentos y sucesos aleatorios. En ella indicamos "Si" cuando aparecen dichas características y blanco en caso contrario.

Tabla 2.2.1. Características atribuidas en los textos a los experimentos aleatorios

	Diferencia suceso y exp. Aleatorio	Imprevisilidad	Repetibilidad	Azar como causa	Estabilidad de las frecuencias
[A]	Si	Si			
[B]		Si			
[C]	Si	Si	Superficialmente		Si
[D]		Si		Si	Si
[E]	Si	Si			Si
[F]	Si	Si	Si		
[G]	Si	Si		Si	Si
[H]	Si	Si	Si		Superficialmente
[I]		Si		Si	Si
[J]	Si	Si	Si		
[K]	Si	Si	Si		Si

2.2.5. CONCLUSIONES SOBRE LA PRESENTACIÓN DEL EXPERIMENTO ALEATORIO

En el estudio de la presentación de la idea de experimento aleatorio hemos obtenido las siguientes conclusiones, que extienden las publicadas en Ortiz y cols.(1995, 1997) y Ortiz (1996):

En general no todos los libros diferencian claramente los diferentes aspectos subyacentes en la idea de aleatoriedad, que son, según Zabell (1992), el experimento aleatorio, los resultados y las secuencias de resultados de estos experimentos. Aunque todos los libros hacen mención explícita o implícita al experimento y suceso aleatorio, son pocos los que presentan ejemplos de secuencias aleatorias o piden a los alumnos que las obtengan mediante experimentación. Ello confirmaría la opinión de Hawkins y cols. (1992) de que, en general, en la enseñanza se dedica poco tiempo a la discusión de las diferencias fundamentales entre experimentos aleatorios y deterministas.

En general se usa el término aleatorio para designar acontecimientos impredecibles, lo cual sugiere una concepción correcta de los fenómenos aleatorios. Sin embargo, en algunos casos se añaden connotaciones no adecuadas. Por ejemplo, algunos textos podrían inducir una personificación del azar como supuesta causa de la que dependerían los fenómenos aleatorios o se podría inferir de ellos una concepción de aleatoriedad como contrapuesta a la existencia de leyes.

Finalmente señalamos la dependencia que se observa en los textos entre la definición de aleatoriedad y la concepción de probabilidad subyacente, que es casi siempre la frecuencial. Kyburg (1974) indica que esto es un problema común en la definición de aleatoriedad de un experimento o de un suceso y propone una interpretación epistemológica de la aleatoriedad, independiente de la noción de probabilidad, compuesta de cuatro términos.

Esta definición exige fijar un objeto que se supone es miembro aleatorio de una clase, fijar el conjunto del cual el objeto es un miembro aleatorio, elegir una propiedad con respecto a la cual el objeto es un miembro aleatorio de la clase dada. Por último, hay una referencia implícita a un cuerpo de conocimiento. Si un objeto es o no considerado como miembro aleatorio de una clase, depende de nuestro conocimiento sobre el mismo. Por ejemplo, si lanzo un dado y observo el resultado obtenido, sin que una segunda persona pueda verlo, el resultado del lanzamiento ya no es aleatorio para mí, aunque continúa siéndolo para la segunda persona.

Aunque en los textos analizados podemos encontrar las referencias implícitas al objeto y a la propiedad considerada aleatoria, las referencias a los otros dos términos son menos claras. Podríamos suponer que la referencia a la clase de la cual el objeto es miembro aleatorio está también implícita en el hecho de admitir la repetibilidad del experimento (la clase de referencia sería la sucesión aleatoria resultante del experimento). Sin embargo, en ningún caso se hace referencia a que la aleatoriedad depende de nuestro conocimiento sobre el experimento en los libros analizados.

Se asimila así la aleatoriedad a una "propiedad" intrínseca a la naturaleza de los experimentos considerados y no como un "modelo matemático" que el observador impone a estos experimentos. Ello de nuevo indica una concepción subyacente de probabilidad -concepción objetiva- frente a las posibles interpretaciones subjetivas de la idea de probabilidad.

2.3. ESPACIO MUESTRAL. SUCESOS, SUS TIPOS Y OPERACIONES

2.3.1. ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS

El segundo punto que hemos analizado es la presentación en los textos de la idea de suceso y espacio muestral, así como las operaciones con sucesos. El álgebra de sucesos es una de las ideas estocásticas fundamentales, según Heitele (1975), quien, siguiendo las ideas de Bruner, sostiene las tesis siguientes:

1) El principio decisivo de instrucción en un tema es la transmisión de las ideas fundamentales.
2) Las ideas fundamentales deben ser una guía necesaria desde los primeros años hasta la universidad, aunque deben adaptarse al nivel de desarrollo del alumno, en una "espiral curricular".
3) La transición a un nivel cognitivo superior se facilita si el tema ha sido preparado convenientemente en las etapas cognitivas anteriores.

Este autor propone una lista de ideas fundamentales basándose en sus concepciones pedagógicas, los resultados de la psicología del desarrollo del razonamiento probabilístico y el estudio epistemológico del campo de la probabilidad. Entre ellas se encuentra el álgebra de sucesos, idea debida a Kolmogorov de asignar un espacio muestral de sucesos observables a cada experimento aleatorio. Las operaciones con sucesos dotan al conjunto de sucesos de una estructura que es la que hace posible la posterior definición de probabilidad y construir una axiomática satisfactoria.

Puesto que la probabilidad es una función aditiva, es preciso que en el conjunto de sucesos, donde se define, exista una operación (la unión) que dé sentido a la aditividad. La operación de intersección permitirá definir probabilidades producto, así como dar sentido a la idea de suceso complementario. La estructura de álgebra de Boole, es sin embargo, una conceptualización compleja, por lo que algunos manuales que no llegan a la formalización axiomática de la probabilidad no la incluyen, pensamos que con buen juicio.

La construcción de un modelo probabilístico comienza habitualmente con la descripción de todos sus posibles resultados o espacio muestral. Históricamente, el concepto de espacio muestral estuvo ligado a la idea de equiprobabilidad, como era lógico, dado que los primeros desarrollos de la probabilidad se produjeron en relación con los juegos de azar. Sin embargo, incluso en este contexto, la correcta construcción del espacio muestral ha sido un obstáculo, como se muestra en las dificultades de encontrar el espacio muestral resultante al lanzar dos dados donde es frecuente considerar que el orden de resultados no tiene importancia. Es decir, se considera que sólo habría 21 resultados posibles, las parejas no ordenadas (1,1) (1,2),..., (6,6). Las investigaciones de Lecoutre y Durand (1988), Lecoutre y Cordier (1990) muestran la persistencia del sesgo de equiprobabilidad, consistente en considerar equiprobables los resultados "doble seis" y "un cinco y un seis" al lanzar dos dados, en estudiantes de todas las edades y formación. Esto no es de extrañar, puesto que D'Alembert tuvo este mismo error en trabajos publicados sobre probabilidad (Székely, 1986). En este problema no sólo es importante el enumerar todas las combinaciones de números, sino que hay que tomar el orden en cuenta. Fue necesario esperar el desarrollo del concepto de independencia para poder resolver el dilema planteado a D'Alembert y otros probabilistas.

El espacio muestral nos da un modelo del experimento ideal, en el sentido de que cada resultado posible queda completamente descrito por uno y sólo un *punto muestral.* (Feller, 1973). Estos resultados no precisan ser descritos con mucho detalle, sino sólo aquél que se requiera para los fines del experimento. Por ejemplo, cuando nos interesamos por el resultado de lanzar un dado, no nos preocupamos del lugar donde caiga el dado o su orientación, o el color del dado, sino del valor de la cara que queda hacia arriba. (Borovcnik y cols., 1991). Por su lado Hawkins y cols. (1992) indican que en la definición del experimento aleatorio hay dos aspectos claves que son: La clara formulación de las condiciones del experimento y la enumeración del espacio muestral correspondiente al mismo. Con escasas excepciones los libros de texto no se preocupan de la formulación del experimento. Puesto que la correcta enumeración depende de la formulación, si el alumno interpreta incorrectamente el experimento, llegará a un espacio muestral incorrecto.

Estos dos aspectos citados están ligados entre sí ya que el espacio muestral de un experimento dependerá de las condiciones supuestas para el mismo. En opinión de estos autores no se presta suficiente atención en la enseñanza a estos dos aspectos y ello puede ser el origen de desarrollo de un gran numero de concepciones incorrectas en los estudiantes.

Además del conjunto de todos los resultados (espacio muestral) y sus elementos (sucesos elementales), la teoría de la probabilidad, se ocupa de los *sucesos* asociados al experimento. En la teoría de las probabilidades sólo se consideran aquellos experimentos aleatorios en los cuales cualquier suceso representa una suma de todos los sucesos elementales que conducen a la aparición del suceso mencionado (Koroliuk, 1981). Un suceso es cualquier descripción verbal de los resultados del experimento y puede ocurrir o no como resultado del mismo.

Tiene sentido hablar de un suceso A solamente cuando se pueda decir claramente sí para cada resultado del experimento el suceso A ha ocurrido o no. La colección de todos los puntos muestrales que representan resultados en los que ha ocurrido A describe completamente el suceso. Recíprocamente, cualquier agregado dado que contenga uno o más puntos muestrales se puede llamar suceso. *"Diremos que un evento A consiste en (o contiene) algunos puntos determinados que representan resultados del experimento ideal en el cual A ocurre"* (Feller, 1973, p. 33).

Acostumbramos a identificar un suceso con un subconjunto del espacio muestral. Esto es correcto para los espacios muestrales finitos, pero en los espacios muestrales infinitos, por razones técnicas, es necesario restringir la definición de probabilidad a una cierta clase de subconjuntos o conjuntos medibles (Borovcnik y cols., 1991).

Aunque, para los efectos prácticos, cualquier subconjunto de interés pertenecerá a la clase dada, es difícil de comprender intuitivamente que hay subconjuntos del espacio muestral para los que no podemos calcular sus probabilidades. Las razones matemáticas se refieren a la imposibilidad de construir funciones de probabilidad que satisfagan los axiomas y que puedan definirse en tales subconjuntos. Estas razones no son específicas de la probabilidad sino del conjunto de los números reales. El problema se resolvió históricamente con la analogía entre probabilidades y medidas, puesto que los subconjuntos de Borel de los números reales proporcionan un campo adecuado para definir la probabilidad axiomática o estructural que abarca todos los casos particulares de probabilidad, incluso los definidos a partir de funciones de densidad.

Como consecuencia del análisis anterior, los elementos intensionales del significado, identificados "a priori", sobre estos dos conceptos son los siguientes:

Espacio muestral

E1: El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento.

E2: El espacio muestral es el conjunto de todos los sucesos elementales.

E3: El espacio muestral es el suceso seguro, que siempre se verifica.

E4: Su complementario es el suceso imposible.

Suceso

S1: Suceso es todo subconjunto del espacio muestral.

S2: Suceso es cada uno de los posibles resultados del experimento.

S3: Un suceso es toda colección de sucesos elementales.

S4: Impredecibilidad del suceso: No se puede predecir con seguridad su ocurrencia.

En esta sección hemos analizado los contenidos tratados con relación a este punto concreto. En primer lugar hemos revisado los textos para saber cuales de ellos incluyen la idea de espacio muestral o conjunto de sucesos elementales en un experimento aleatorio. Esta definición es el punto de partida para definir los sucesos aleatorios como subconjuntos del espacio muestral y para definir las operaciones entre sucesos.

En [I] no se define el espacio muestral. Sin embargo da la definición de suceso elemental de la siguiente forma:

> *"Cuando se realiza una experiencia aleatoria, pueden ocurrir varias posibilidades. A cada una de ellas la llamamos suceso elemental"* (Texto [I], p. 243).

Y la de sucesos cualesquiera se presenta de la siguiente manera:

> *"En una experiencia aleatoria se llama suceso a cualquier colección de sucesos elementales"* (Texto [I], p. 244).

Vemos que este texto evita explicitar la idea de conjunto de resultados posibles, aunque, implícitamente la está empleando. Asimismo, la definición que emplea de suceso es equivalente a la de subconjunto del espacio muestral.

En [B], no menciona el espacio muestral, ni hace referencia al álgebra de Boole de sucesos. Solamente el principio del apartado dedicado a la probabilidad menciona la palabra suceso de la siguiente forma:

> *"Este mayor o menor grado de seguridad es lo que se llama PROBABILIDAD del hecho (también se dice suceso) en cuestión"* (Texto [B], p. 27).

El resto de los textos incluye la idea de espacio muestral, con distinta terminología, como veremos en los ejemplos que presentamos a continuación. En [K] se define espacio muestral como *"El conjunto de todos los resultados posibles del experimento" y llama "elementos o puntos muestrales a cada uno de los resultados que constituyen el espacio muestral*" (p. 398).

Define "*suceso, suceso aleatorio o suceso estocástico de un experimento a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral E"* y, a continuación, *"espacio de sucesos de E al que designa por S, al conjunto formado por todos los sucesos de un experimento aleatorio"* (p. 399). Es uno de los pocos textos que utiliza la definición de espacio de sucesos. Habla de la verificación de un suceso y afirma:

> "*Se dice que se realiza el suceso A, cuando al efectuar una prueba del experimento aleatorio obtenemos como resultado uno de los puntos muestrales que componen el suceso A. También se dice que se verifica o se presenta el suceso A. En caso contrario diremos que no se realiza el suceso A*" (Texto [K], p. 399).

Observamos que en la definición incluye la expresión *"puntos muestrales"* que antes había definido como cada uno de los resultados del espacio muestral. En [C], no menciona la palabra espacio muestral. Para referirse a él lo hace llamándolo "*espacio de los comportamientos",* así encontramos:

> *"En general: En un experimento aleatorio pueden darse varios comportamientos individuales. Al conjunto formado por todos ellos se le llama espacio de los comportamientos. Lo designamos por E"* (Texto [C], p. 67).

Continúa definiendo los sucesos como subconjunto del espacio muestral:

> *"A cada subconjunto de E se le llama suceso"* (Texto [C], p. 68).

En [D], para referirse al espacio muestral lo denomina *"espacio total"* y lo define utilizando el ejemplo del lanzamiento de una moneda, de la siguiente forma:

> *"Si lanzamos al aire una moneda y anotamos el resultado, hemos realizado una experiencia estocástica y hemos obtenido un suceso elemental. El conjunto de todos los posibles sucesos elementales constituye el espacio total, que indicaremos con la letra E"* (Texto [D], p. 70).

Continúa en el apartado siguiente aportando la siguiente definición de suceso: *"Todo subconjunto A del espacio total se llama suceso"* (p. 71). En [J], define el espacio muestral como "*el conjunto de todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria" y suceso "como cualquier subconjunto del espacio muestral",* utilizando una notación conjuntista (p. 292). Definiciones similares son empleadas en [A], [E], [F] y [H].

En [G] define el espacio muestral como el conjunto de sucesos elementales a los cuales ha definido en el modo que reproducimos a continuación:

> "*Resulta así que, fijada una determinada experiencia, asociado a ella aparece un conjunto de sucesos posibles, excluyentes entre sí, cada uno de los cuales recibe el nombre de suceso elemental*" (Texto [G], p. 192).

Como resumen presentamos en la tabla 2.3.1 las definiciones empleadas en los textos para la idea del espacio muestral y suceso en los textos analizados

Tabla 2.3.1. Definiciones de espacio muestral y suceso en los textos analizados

No define	Define correctamente	Terminología
[B] [I]	[A]: Conjunto de todos los resultados [C]: Conjunto de todos los comportamientos. Suceso seguro [D]: Conjunto de sucesos elementales [F]: Conjunto de todos los resultados [G]: Suceso Seguro. Conjunto de sucesos elementales [H]: Conjunto de todos los resultados [J]: Conjunto de todos los resultados [K]: Subconjunto de sí mismo. Suceso seguro. Se realiza siempre. Conjunto de todos los resultados.	[C]: Espacio comportamientos. [D]: Espacio total. [E]: Suceso total.

En dicha tabla observamos que en la mayor parte de los textos se introducen esos conceptos de forma correcta, aunque se observan omisiones y variación en las terminologías. Así mismo observamos que no todos los libros presentan los mismos elementos de significado en la definición del espacio muestral.

2.3.2. TIPOS DE SUCESOS

Además de dar la definición de suceso, es habitual diferenciar los *sucesos simples* y los *compuestos*, con objeto de, posteriormente, introducir las reglas de cálculo de probabilidades de sucesos compuestos a partir de los sucesos simples.

Si queremos hablar de los experimentos de forma teórica y sin ambigüedad, hemos de convenir en los referente a los sucesos simples que representan los resultados concebibles, pues definen el experimento idealizado. En otras palabras, el término suceso simple (o indivisible) queda indefinido de la misma manera en que los términos punto y línea son indefinidos en geometría (Feller, 1973): "*De acuerdo con el uso general en matemáticas, los sucesos simples serán llamados puntos muestrales o puntos, por brevedad. Por definición, cualquier resultado simple de un experimento (idealizado) es representado por uno y sólo un punto muestral. El agregado de todos los puntos muestrales se llamará espacio muestral. Todos los sucesos relacionados con un experimento (idealizado) pueden describirse como agregados de puntos muestrales"* (Feller, 1973, p. 27).

Es también importante la idea de *suceso contrario* a uno dado A como el suceso que se verifica siempre y cuando no se verifique A, y que corresponde a la idea de conjunto complementario en la terminología conjuntista. Por ultimo, puesto que, la intersección de sucesos no siempre tiene sentido, se introduce la idea de *suceso imposible*, que en terminología conjuntista corresponderá al conjunto vacío.

Muchos estudiantes tienen la convicción de que los sucesos *incompatibles* deben ser *independientes.* Esta falacia puede tener su origen en la interpretación en lenguaje ordinario de la palabra "independencia" como "separado de". Esta interpretación se refuerza por las representaciones gráficas de los sucesos incompatibles que no tienen intersección común. Hawkins y cols. (1992) indican que la incompatibilidad de sucesos es un concepto tomado de la teoría de conjuntos, mientras que la idea de independencia es un concepto probabilístico, ya que depende de la medida de probabilidad definida sobre el espacio muestral.

A continuación analizamos la presencia de estas definiciones en los textos estudiados. Los elementos intensionales del significado del concepto identificados en el análisis "a priori" de estos conceptos son los siguientes:

Sucesos elementales
SE1: Son los sucesos formados por un solo resultado del experimento.
SE2: Son los subconjuntos unitarios del espacio muestral.

Sucesos compuestos
SC1: Son los formados por dos o más resultados del experimento aleatorio.
SC2: Es todo subconjunto del espacio muestral.

Suceso imposible
SI1: Es el que nunca se verifica.
SI2: Es el contrario al suceso seguro.
SI3 Todo subconjunto vacío del espacio muestral.

Suceso contrario de un suceso A
SCO1: Es el formado por todos los sucesos que no están en A.
SCO2: Subconjunto complementario de A.
SCO3: Se realiza cuando no se realiza A.

Sucesos incompatibles
SIN1: Es imposible que ocurran simultáneamente.
SIN2: Su intersección es vacía.
SIN3: Subconjuntos disjuntos del espacio muestral.

En [J], en los ejercicios propuestos define suceso elemental, contrario, incompatibles (Ejercicios 1, 2, y 3 p. 295). En [K], distingue entre sucesos elementales y sucesos compuestos aportando la siguiente definición:

> "*Llamamos sucesos elementales a los sucesos formados por un solo punto muestral, es decir, por un solo resultado del experimento aleatorio.*
> *Y llamamos sucesos compuestos a los sucesos formados por dos o más puntos muestrales, es decir, por dos o más resultados del experimento aleatorio* " (Texto [K], p. 399).

Define el suceso seguro utilizando la teoría de conjuntos, concretamente la propiedad reflexiva de la inclusión de conjuntos:

> "E*l espacio muestral E es subconjunto de sí mismo por la propiedad reflexiva de la inclusión, es decir, E C E, y, en consecuencia, E será un suceso; como es el suceso formado por todos los resultados posibles, se realiza siempre y se le llama suceso cierto o suceso seguro. Por tanto, el suceso cierto coincide con el espacio muestral E*" (Texto [K], p. 400).

A continuación define el suceso imposible como un suceso que no se realiza nunca.

Definiciones similares se muestran en [A] y [D]. En [G], utiliza una notación conjuntista, como vemos en el ejemplo siguiente a estas definiciones:

> "*Sea la experiencia aleatoria tirar un dado sobre la mesa y leer su cara superior en reposo. Los sucesos elementales que la experiencia puede producir son seis: Que salga y se lea el 1, el 2, el 3, el 4, el 5, el 6, de modo que el espacio muestral es el conjunto:* $H = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 \}$" (Texto [G], p. 192).

Denomina suceso compuesto (suceso, en general) *"a todo subconjunto del espacio muestral* $A \subset H$*"*, utilizando, como vemos, no sólo la idea de subconjunto sino el signo de inclusión. Define suceso seguro como *"el suceso representado por todo el espacio muestral"* ([G], p. 192). Así mismo define sucesos contrarios y mediante ejemplos el suceso imposible ([G], p. 193).

En [A], define además de suceso elemental, suceso, y suceso seguro. Los sucesos contrarios, los define como los formados por todos los sucesos elementales que no forman parte del suceso dado. El suceso imposible se introduce implícitamente y sucesos incompatibles, se presentan como aquellos cuya ocurrencia simultánea es imposible, de la siguiente forma:

> *"Sea E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio; y sea M un suceso de E; se llama suceso contrario de M al que está formado por todos los sucesos elementales que no son de M.*
> *Sea E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y A, B dos sucesos; si al realizar una prueba es imposible que se obtengan simultáneamente ambos, se dice que son sucesos incompatibles"* (Texto [A], p. 42).

Una definición similar es dada por [D]:

> "*El suceso contrario al suceso seguro E es un suceso imposible o suceso que nunca se verifica al realizar un experimento aleatorio. Al suceso imposible se le designa por* $\varnothing$*.*" (Texto [D], p. 42).

En [C], después de describir los diferentes tipos de sucesos en un ejemplo referido al lanzamiento de un dado, introduce en un mismo párrafo diferentes conceptos utilizando la terminología conjuntista:

> *"En general: En un experimento aleatorio pueden darse varios comportamientos individuales. Al conjunto formado por todos ellos se le llama espacio de los comportamientos. Lo designamos por E.*
> *A cada subconjunto de E se le llama suceso.*
> *A los subconjuntos unitarios, sucesos elementales.*
> *El* $\varnothing$ *se llama suceso imposible.*
> *El E, suceso seguro.*
> *La unión de sucesos es un suceso. También su intersección.*
> *Dos sucesos cuya intersección sea el* $\varnothing$*, se llaman disjuntos o incompatibles.*
> *Cada suceso S, tiene un suceso complementario* $S' = E - S$ " (Texto [C], p. 68).

En [D], además de definir suceso elemental y suceso, como hemos visto en el apartado anterior, define *suceso contrario* y *suceso seguro* con el apoyo de ejemplos:

> *"El subconjunto complementario de A se llama suceso contrario y lo indicaremos con el símbolo A'. Cuando un suceso se da siempre, se llama suceso seguro"* (Texto [D], p. 71).

Concluye con un comentario en el apartado 7.3 denominado *"Sucesos estocásticos y conjuntos"* en el que explica la *"Correspondencia total entre los sucesos estocásticos y los conceptos de la teoría de conjuntos"* (Texto [D], p. 72).

En [E], además de definir suceso elemental y suceso compuesto, como hemos visto en el apartado anterior, define suceso total (para referirse al espacio muestral), suceso vacío, sucesos compuestos, suceso contrario y cuando dos sucesos son incompatibles. Concluye comentando la relación entre los conceptos de la teoría de conjuntos y de la probabilidad, como sigue:

> *"Como con los sucesos se pueden realizar todas las operaciones posibles entre las partes de un conjunto, se puede hablar del álgebra de Boole de los sucesos de un experimento aleatorio"* (Texto [E], p. 175).

En [F], además de las definiciones de suceso elemental y suceso, introduce mediante un ejemplo los sucesos imposible y seguro (p. 223). Más adelante, dentro del apartado dedicado a la intersección de sucesos, da la definición de sucesos incompatibles como sucesos cuya intersección es el suceso imposible:

> *"Dos sucesos A y B cuya intersección es el suceso imposible se llaman sucesos incompatibles"* (Texto [F], p. 224).

Por último, dentro de un apartado denominado *"4. Algebra de Boole de los sucesos II",* define el suceso contrario:

> *"Se dice que el suceso A de P(E) es el suceso contrario de A si se realiza A siempre que no se realiza A"* (Texto [F], p. 225).

Definiciones similares se encuentran en [H]. Finalmente en [B] no se incluyen estos conceptos.

Conclusiones

Como resumen, en la tabla 2.3.2. presentamos los tipos de sucesos definidos en los libros de texto, o bien, introducidos en los ejemplos o ejercicios. Podemos ver en esta tabla como no todos los tipos dados de sucesos son definidos en todos los textos. A veces aparecen solo en los ejercicios e incluso se da el caso en que no se introduce referencia alguna a estos conceptos.

Hemos visto también en la exposición hecha que las definiciones empleadas no son homogéneas, empleándose diversos elementos de significado de los que hemos descrito.

Para el suceso seguro o espacio muestral las definiciones empleadas son: *"subconjunto de sí mismo"* [K] y [A],*"suceso formado por todos los resultados posibles"* [K]; *"suceso que se realiza siempre "* [K]; [D]; [C] y [H],*"coincide con el espacio muestral"* [K] y [G].

El suceso imposible es *"el contrario de E"* [D],[A] y [G] *" que nunca se verifica" [D], [A],[C], [H] y [K]* , *"se designa* $\varnothing$ *"* [D].

Los sucesos elementales se presentan como, *"sucesos formados por un solo punto muestral", "sucesos formados por un solo resultado del experimento aleatorio"* ([H], [K], [A] e [I] *"subconjuntos unitarios"* [C] y [G],*"aquellos que no se pueden descomponer más"* [E], *"consta de un solo elemento"* [J].

Los sucesos compuestos se definen como *"sucesos formados por dos o más puntos muestrales"* [K] y [C], "*sucesos formados por dos o más resultados del experimento aleatorio"* [K], *"todo subconjunto del espacio muestral"* [G], [D], [H], [J] y [K], *"aquel de la unión de dos o más sucesos elementales distintos"* [E], "*cualquier colección de sucesos elementales"* [I].

Tabla 2.3.2. Tipos de sucesos definidos en los libros analizados

	Elemental	Compuesto	Contrario	Incompatible	Seguro	Imposible
[A]	Definición	Definición	Definición	Definición	Definición	Definición
[B]						
[C]	Definición	Definición	Complementario	Definición	Definición	Definición
[D]	Definición	Definición	Definición	Definición	Definición	Definición
[E]	Definición	Definición	Definición	Definición	"Total "	Definición
[F]	Definición	Definición	Definición	Definición	Definición	Definición
[G]	Ejemplo	Definición	Definición	Definición	Definición	Ejemplo
[H]	Definición	Ejercicios	Ejercicios	Definición	Definición	Definición
[I]	Definición y ejemplos	Definición y ejemplos	Ejemplos		Ejemplo	Suceso raro poco frecuente Casi seguro
[J]	Ejercicios	Ejercicios	Ejercicios	Ejercicios	Ejercicios	Ejercicios
[K]	Definición	Definición	Definición	Definición	Definición	Definición

Suceso contrario es *"el formado por todos los sucesos elementales que no son de M"* [A], *"el complementario del suceso"* [C], [D] y [E], *"se realiza cuando no se realiza A"* [F], [G], [H] y [K], *"si son incompatibles y además su unión es el espacio muestral"* [J].

Dos sucesos son incompatibles si *"es imposible que se obtengan simultáneamente"* [A] y [D], *"su intersección es ∅ "* [C], [E], [F], [G], [H], [J] y [K]. De este modo diferentes textos enfatizan diferentes elementos de significado de estos conceptos.

Finalmente, hemos detectado los siguientes términos: *"Espacio de comportamientos"* [C], *"espacio total"* [D] y *"suceso total"* [E], que a veces se emplean mezclados. Esta falta de consistencia en la terminología que, a veces es incluso no muy correcta, en nuestra opinión podrían provocar futuros obstáculos en los alumnos que reciben una enseñanza basada en esta terminología.

2.3.3 OPERACIONES CON SUCESOS

La definición de las operaciones de unión e intersección de sucesos, es requerida en la definición axiomática de la probabilidad. Sin embargo, la estructura algebraica del Algebra de Boole de sucesos reviste su dificultad tal como manifiesta Orton (1990): *"Se puede aprender matemáticas sin tener una definición completamente estricta de ciertos conceptos"* (p. 48). Por ello podemos esperar que los libros presenten el cálculo de probabilidades sin necesidad de usar esta definición formal, sino empleando la definición de las operaciones de sucesos de un modo intuitivo. Una regla general en matemáticas es construir modelos complejos a partir de otros más simples. La regla de adición de probabilidades, posibilitada por la operación de unión entre sucesos es un primer paso en este sentido. Aunque las probabilidades pueden asignarse fácilmente en espacios muestrales sencillos, mediante el cociente entre casos favorables y posibles esta regla falla en casos más complejos, donde se precisa el axioma de la unión.

La intersección de sucesos permite la definición y cálculo de probabilidades en experimentos compuestos, previa la introducción de la idea de independencia.

A continuación analizamos su presencia en los libros de texto. Veremos que el significado presentado para estos conceptos ofrece diversos matices.

En primer lugar nos encontramos con algunos textos que incluyen todas o parte de las definiciones de las operaciones entre sucesos, haciendo a veces un estudio del paralelismo con las operaciones entre conjuntos y las correspondientes operaciones con sucesos.

En [K], trata la inclusión e igualdad de sucesos de manera muy parecida a la inclusión e igualdad de conjuntos, para pasar a estudiar lo que denomina el apartado B): Estructura de los sucesos, donde nos anuncia:

> *"Ya hemos visto que S es el conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio; vamos a definir en S las operaciones de unión e intersección y la complementación respecto de las cuales el conjunto S tiene estructura de Algebra de Boole"* (Texto [K], p. 401).

El significado dado a estas operaciones en este texto es análogo al utilizado en la enseñanza universitaria. Después de una breve descripción de las operaciones mencionadas y sus propiedades, concluye el apartado con la siguiente definición:

> *"Hemos visto que, dado un experimento aleatorio, llamamos espacio muestral E, al conjunto de todos los resultados posibles, y espacio de sucesos S = P(E) al conjunto de todos los sucesos del experimento aleatorio.*
> *En S hemos definido las operaciones de unión e intersección y complementación respecto de las cuales se cumplen las propiedades vistas en 25. 6. Llamaremos Algebra de Boole de sucesos a la terna $\{S, \cup, \cap\}$"* (Texto [K], p. 404).

Por tanto, no sólo hace mención al conjunto de partes de E, sino que define las operaciones de unión e intersección.

Concluye con un esquema del álgebra de Boole de sucesos y un cuadro donde muestra la equivalencia entre el lenguaje de conjuntos y de sucesos (Texto [K], p. 405):

"Algebra de conjuntos	*Algebra de sucesos*
1. Conjunto E referencial	*Espacio muestral o universo universal E*
2. Elemento de E	*Punto muestral de E*
3. Subconjunto de E	*Suceso de E*
4. Conjunto vacío	*Suceso imposible*
5. Conjunto unitario	*Suceso elemental*
6. Conjunto total	*Suceso cierto o seguro*
7. Partes de E	*Espacio de sucesos*
8. Unión de conjuntos A U B	*Unión de sucesos: A o B*
9. Intersección de con juntos: $A \cap B$	*A y B*
10. Subconjuntos disjuntos	*Sucesos incompatibles*
11. Inclusión de conjuntos	*Inclusión de sucesos*
12. Conjunto complementario	*Sucesos contrarios*
13. Algebra de Boole de conjuntos	*Algebra de Boole de sucesos".*

En consecuencia, las operaciones entre sucesos son analizadas con un alto grado de formalización, lo cual nos parece excesivo para este nivel de enseñanza. Muchos errores en probabilidad ocurren debido a que el lenguaje de probabilidad es diferente del que usamos habitualmente. La unión de sucesos constituye un ejemplo (Hawkins y cols., 1992).

En [A], después de dos ejemplos introductorios, realizados con el experimento de sacar una carta de una baraja española y observar el resultado, define:

> *"En general: Si M y N son dos sucesos contenidos en el espacio muestral E asociado a un experimento aleatorio, el subconjunto de E formado por los elementos que son de M o de N o de ambos, es el suceso unión de los sucesos M y N. Se representa por M U N.*
> *Si M y N son dos sucesos contenidos en el espacio muestral E asociado a un experimento aleatorio, el subconjunto de E formado por los elementos que son de M y de N, es decir, a la vez de M y de N, es*

el suceso intersección de los sucesos M y N. Se representa por M $\cap$ N" (Texto [A], p. 43).

En la página siguiente, resume en un cuadro la analogía existente entre las nociones de la teoría de conjuntos y las de la teoría de sucesos, de una manera similar a [K]. Un enfoque similar se presenta en [D], aunque la referencia a la correspondencia entre los sucesos estocásticos y los conceptos de la teoría de conjuntos se realiza antes de introducir las definiciones. Lo mismo ocurre en [F].

En [G], introduce el concepto de "*conjunto-potencia de un espacio muestral H*" o conjunto de sus partes como aquel que "*está formado por todos los subconjuntos de E*" (p. 193). Define a continuación los sucesos contrarios, la unión de sucesos, a la que denomina suceso-reunión, la intersección de sucesos y cuando dos sucesos son incompatibles para concluir con las leyes del álgebra de Boole: Absorción, independencia, asociatividad, conmutatividad, complementariedad, distributividad, identidad, involución y ley de Morgan.

Un segundo grupo de libros hace mención a estas operaciones, aunque no realizan un estudio formal de sus propiedades o de la estructura de Algebra de Boole. En [C], menciona muy superficialmente la unión e intersección de sucesos, relacionándola con la unión e intersección de conjuntos, haciéndolo a través de un ejemplo:

"Los sucesos, como subconjuntos del conjunto E, pueden unirse e intersecarse:
{2, 4, 6} $\cup${5, 6} = {2, 4, 5, 6} Suceso unión;
{2, 4, 6} $\cap${5, 6} = {6} Suceso intersección;
y estas operaciones, gozan de las propiedades ya descritas.
A cada suceso S, le podemos asignar un suceso complementario, S':
Si S = {2, 4, 6}, será S' = E - S = {1, 3, 5}" (Texto [C], p. 67).

En [E], sin definir ninguna de las operaciones entre sucesos, si se refiere a ellas relacionándolas con la teoría de conjuntos, como sigue:

"Hemos empleado para los sucesos conceptos y denominaciones de la teoría de conjuntos. Y así, análogamente, se puede hablar de uniones, intersecciones y complementos de sucesos" (Texto [E], p. 175).

En [H], estas operaciones las define a través de ejemplos y las denomina disyunción y conjunción de sucesos (p. 297). En [J], no define la unión ni la intersección de sucesos pero en el ejercicio propuesto nº.1.18 de la página 297 se pide como demostración la regla que permite calcular la probabilidad de la unión de dos sucesos:

"Los sucesos del ejercicio anterior son incompatibles: Comprueba, que en este caso, la probabilidad de AUB es la suma de las probabilidades de A y B" (Texto [J], p. 297).

Por ultimo, el texto [B], no incluye estos conceptos. Finalmente incluimos en la tabla 2.3.3. un resumen de lo expuesto. En dicha tabla podemos ver que la mayor parte de los textos incluye este apartado. Si aparece y además hace referencia a la teoría de conjuntos, indicamos "Cita teoría de conjuntos". Sin embargo el tratamiento que se hace no es homogéneo. Hay casos en que no se hace mención a las operaciones con sucesos en los ejercicios, posiblemente debido a la formalización de estos conceptos, mientras que en otros se incluye el estudio de la estructura de álgebra de Boole del espacio de sucesos dotado de las operaciones unión e intersección, llegándose al detalle de estudiar todas sus propiedades y estableciéndose un paralelismo con el álgebra de Boole de conjuntos.

Tabla 2.3.3. Operaciones con sucesos incluidas en los textos analizados

Text	Unión	Intersección	Diferencia	Algebra de Boole
[A]	Ejemplos y definición	Ejemplos y definición	Si	No (habla de espacio de sucesos)
[B]				
[C]	Ejemplo	Ejemplo	Ejemplo	
[D]	Definición y ejemplo	Definición y ejemplo		
[E]	Cita teoría conjuntos	Cita teoría conjuntos	Cita teoría conjuntos	Si
[F]	Definición y ejemplo	Definición y ejemplo	Si	Si
[G]	Definición y ejemplo	Definición y ejemplo	Si	Si
[H]	Disyunción	Conjunción		
[I]			Si	
[J]				
[K]	Cita teoría conjuntos Ejemplos y definición	Cita teoría conjuntos Ejemplos y definición	Si	Si

2.3.4. CONCLUSIONES SOBRE EL ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS

En este apartado hemos analizado la presentación que se hace en los textos de las nociones de espacio muestral y sucesos, así como de sus tipos y operaciones. Este estudio nos ha permitido identificar elementos de significado en los conceptos anteriores, así como poner de manifiesto sus interrelaciones, que podrá servir para otros futuros análisis de libros de texto o en la construcción de materiales curriculares.

Por otro lado, se ha puesto de manifiesto la diversidad de significados asociada a los diferentes conceptos en los textos analizados. En particular se ha observado la variabilidad en los grados de formalización del estudio de las operaciones entre sucesos y sus propiedades, que abarcan desde la omisión de este aspecto hasta el estudio formal de la estructura de álgebra de Boole, incluyendo la comparación con la teoría de conjuntos y las operaciones entre conjuntos, lo que nos parece excesivo para este nivel de enseñanza.

Así mismo se han identificado terminologías poco adecuadas como: *"Espacio total"*, en [D]; *"suceso total"*, en [E]; *"espacio de comportamientos"*, en [C], aunque éstas han sido, en general escasas.

2.4. FRECUENCIAS RELATIVAS Y SUS PROPIEDADES

En este apartado analizamos la forma en que los libros de texto presentan el concepto de frecuencia absoluta y relativa de un suceso y las propiedades de las frecuencias relativas, dentro del capítulo dedicado a la probabilidad. A nivel teórico, hemos analizado también este concepto dentro del capítulo de estadística, siempre que se presente en relación a un fenómeno o experimento aleatorio implícita o explícitamente. Sin embargo, como veremos en la sección 3.6, el análisis de ejercicios y ejemplos se restringe a aquellos en que la frecuencia relativa se estudia en relación con un fenómeno o experimento aleatorio o con la probabilidad de los mismos, descartando los ejercicios, muy frecuentes en el estudio de la estadística descriptiva, en que se propone al alumno la representación gráfica de distribuciones estadísticas de frecuencias o el cálculo de frecuencias acumuladas. Hemos tomado esta decisión porque este tipo de ejercicios no aporta conocimientos nuevos con relación al cálculo de probabilidades, que es el objeto principal de nuestro trabajo.

2.4.1. IMPORTANCIA DE LA FRECUENCIA RELATIVA

La noción de frecuencia relativa, el estudio de sus propiedades y de sus relaciones con la idea de probabilidad tienen gran importancia dentro del cálculo de probabilidades por tres motivos:

A) Las propiedades de las frecuencias relativas, que pueden observarse empíricamente en multitud de fenómenos de la vida cotidiana o en experimentos realizados en clase por los alumnos, son la base de la definición axiomática de la probabilidad. Estos axiomas no son más que abstracciones de estas propiedades empíricas de las frecuencias relativas, comúnmente aceptadas por su fuerza intuitiva. Fue precisamente esta certeza intrínseca o intuitiva de estos axiomas, apoyados por la base experimental lo que determinó, en gran medida, el éxito de la axiomática de Kolmogorov, que es aceptada como la mejor alternativa actual desde diversas posiciones.

Es verdad que el cálculo de probabilidades, en sí mismo, no determina el contenido específico del término probabilidad en una aplicación particular, sino que su función principal es descubrir, a partir de ciertas probabilidades iniciales dadas, otras probabilidades implicadas por ellas, por medio del cálculo formal. Por ello, solo con los axiomas, no podemos estar seguros de la pertinencia de aplicar el modelo probabilístico en una aplicación particular, ni de que la asignación inicial de probabilidades sea la más adecuada. Sin embargo, los axiomas tienen una función muy importante, ya que pueden usarse para definir implícitamente lo que es la probabilidad, limitando las posibles interpretaciones de este término a las que matemáticamente permiten el trabajo del modelo probabilístico.

B) La idea de frecuencia relativa es la base de la concepción frecuencial de la probabilidad, en la cual se define la probabilidad de un suceso como el límite al que tendería su frecuencia relativa en un gran número de ensayos repetidos en las mismas condiciones. Puesto que la asignación de probabilidades, en este enfoque, se hace a partir de la experimentación y recogida de datos, esta concepción sirve de puente entre la estadística y la probabilidad. Como indica Ayer (1968), para poder aplicar el cálculo de probabilidades con los pies en el suelo necesitamos el apoyo de la evidencia empírica. Decir que la probabilidad de obtener cara en una moneda no trucada es 1/2 puede ser una "verdad matemática". Pero para poder afirmar lo mismo de una moneda particular necesitaremos obtener información a partir de una larga serie de experimentos: *"Al aplicar el cálculo de posibilidades (chances) nuestros juicios de probabilidad experimentan un cambio de carácter: Se convierten en juicios estadísticos"* (p. 24).

C) Los teoremas de límite, de tanta importancia en el cálculo de probabilidades, están basados en admitir la posibilidad de repetición de un experimento y en las frecuencias relativas o en la distribución de frecuencias. Estos teoremas constituyen otras de las ideas fundamentales de Heitele (1975) y presentan un interés indudable, pues permiten mostrar la existencia de una regularidad global que surge de la aleatoriedad individual de los experimentos. Es también notable como estos teoremas parecen mostrarse empíricamente en la realidad, lo que hace que los teoremas de límite se justifiquen como un buen modelo matemático para los fenómenos aleatorios.

Estos teoremas de límite permiten también ampliar la gama de aplicaciones estadísticas en la práctica, pues posibilitan aplicar teoremas válidos para distribuciones conocidas, como la normal, cuando el tamaño de muestra es suficiente, en una gran variedad de situaciones inferenciales. Asimismo son el fundamento de la simulación que permite sustituir ciertos experimentos aleatorios por otros "isomorfos" en sentido probabilístico y condensar los resultados en el espacio o en el tiempo o bien observar y experimentar con situaciones que de otro modo no podrían manejarse.

Un problema didáctico es, sin embargo, que las secuencias experimentales realizadas en clase con propósito de demostración no siempre convergen con la rapidez que desearíamos o, debido a su carácter aleatorio, pueden mostrar un resultado contrario al que esperamos, contribuyendo a reforzar las intuiciones incorrectas de los alumnos. Por ello el profesor debe estar especialmente atento al estudio del concepto de frecuencia relativa y al uso de experimentos aleatorios en clase por parte de sus alumnos.

Queremos hacer observar también que en el estudio de las frecuencias relativas se encuentra implícitamente la exigencia de repetibilidad del experimento aleatorio, ya que, de no poder repetir el experimento en las mismas condiciones, no tiene sentido el cálculo de las frecuencias relativas. Por ello la comprensión de la frecuencia relativa precisa la de experimento aleatorio y su repetibilidad, lo cual no siempre es fácil para los alumnos, como se ha puesto de manifiesto en Serrano y cols. (1996).

Malara (1989) señala, para el nivel no universitario, los siguientes objetivos que deberán contemplarse en el tema de las frecuencias relativas:

- Conocimiento de la ley empírica del azar, es decir, del hecho de que las frecuencias relativas tienden a estabilizarse a la larga.
- Comprensión intuitiva de la idea de convergencia de estas frecuencias relativas a las probabilidades teóricas de los sucesos.
- Apreciar las ventajas de las estimaciones experimentales de la probabilidad, a partir de las frecuencias relativas en las situaciones en que no es posible aplicar el principio de indiferencia y se dispone de datos estadísticos sobre el fenómeno.

En consecuencia, consideramos que este concepto es lo suficientemente fundamental para ser incluido en nuestro análisis. En primer lugar hemos diferenciado el tipo de tratamiento que en los textos se da a este concepto, pudiéndose encontrar explícito o implícito. Cuando decimos que el tratamiento es explícito queremos indicar que estos conceptos aparecen en el capítulo de probabilidad y si es tratado en el capítulo de estadística, aunque se haga uso de dichos conceptos en probabilidad, decimos que el tratamiento es implícito. Un ejemplo de tratamiento explícito sería el siguiente ejemplo, del texto C:

> "*Frecuencia de un suceso es el número de veces que aparece en una serie de observaciones*"
> "*Se llama frecuencia relativa de un suceso S en un total de n observaciones, al cociente:*
> fr (S)= f(S)/n" (Texto [C], p. 75).

El siguiente caso muestra un tratamiento implícito del tema en el texto B:

> "*De cada 100 veces que saquemos dos bolas de la bolsa, aproximadamente 50 (la mitad) será del mismo color*" (Texto [B], p. 29).

Hemos hallado un tratamiento explícito en [A], [C], [D], [F], [G], [I], y [K] y un tratamiento implícito en [B], [E], [H] y [J].

Los elementos intensionales del significado de la noción de frecuencia relativa, que vamos a considerar en nuestro análisis son los siguientes:

F1: En un experimento aleatorio realizado n veces la frecuencia relativa de cada posible suceso A es el cociente n_A/n entre el número de veces que sucede A y el número de repeticiones del experimento.

F2: La frecuencia relativa de cada suceso es un número comprendido entre 0 y 1.

F3: La frecuencia relativa del suceso seguro es 1.

F4: La frecuencia relativa del suceso contrario a uno dado es igual a 1 menos la frecuencia relativa de dicho suceso.

F5: La frecuencia relativa de la unión de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las frecuencias relativas de estos sucesos.

F6: La frecuencia relativa de la unión de dos sucesos compatibles es igual a la suma de las frecuencias relativas de dichos sucesos menos la frecuencia relativa de la intersección de los mismos.

F7: Al aumentar el numero de ensayos se produce una convergencia, en sentido estocástico, de la frecuencia relativa hacia un valor constante teórico.

F8: La frecuencia relativa de B condicionada por A es igual al cociente entre la frecuencia relativa de la intersección de dichos sucesos y la frecuencia relativa del suceso A.

A continuación analizamos la presentación en los libros de texto de este concepto en lo que se refiere a los elementos de significado descritos.

2.4.2. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LA FRECUENCIA RELATIVA

La definición de las frecuencias relativas suele ser similar en todos los libros, así como la presentación de sus propiedades. Por ejemplo en [A], en el apartado 4.4 denominado *"Frecuencia absoluta y frecuencia relativa de un suceso",* después de unos ejemplos, ofrece las siguientes definiciones de frecuencia absoluta y relativa:

> *"En general: Sea un determinado experimento aleatorio, realizado N veces.*
> *Si el suceso aleatorio A aparece n veces, se dice que, en la referida muestra de N pruebas, la frecuencia absoluta del suceso A es n y la frecuencia relativa es n/N"* (Texto [A], p. 45).

Generalmente los libros que ofrecen una definición explícita de la frecuencia relativa, presentan también sus propiedades. Así, en el texto [A], una vez dada la definición, continúa en el apartado 4.5, denominado *"Propiedades de las frecuencias"* con el enunciado y demostración de tres propiedades de la frecuencia relativa: Que es un número comprendido entre 0 y 1 y la frecuencia relativa del suceso contrario, sobre la frecuencia relativa de la unión de sucesos incompatibles y sobre la unión de sucesos compatibles (Texto [A], p. 46). La primera de estas propiedades se razona a partir de la definición de frecuencia:

> *"De la misma definición de frecuencia resulta que el número n de veces que se presenta el suceso S en N pruebas cumple la condición $0 \le n \le N$, de donde $0/N \le n/N \le N/N$, o sea, $0 \le fr(S) \le 1$"* (Texto [A], p. 45).

De forma similar este texto demuestra las siguientes propiedades de la frecuencia relativa:

> *“Así pues, la frecuencia relativa de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1. La frecuencia del suceso contrario de S es igual a 1 menos la frecuencia de S.*
> *La frecuencia de la unión de dos o más sucesos incompatibles es igual a la suma de las frecuencias de esos sucesos."*
> *La frecuencia de la unión de dos sucesos compatibles es igual a la suma de las frecuencias de esos*

sucesos menos la frecuencia de la intersección de los mismos" (Texto [A], p. 46).

En [C], dedica un apartado completo al estudio de la frecuencia absoluta y de la frecuencia relativa de un suceso, estudiando algunas propiedades de la frecuencia relativa, distinguiendo para la frecuencia relativa de la unión de sucesos el que sean disjuntos o no. Así mismo estudia la frecuencia relativa de un suceso conociendo la de su complementario.

En [D], aporta las definiciones de frecuencia absoluta y relativa de un suceso, y en otro apartado estudia las propiedades de las frecuencias absoluta y relativa. En relación con esta ultima, menciona la suma de las frecuencias de los sucesos contrarios, y la frecuencia relativa de la unión de dos sucesos incompatibles.

En [F], dedica dos apartados, uno para definir las frecuencias absoluta y relativa, y otro denominado *"Propiedades de las frecuencias"* donde enuncia y demuestra las siguientes propiedades de la frecuencia relativa: La frecuencia relativa de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1; frecuencia relativa del suceso seguro, del suceso imposible y frecuencia relativa de la unión de dos sucesos incompatibles (Texto [F], p. 227).

Otros textos que definen la frecuencia relativa y sus propiedades son [G], o por medio de un ejemplo como [K]. Otras veces el tema se trata en forma implícita. Así en [B] no se menciona explícitamente ninguno de esos conceptos, aunque al exponer ejercicios y problemas resueltos, habla del número de veces que ocurre un suceso en un determinado número de repeticiones del experimento:

> *"De cada 100 veces que saquemos dos bolas de la bolsa, aproximadamente 50 (la mitad) las bolas serán del mismo color"* (Texto [B], p. 29).

2.4.3. CONVERGENCIA

El tema de la convergencia lo estudiamos con mayor detalle en el apartado 3.6 dedicado a los ejercicios sobre las frecuencias relativas. Presentamos aquí solo el estudio del modo en que se hace la presentación teórica del tema, que puede ser explícita, implícita o no incluirse.

En algunos casos, una vez estudiadas la definición de las frecuencias relativas y sus propiedades, se introduce la idea de probabilidad, precisamente apoyándose en la idea de convergencia, a la que se hace referencia explícita, como es el caso del texto [C]:

> "*Según se ha visto, en un experimento aleatorio la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse, a oscilar cada vez menos bruscamente alrededor de un cierto valor. Este valor es posible que lo conozcamos aproximadamente, pero nunca podremos saber su expresión exacta. A ese valor al cual la frecuencia relativa de un suceso se aproxima tanto como queramos, sin más que efectuar el experimento tantas veces como sea necesario, se le llama probabilidad del suceso"* (Texto [C], p. 72).

Este es también el enfoque de los libros [D], [E], [F], [G], [H], [I] y [K]. En el texto [K] para fundamentar los axiomas de probabilidad se refiere a las propiedades de las frecuencias relativas:

> *"Como hemos visto que la frecuencia relativa de un suceso tiende al valor de probabilidad de ese suceso, mediante un proceso de abstracción llegamos a la siguiente definición axiomática de probabilidad"* (Texto [K], p. 412).

Este mismo razonamiento lo aplica para definir la probabilidad condicionada a partir de la frecuencia relativa de B condicionado por la ocurrencia de A. El texto [A], aplica esto último aunque no lo menciona en el caso de la definición axiomática de la probabilidad. Algunos libros no hacen referencia explícita a la idea de convergencia, pero implícitamente puede observarse esta idea en algunos de los ejemplos propuestos, como en el siguiente ejemplo, tomado del texto [B], que no introduce el estudio de las frecuencias relativas ni sus propiedades dentro de la lección dedicada a probabilidad, aunque en el capítulo dedicado a estadística si la define, pero sin mencionar las propiedades de la misma:

> *"De cada 100 veces que saquemos dos bolas de la bolsa, aproximadamente 50 (la mitad) las bolas serán del mismo color.*
> *Recíprocamente, si al realizar, por ejemplo, 500 veces un mismo experimento, un determinado suceso se verifica 300 veces, todos estamos convencidos de que, calculada la probabilidad de este suceso, debe resultar un número próximo a 3/5.*
> *Tal es nuestra confianza en el acuerdo que debe existir entre los datos experimentales y la predicción teórica, que, en caso de que advirtamos una diferencia importante entre aquellos y ésta, será conveniente revisar los cálculos teóricos"* (Texto [B], p. 29).

En otros casos finalmente no aparece la idea de convergencia, incluso aunque se introduzcan las frecuencias relativas y sus propiedades. Los axiomas de probabilidad se presentan, de este modo, como independientes de estas propiedades o no parece oportuno aclarar la conexión entre el modelo matemático (axiomas de probabilidad) y las observaciones empíricas (propiedades de las frecuencias relativas y convergencia). Así, en el texto [A], la única referencia implícita que podríamos considerar se relaciona con la idea de convergencia es la siguiente:

> "*Sin embargo, en cada caso nos referimos a un tipo diferente de juicios de probabilidad. Así el primero es un ejemplo de lo que podríamos llamar juicio de probabilidades "a priori" y está relacionado con el cálculo matemático de probabilidades"..."Una de las características de los llamados "juegos de azar" consiste en que sus resultados están substancialmente de acuerdo con las probabilidades "a priori"* (Texto [A], p. 39).

No se hace referencia a la convergencia en los textos [F] y [J].

2.4.4. CONCLUSIONES SOBRE LA FRECUENCIA RELATIVA

Como resumen, presentamos la tabla 2.4.1. que muestra los elementos intensionales de significado relacionados con la idea de frecuencia relativa en los textos analizados. Cuando decimos que el tratamiento es explícito queremos indicar que estos conceptos aparecen en el capítulo de probabilidad y si es tratado en el capítulo de estadística, aunque se haga uso de dichos conceptos en probabilidad, decimos que el tratamiento es implícito.

La definición de frecuencia relativa aparece en todos los textos, aunque en algunos casos se trata en el capítulo de estadística, como ocurre en los textos [B], [E], [H] y [J]. El único texto que lo trata en ambos capítulos es el libro [I].

En relación con las propiedades de la frecuencia relativa el tratamiento es diverso. En el texto [C] las trata todas, en el libro [A] todas menos la que hace referencia a la frecuencia relativa del suceso seguro. Estos dos textos son los únicos que distinguen entre la frecuencia relativa de la unión de sucesos, según sean compatibles o incompatibles. Los textos [D], [F], [G] y [K] tratan las mismas propiedades que [A], excepto la referente a la frecuencia relativa de la unión de sucesos compatibles. Los textos [B], [E], [H], [I] y [J] no mencionan dichas propiedades.

Tabla 2.4.1. Tratamiento de las frecuencias en los textos analizados

	Definición	F2	F3	F4	F5	F6	Converg.	F.r.suceso condic.
[A]	Explícito	Explícito		Explícito	Explícito	Explícito	Implícito	Explícito
[B]	Implícito						Implícito	
[C]	Explícito	Explícito	Explícito	Explícito	Explícito	Explícito	Explícito	
[D]	Explícito	Explícito		Explícito	Explícito		Explícito	
[E]	Implícito						Explícito	
[F]	Explícito	Explícito	Explícito		Explícito		No trata	Explícito2
[G]	Explícito	Explícito	Explícito		Explícito		Explícito	
[H]	Implícito						Explícito	
[I]	Explícito						Explícito	
[J]	Implícito							
[K]	Explícito	Explícito	Explícito		Explícito		Explícito	Explícito

Sobre la convergencia de la frecuencia relativa hacia un valor determinado cuando se realiza un elevado número de veces un experimento, hacen un tratamiento explícito todos los textos, excepto [A] y [B] que lo hacen implícito y los textos [F] y [J] que no mencionan nada. El texto que hace un estudio más completo y que muestra la diferencia entre distribución esperada y distribución empírica acompañado de una serie de ejemplos y actividades, es el texto [I]. El texto [K], es el que muestra claramente la relación entre frecuencia relativa y probabilidad, por un lado a través del enunciado de la convergencia y por otro lado al señalar que las propiedades de las frecuencias relativas sirven de fundamento a los axiomas de la probabilidad. Sin embargo, esta convergencia en algunos casos no está suficientemente explicada, como ocurre en un ejemplo propuesto en el texto [H], que asocia frecuencia relativa con probabilidad en un experimento con muy pocas realizaciones, consistente en jugar doce partidas de ajedrez entre dos amigos y anotar los resultados (Texto [H], p. 196). Sin embargo, más adelante al indicar que hay dos modos de asignar la probabilidad a un suceso, aclara un poco más esta idea:

"Utilizando la frecuencia relativa del suceso en un número elevado de experiencias" (Texto [H], p. 197).

Por último mencionar que los textos [A] y [K] son los únicos que utilizan la frecuencia relativa del suceso B condicionado por A, para definir a continuación la probabilidad condicional. Aunque el texto [A], utiliza en este apartado la noción de suceso condicionado, que no parece adecuado, pues lo que se condiciona es la probabilidad (Texto [A], p. 51):

"Hemos visto que la frecuencia del suceso B condicionado a la verificación de A es:

$$f_r(B/A) = \frac{f_r(A \cap B)}{f_r(A)} \text{ ''.}$$

En todos los textos se estudia primero la probabilidad, excepto en los textos [E], [H], [I] y [J], que trata primero la estadística y posteriormente la probabilidad.

2.5 NOCIÓN DE PROBABILIDAD

En esta sección nos hemos centrado en analizar las definiciones que los libros de texto proponen para el concepto de probabilidad y el uso implícito o explícito que se hace de este concepto. En particular nos interesamos por la concepción que subyace sobre la misma, dentro de las expuestas en Godino y cols. (1987).

El concepto de probabilidad es especialmente adecuado como ejemplo de la dependencia temporal e institucional del significado de los objetos matemáticos, ya que podemos identificar con facilidad la diferencia de uso de este término, en el cálculo de probabilidades y en el lenguaje ordinario. *"Como veremos más adelante, en numerosas ocasiones el término probabilidad no tiene el mismo significado en la ciencia y en el lenguaje diario. Esta diferencia de significado puede reflejar las distintas concepciones que subyacen en la solución de problemas cotidianos de probabilidad y, al mismo tiempo, ayuda a entender mejor los distintos errores que se cometen"* (Pérez Echeverría, 1988, p. 18).

Asimismo, a lo largo de su desarrollo histórico, diferentes significados han sido asociados a este concepto, incluso desde un punto de vista científico. Estos diversos puntos de vista todavía coexisten, debido quizás al desarrollo relativamente reciente de este campo, comparado con otras ramas de las matemáticas: "E*l campo de la probabilidad y estadística es simplemente un adolescente matemático, si se compara con la geometría o el álgebra o incluso con las raíces del cálculo*" (Shaughnessy, 1992, p. 8).

Hackings (1975) señala que este lento desarrollo ha sido debido en gran parte al significado dual del término probabilidad, como grado de creencia y como cálculo estable de frecuencias de los sucesos aleatorios. Estos dos significados duales dieron origen a las definiciones posteriores de probabilidad desde el punto de vista subjetivo y objetivo, respectivamente. Aunque complementarios, estos criterios no han cesado de provocar discusiones de tipo filosófico entre los defensores de una y otra postura. En este debate se hallan entremezcladas las nociones de qué es lo que constituye una evidencia aceptable para el científico: Bien un testimonio extrínseco al objeto, de acuerdo con lo que tradicionalmente se consideraba como ciencia, bien un testimonio intrínseco al objeto o evidencia inductiva a partir de un gran número de casos.

Al analizar las diferentes concepciones de probabilidad presentes en los textos estudiados, separaremos los elementos de significado que, a priori, podemos asignar a cada una de estas concepciones. Ello nos permitirá también poner de manifiesto, cómo cada una de estas diversas concepciones asignaría un significado diferenciado al término "probabilidad". Como consecuencia, podríamos decir que el objeto "probabilidad" sería diferente en estas diversas acepciones, a pesar de que todas ellas compartiesen algunas características comunes.

2.5.1 CONCEPCIÓN CLÁSICA

En 1812, Laplace dio la definición conocida como clásica de probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades como *la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los casos sean igualmente "probables".* Según Godino y cols (1987), esta definición se encontró inadecuada incluso en su misma época, ya que a*demás de ser circular y restrictiva, no ofreció respuesta a la pregunta de qué es realmente la probabilidad; sólo proporcionó un método práctico de cálculo de probabilidades de algunos sucesos sencillos"* (p. 21).

La equiprobabilidad de los sucesos elementales puede a veces justificarse por el principio de indiferencia, por ejemplo, en dispositivos como los dados o monedas en que no hay razones para preferir un resultado sobre otro. Otro principio empleado por Laplace es el de razón insuficiente, por el que todas las alternativas se consideran equiprobables si no hay ninguna razón en contra de tal hipótesis. Sin embargo, con frecuencia es difícil aplicar alguno de estos dos principios, pues los dados, monedas u otros generadores aleatorios podrían estar sesgados.

Por otro lado, en la mayoría de los experimentos en que no se cumplan estas condiciones de número finito de modalidades y de simetría no puede aplicarse esta definición. Podemos pensar en el ejemplo clásico de lanzar al suelo una caja de chinchetas. Es claro que las posibilidades de que una chincheta caiga de cara o de punta no son las mismas, por lo que no podría aplicarse la regla de Laplace. Tampoco podremos aplicar esta regla cuando trabajamos con espacios muestrales infinitos.

El utilizar este enfoque de la probabilidad en la escuela podría tener algunos inconvenientes, ya que requiere cierto conocimiento de la comparación de fracciones. Además podemos crear algún conflicto (dificultad, obstáculo) en los alumnos, debido a la noción de sucesos equiprobables. Como ejemplo de este problema indican Godino y cols (1987) el juego del parchís, en que para comenzar a jugar hay que sacar un cinco. Algunos alumnos no creen que al tirar un dado la probabilidad de que salga cualquier número es la misma, ya que a veces deben esperar bastante tiempo para poder comenzar a mover fichas porque no les salía el "cinco" requerido.

Como consecuencia de nuestro análisis, podríamos asignar "a priori" los siguientes elementos intensionales del significado a la concepción clásica de la probabilidad:

PC1: *La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.*

PC2: *La probabilidad del suceso seguro es 1.*

PC3: *La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidad de estos sucesos.*

PC4: *El espacio muestral asociado al experimento debe ser finito para poder asociar probabilidades a los sucesos.*

PC5: *Los sucesos elementales deben ser equiprobables, es decir, asignamos a cada suceso elemental una probabilidad 1/n, donde n es el número de sucesos del espacio muestral.*

PC6: *Si un suceso compuesto se compone de k sucesos simples, su probabilidad es igual a k/n, donde n es el número de sucesos elementales del espacio muestral.*

PC7: *La probabilidad de un suceso es un valor objetivo. Sólo depende del experimento y del número de sucesos elementales asociados y no de nuestro conocimiento sobre el fenómeno.*

A continuación analizamos los textos que presentan este enfoque al introducir la probabilidad. En [A], después de unos ejemplos, introduce la regla de Laplace:

> "*En general: En los casos en que sea aceptable admitir que todos los n sucesos elementales tienen igual probabilidad, esta probabilidad vale 1/n. Si un suceso A es la unión de h sucesos elementales de igual probabilidad, se tiene que p(A)=h/n. Esta regla, llamada regla de Laplace, se enuncia también diciendo que la probabilidad de un suceso es igual al número de casos favorables dividido por el número de casos posibles*"(Texto [A], p. 50).

Este texto no realiza ninguna discusión sobre cuáles serían las condiciones para que el supuesto de equiprobabilidad fuese aceptable, ni hace comentarios sobre la circularidad contenida en esta definición. Esta circularidad es tratada de evitar en algunos de los textos, como en [E], [I] y el caso que mostramos a continuación.

En [B], a partir de un ejemplo sobre las probabilidades de que apruebe un alumno que debe examinarse, comenta lo que se suele entender por casos favorables y casos posibles. Introduce a continuación sin mencionarla explícitamente la regla de Laplace:

"*El cociente 20/90 expresa el grado de seguridad que cabe tener en que la suerte favorezca al alumno, es decir la probabilidad de este suceso:*
Probabilidad de que la suerte favorezca al alumno = f/p = 20/90 =2/9 = 0,222222" (Texto [B], p. 27).

Este libro dedica un apartado a justificar el empleo de las fórmulas combinatorias, anteriormente introducidas, para el cálculo del número de casos posibles y del número de casos favorables, indicando que este procedimiento sería suficiente para resolver la mayoría de los problemas de cálculo de probabilidades.

"Estos números se calculan casi siempre haciendo uso de las fórmulas que hemos ido viendo a lo largo de este capítulo primero" (Texto [B], p. 28).

Esta afirmación podría justificarse en el contexto escolar, siempre que se utilice exclusivamente el enfoque clásico para el estudio de la probabilidad. Es, sin embargo, sólo parcialmente cierta, puesto que en un gran número de aplicaciones del cálculo de probabilidades la asignación inicial de probabilidad a un suceso debe hacerse a partir de una estimación frecuencial de la misma. Incluso en clase, el alumno sería incapaz de asignar una probabilidad a sucesos tales como "que al elegir al azar un niño en la clase, sea hijo único", porque los sucesos ser o no hijo único no son equiprobables.

Definiciones similares a ésta son expuestas por [F]. En [C], basándose en la descripción del ejemplo consistente en lanzar un dado 100 veces y anotar los resultados, introduce sin mencionarla explícitamente la regla de Laplace, de la siguiente forma:

"*Considerando que ninguno de los comportamientos individuales tiene preferencia sobre los demás, le asignamos a todos ellos la misma probabilidad. Como consecuencia de lo cual, cada suceso tendrá una probabilidad igual al cociente:*

$$\frac{n^{o}\ de\, casos\ favorables}{n^{o}\ de\, casos\ posibles}$$

" (Texto [C], p. 72).

Observamos que en este caso, la equiprobabilidad de los sucesos se razona sobre la base del principio de indiferencia. En [D], en el capítulo 7, define los sucesos equiprobables indirectamente, a través de un ejemplo:

"*Al arrojar una moneda al aire {salir cara} o {salir cruz}, son igualmente posibles, y según la ley del azar, los dos sucesos tienen la misma probabilidad: diremos que son equiprobables.*
Cuando un espacio E está compuesto por n sucesos elementales, todos equiprobables, diremos que el espacio es uniforme y la probabilidad de cada suceso elemental es igual a 1/n" (Texto [D], p. 77).

Vemos que la definición contiene de nuevo la circularidad clásica de definir sucesos equiprobables como aquellos que tienen la misma probabilidad, sin aclarar realmente en qué consiste dicha probabilidad. Se hace alusión a una supuesta ley del azar aunque por el contexto no se ve claro si es a la ley de los grandes números o a la regla de Laplace.

Esta definición incluye también un nuevo concepto, que es el de *"espacio uniforme"* para referirse a un espacio muestral en el que sea posible aplicar la regla de Laplace. Este concepto, tal y como es presentado en este texto, no existe en cálculo de probabilidades. En todo caso, existe la distribución de probabilidades uniforme discreta, que es la seguida por una variable aleatoria que toma un número finito de valores con iguales probabilidades. Observamos de nuevo un fenómeno de cambio de significado de un concepto al ser adaptado para su enseñanza. A continuación, advirtiendo que es necesaria la condición de "espacio uniforme", introduce la regla de Laplace:

> "*En un espacio uniforme, al número de todos sus elementos se le llama casos posibles, y al número de elementos que integran un suceso parcial se les llama casos favorables. Con esta nomenclatura podemos dar la definición de Laplace:*
> *La probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles:*

$$p(A)=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} \text{"}\ (Texto\,[D], p.77)$$

Una variante la encontramos en [K], ya que parte de la definición axiomática, que utiliza para deducir la regla de Laplace. Este es el enfoque que se sigue en muchos libros de texto universitarios para introducir la regla de Laplace, como consecuencia inmediata de los axiomas de probabilidad. Encontramos la concepción clásica en un epígrafe denominado "Regla de Laplace". A partir de un experimento aleatorio consistente en lanzar un dado cuyas caras están numeradas del 1 al 6 y anotar los resultados obtenidos, suponiendo que los sucesos elementales son equiprobables y aplicando los axiomas estudiados en la concepción formal concluye que:

> "*Si el espacio muestral E se puede descomponer en n sucesos equiprobables e incompatibles entre sí, y de ellos h son favorables a la realización de un cierto suceso B, la probabilidad de B será:*

$$p(B)=\frac{número\, de\, casos\ favorables\, al\ suceso\, B}{número\, de\, casos\ posibles}=\frac{h}{n} \text{"}\ (Texto[K], p.416)$$

Vemos de nuevo la existencia de la palabra equiprobable en la definición de la probabilidad de un suceso, aunque ahora la regla de Laplace se justifica a partir de los axiomas.

[G], es el único texto que señala el problema asociado a la circularidad en la definición de probabilidad según el enfoque clásico. En el epígrafe que titula "*Concepto intuitivo de probabilidad. Postulado de indiferencia. Regla de Laplace*" advierte a los alumnos que este concepto es "*completamente insuficiente, desde un punto de vista matemático*", incluye una breve justificación de esta afirmación y termina enunciando la regla de Laplace:

> "*La probabilidad de un suceso es el cociente entre los casos favorables (éxitos) y casos posibles, considerados equiprobables e incompatibles*" (Texto [G], p. 205).

Propone a continuación cuatro ejemplos resueltos, en dos de los cuales utiliza el recurso combinatorio. Este recurso se aplica bastante en los ejemplos resueltos a lo largo del capítulo. Ello es natural y es debido a que, como indica Heitele (1975), el principio de indiferencia es realmente la primera regla estratégica que nos permite asignar probabilidades a los sucesos, ya que los tres axiomas por sí solos no proporcionan una regla sobre como asignarlas. En [H], en un apartado denominado "*Concepto clásico de probabilidad*", a través de un ejemplo se introduce la probabilidad de un suceso en la siguiente forma:

> "*Asignamos a cada suceso el cociente entre los casos que le son favorables y los casos que son posibles. Así al suceso V = "extraer bola verde" le asignamos 6/18 = 1/3.*
> *A este cociente lo llamaremos probabilidad del suceso V y lo expresamos así: P(V)=1/3. P(V)=1/3 indica que de cada tres resultados posibles uno debe ser favorable a V, o también, que al repetir el experimento un gran número de veces cabe esperar que en la tercera parte de ellas se cumpla V*" (Texto [H], p. 192).

En este ejemplo, se pide incluso la descripción de los "*sucesos favorables*", terminología propia del autor, que tampoco se corresponde con la usual en estadística:

> "*Escribe los sucesos favorables a Luis, Felipe y Laura.*" (Texto [H], p. 192).

En otro apartado afirma que la probabilidad calculada, de acuerdo a la regla de Laplace, es una de las formas de asignar la probabilidad a un suceso:

> "*Suponiendo que todos los resultados elementales son equiprobables. Esta probabilidad se puede conocer de antemano, sin necesidad de realizar el experimento, por eso la denominaremos probabilidad "a priori"*" (Texto [H], p. 197).

Sin embargo, el calificativo "a priori" para una probabilidad no se restringe al caso de aplicación de la regla de Laplace. En particular, la diferenciación entre probabilidades a priori y a posteriori suele hacerse en el contexto del empleo del teorema de Bayes, y en general de cualquier proceso de inferencia bajo incertidumbre. Se conoce como probabilidades a priori, las probabilidades asignadas inicialmente a los sucesos, antes de obtener una evidencia experimental por medio de una muestra. Las probabilidades condicionadas de estos mismos sucesos, una vez realizado el experimento y en función de los datos obtenidos en cuestión se denominan probabilidades a posteriori (Canavos 1987).

Observamos finalmente que en el enfoque clásico se muestran en casi todos los libros de texto los elementos de significado PC1, PC2 y PC3 compartidos por las diferentes acepciones de probabilidad. Así mismo los elementos PC5 y PC6. Por el contrario la condición de finitud del espacio muestral (PC4) y el carácter objetivo de este concepto de probabilidad (PC7) se soslayan, seguramente debido a su mayor complejidad.

2.5.2. CONCEPCIÓN FRECUENCIAL

En esta concepción, la probabilidad de un suceso es entendida como el valor hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso en una secuencia de resultados, entendida esta convergencia en sentido estocástico, dado por los teoremas de límite y ha sido defendida, entre otros por John Venn, Von Mises, Reichembach y Kolmogorv (Godino y cols., 1987).

Se basa en dos características que pueden ser observadas en las sucesiones de resultados de un mismo experimento aleatorio repetido en idénticas condiciones. Estas dos características son la estabilidad global aproximada de las frecuencias relativas de cada uno de los posibles sucesos asociados al experimento y la imposibilidad de predecir con seguridad el resultado particular de cada uno de ellos.

La importancia de la aproximación frecuencial se debe a varios motivos: Por un lado, establece un puente de unión entre la estadística y la probabilidad, ya que el enfoque clásico de la inferencia estadística se basa en esta concepción de la probabilidad.

Además este enfoque se recomienda, desde un punto de vista metodológico en numerosas propuestas curriculares para la enseñanza no universitaria (MEC, 1989; Junta de Andalucía, 1989; N.C.T.M., 1989). Permite también la simulación de experimentos, con lo que podemos analizar modelos probabilísticos cuyo tratamiento a partir del cálculo directo de probabilidades sería demasiado difícil para los estudiantes y también otros que serían difíciles de observar, debido al tiempo necesario para esperar a que realmente se produzcan o a la dificultad de desplazamiento al lugar donde podrían observarse.

No obstante, este enfoque tiene algunos inconvenientes desde los puntos de vista filosófico, conceptual y práctico relacionados con la noción de número infinito de experimentos. A continuación analizamos los elementos intensionales del significado asociados a esta concepción de la probabilidad:

PF1: *La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.*

PF2: *La probabilidad del suceso seguro es 1.*

PF3: *La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de estos sucesos.*

PF4: *Los experimentos aleatorios son repetibles indefinidamente en las mismas condiciones.*

PF5: *Los espacios muestrales pueden o no ser finitos.*

PF6: *Los sucesos elementales pueden o no ser equiprobables.*

PF7: *La frecuencia relativa de los sucesos tiende a estabilizarse alrededor de un cierto número, que es la probabilidad del suceso, en un número suficientemente grande de experimentos. Esta estabilización tiene un carácter aleatorio, pues se producen oscilaciones, aunque la probabilidad de que su tamaño exceda un cierto valor puede calcularse en función del número de pruebas.*

PF8: *La probabilidad de un suceso es un valor objetivo; depende del suceso y no de mi conocimiento sobre el mismo.*

Vemos que los tres primeros elementos intensionales del significado del concepto, así como el PF8 son compartidos con la aproximación clásica y que la concepción frecuencial puede considerarse como una ampliación de la anterior por dos motivos: a) Amplía el tipo de experimentos a los que puede asignarse una probabilidad; b) debido al elemento PF7 asignaría las mismas probabilidades que la concepción clásica cuando el espacio muestral es finito y los sucesos son equiprobables.

Respecto al elemento PF4, ya habíamos visto en la sección 5 que asignábamos a los experimentos aleatorios la posibilidad de ser repetibles, al menos imaginariamente. Sin embargo, hemos querido resaltar aquí este aspecto, porque en el enfoque frecuencial es preciso que el experimento sea repetible para asignar la probabilidad al suceso. En cambio, en las concepciones clásica o subjetiva la asignación de probabilidades no se basa explícitamente en esta exigencia de repetibilidad. Este elemento PF4, así como el PF7 y en general toda esta concepción se halla también relacionada con la idea de frecuencia relativa. Por ello, hemos considerado que los textos analizados contienen una mención, al menos implícita a la concepción frecuencial de la probabilidad cuando hacen un estudio detallado de la convergencia (estabilidad) de la frecuencia relativa.

A continuación analizamos la presentación de esta concepción de probabilidad en los textos elegidos. Como hemos visto, todos los que la tratan presentan los elementos PF1 a PF3 que son compartidos con la concepción clásica. Los elementos PF4 y PF7 están implícitos en la misma definición de frecuencia relativa y su convergencia a la probabilidad. Los elementos PF5 y PF6 sin embargo, son omitidos en la mayor parte de los textos analizados.

En [C], después de describir un experimento de lanzar un dado 100 veces, donde se han anotado los resultados, propone como definición de probabilidad la siguiente, en la que podemos reconocer la concepción frecuencial:

> "*A ese valor al cual la frecuencia relativa de un suceso se aproxima tanto como queramos, sin más que efectuar el experimento tantas veces como sea necesario, se le llama probabilidad del suceso*" (Texto [C], p. 72).

En esta afirmación de que solo es preciso efectuar el experimento tantas veces como sea necesario, no se alude al problema filosófico asociado a la asignación frecuencial de probabilidades, relacionado con el número necesario de repeticiones del experimento. Tampoco se refiere al problema de asignar probabilidades a sucesos no repetibles en las mismas condiciones. Sin embargo reconoce que con esta definición solo podremos proceder aproximadamente a la asignación de probabilidades.

Para salvar este inconveniente concluye que *"mediante la experimentación reiterada podemos conseguir que la frecuencia relativa se estabilice, oscile menos bruscamente. Le asignaremos al suceso estudiado una probabilidad adecuada a la vista de los resultados, pero no como algo aproximado, sino considerándolo como exacto"* (Texto [C], p. 72). Pero esto no consigue clarificar ni cuál es el número necesario de ensayos, ni cuál es el valor adecuado de la probabilidad que debe asignarse al suceso.

En [D], después de definir las frecuencias absoluta y relativa de un suceso y sus propiedades, introduce la definición de probabilidad, de un modo semejante:

> "*La importancia de la frecuencia relativa se deduce de esta ley del azar: Al aumentar el número de experiencias, la frecuencia relativa de un determinado suceso tiende a estabilizarse alrededor de un número que llamaremos probabilidad de dicho suceso*" (Texto [D], p. 76).

Esta misma imprecisión y definiciones similares se presentan en [E]. En [I] menciona que:

> "L*a teoría de probabilidades se ocupa de medir hasta que punto se puede esperar que ocurra un suceso. Se dice que esa medida es su probabilidad. Que un suceso tenga una probabilidad del 70%, significa que, de cada 100 veces que se presentan determinadas condiciones, el suceso ocurre 70. También se dice, en este caso, que la probabilidad es de 70/100 = 0,7*" (Texto [I], p. 227).

En esta presentación hay una imprecisión que podría inducir a mantener el sesgo de representatividad (Kahneman, Slovic y Tversky,1982), ya que al decir que de cada 100 veces el suceso ocurre 70 se está dando la idea de que la frecuencia relativa del suceso coincidirá exactamente con su probabilidad. No se insiste explícitamente en la fluctuación de las frecuencias relativas, pudiendo inducir a los alumnos a creer en una constancia inexistente en los resultados de los experimentos aleatorios.

Realiza luego un estudio más detallado de las frecuencias relativas cuando aumenta el número de experiencias en el apartado 3) del capítulo 14 titulado "*Leyes del azar. Probabilidad*." Para ello propone estudiar la frecuencia relativa del número 3 al tirar más y más veces un dado.

En primer lugar, describe el lanzamiento de un dado hasta completar veinte series de doce lanzamientos, presentando los resultados en una tabla y realizando la gráfica correspondiente. Repite la experiencia otras dos veces y dibuja las tres curvas correspondientes, observando que, conforme aumenta el número de tiradas, las oscilaciones de las curvas van siendo menos bruscas y que las curvas se van acercando a un cierto valor (Texto [I], p. 235).

Para ver con más claridad el efecto presenta el resultado de 32 series de 20 lanzamientos cada una. De la observación de la gráfica con todos los resultados concluyen los autores que las oscilaciones en cada curva y tendencia de todas ellas hacia el valor 1/6 se aprecian cada vez con más claridad, y enuncian así la ley de los grandes números:

> "*Cuando el número de observaciones de un fenómeno aleatorio crece mucho, la frecuencia relativa del suceso asociado se va acercando más y más hacia un cierto valor. Este valor se llama probabilidad del suceso*" (Texto [I], p. 236).

En el caso de que no podamos suponer que todos los sucesos elementales tengan la misma probabilidad, nos indica que podemos utilizar esta "convergencia" para asignar probabilidades a los sucesos:

> "*Pero si la experiencia es tal que no podamos suponer, en buena lógica, que los sucesos elementales son equiprobables (lanzamiento de un dado trucado o de una chincheta, que no tiene igual facilidad para caer en una posición o en otra), asignamos probabilidades inspirándonos en la ley de los grandes números: hacemos muchas experiencias (cuantas más, mejor) y asignamos los valores de las frecuencias relativas como buenas aproximaciones de la probabilidad*" (Texto [I], p. 243).

Otra característica importante de la frecuencia relativa es resaltada en el ejemplo 1 de la página 227, del mismo texto, en el cual se relaciona la probabilidad con el valor medio de la frecuencia relativa en una serie de ensayos:

> "*La probabilidad de obtener un 3 al lanzar un dado es 1/6, pues ocurre, por término medio, una de cada seis veces que se intenta.*"

Esta propiedad se debe a que la frecuencia relativa de cada suceso en una sucesión finita de n ensayos es una variable aleatoria, siendo la media o esperanza matemática de esta variable aleatoria igual a la probabilidad del suceso (Ríos, 1967).

En [K], en el epígrafe 26.2 del capítulo dedicado a la probabilidad, que denomina "*Idea intuitiva del concepto de probabilidad*", hace referencia a la concepción frecuencial de la probabilidad, de la siguiente forma:

> "*Este número, al que la frecuencia relativa de un suceso se acerca tanto más cuanto mayor es el número de pruebas realizadas, es al que llamaremos probabilidad del suceso*" (Texto [K], p. 402).

Menciona a continuación los inconvenientes de esta definición que se concretan en dos. En primer lugar, indica que es necesario realizar un número elevado de pruebas del experimento para obtener una estimación suficientemente fiable de su probabilidad. Además resalta que con este método nunca conoceríamos el valor exacto de la probabilidad, sino un valor aproximado. Por todo ello sugiere: "*tratar el concepto de probabilidad de una forma tal que para hallar la probabilidad de un suceso no tengamos necesariamente que efectuar un gran número de pruebas y además podamos hallar el valor exacto*" (Texto [K], p. 412).

Hay aquí una ilusión de transparencia sobre el concepto de probabilidad, que se equipara a una propiedad del suceso e incluso a una magnitud medible. Como sabemos, aunque hay un acuerdo sobre los axiomas particulares que debe cumplir una función definida sobre el álgebra de sucesos para ser considerada como una probabilidad (Quesada y García, 1988), no lo hay sobre el modo en que debieran asignarse las probabilidades a los sucesos de un experimento particular (Matalón, 1979).

Por tanto, no existe en general un valor exacto para la probabilidad de un suceso. Incluso en un caso tan sencillo como el lanzamiento de un dado, objetivistas y subjetivistas posiblemente no estarían de acuerdo en el modo de asignar probabilidades, ya que diversas condiciones sobre la construcción o la habilidad de la persona que lo lanza pudieran sesgar sus resultados. En la exposición de los textos analizados no queda claro, en general, el carácter de modelo matemático del cálculo de probabilidades, que implica siempre una convención a la hora de aplicarlo a casos particulares, aunque ello es razonable debido a las dificultades que hemos señalado.

En [G], al hablar de la estabilidad de las frecuencias relativas no comenta nada sobre la probabilidad, pero más tarde en la introducción de la regla de Laplace afirma:

> "*Sensibilizado el concepto de probabilidad como la frecuencia de un suceso, cuando el número de pruebas se repite ilimitadamente*" (Texto [G], p. 204).

Entendemos esto como una forma de hacer ver a los alumnos la concepción frecuencial de la probabilidad. En [H] aparece un apartado denominado "*Frecuencia como probabilidad*" y en él un epígrafe "*La experimentación nos da la probabilidad*", donde intenta introducir de una manera intuitiva la concepción frecuencial de la probabilidad, encontramos el siguiente ejemplo:

> "*Una partida de ajedrez entre dos personas, A y B, puede considerarse como un experimento aleatorio puesto que:*
> *1. Puede repetirse varias veces.*
> *2. Su resultado no puede conocerse de antemano con seguridad.*
> *Los posibles resultados de este experimento son tres: Gana A; Gana B; Finaliza en tablas.*
> *Si consideramos que los tres resultados tienen las mismas posibilidades de ocurrir, es decir, son equiprobables, podemos aplicar la definición de probabilidad utilizada hasta ahora y así:*
> *P(Gana A) =P(Gana B)= P(Terminan en tablas) = 1/3.*
> *Juan y Pedro deciden comprobar si es cierta esta suposición. Para ello deciden jugar 12 partidas. Los resultados obtenidos son los siguientes: Juan gana 6 veces, Pedro gana 4 y 2 terminan en tablas.*
> *a) Calcula la proporción de veces que se obtiene cada resultado.*
> *b) ¿ Te parece lógico pensar que los tres resultados eran equiprobables? ¿Por qué?*
> *c) A la vista de los resultados obtenidos, ¿qué probabilidad crees tu que tendría cada suceso de ocurrir?*
> *Observa que las proporciones calculadas en el apartado a) son precisamente las frecuencias relativas de cada resultado en las 12 partidas.*
> *En muchos casos la frecuencia relativa con que ha ocurrido un suceso, nos da una idea más precisa de la probabilidad de ese suceso que la obtenida considerando todos los resultados equiprobables*" (Texto [H], p. 196).

Esta indicación podría inducir a los alumnos a pensar que la frecuencia relativa de un suceso nos da una aproximación de la probabilidad de ese suceso en pocas pruebas (en este caso sólo 12), cuando sabemos por la ley de los grandes números, que son necesarios un gran número de pruebas para que esto ocurra. Así mismo, vemos que sugiere como característica de los experimentos aleatorios el hecho de que sean repetibles.

Concluye afirmando que una de las formas de asignar la probabilidad a un suceso es utilizando la frecuencia relativa del suceso en un número elevado de experiencias. Denomina a esta probabilidad, cuya asignación requiere la realización del experimento, probabilidad "a posteriori".

La diferenciación entre probabilidades a priori y a posteriori, como se mencionó anteriormente, suele hacerse en el contexto del teorema de Bayes y, en general, de cualquier proceso de inferencia bajo incertidumbre. Se conoce como probabilidades a priori las probabilidades asignadas inicialmente a los sucesos, antes de obtener una evidencia experimental por medio de una muestra. Las probabilidades condicionales de estos mismos sucesos, una vez realizado el experimento y en función de los datos obtenidos en cuestión, se denominan probabilidades a posteriori (Canavos, 1987).

2.5.3 CONCEPCION SUBJETIVA

En esta concepción, se considera que la probabilidad es una expresión de la creencia o percepción personal. Mide el grado de confianza de la persona que asigna probabilidades sobre la probabilidad de ocurrencia de un suceso, por lo cual la probabilidad ya no es considerada como una cualidad del suceso. Según esta teoría, defendida, entre otros por Ramsey, De Finetti y Savage, a cualquier fenómeno aleatorio, incluso no repetible, se le puede asignar una probabilidad, que se rige por unos criterios de coherencia definidos por De Finnetti.

Scholz y Waller (1983) indican que la probabilidad subjetiva se refiere a personas idealizadas. Estas son consistentes y están libres de contradicciones lógicas. Es admisible, sin embargo, imaginar personas idealizadas diferentes que no compartan su opinión sobre una misma situación y de ahí vienen las principales críticas a la postura subjetivista.

La concepción subjetivista también proporciona una interpretación para la probabilidad clásica: *"En las situaciones en las que el subjetivista cree que hay simetría, actuaría como si aceptase la probabilidad clásica"* (Fine, 1973; p. 234).

Para Godino y cols (1987), la probabilidad subjetiva puede ser un precursor fundamental para la comprensión de la concepción formal enseñada en la Universidad, ya que permite al sujeto modificar sus previsiones iniciales en función de los resultados experimentales. Los elementos intensionales del significado que hemos asignado "a priori" a esta concepción de probabilidad son los siguientes:

PS1: *La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.*

PS2: *La probabilidad del suceso seguro es 1.*

PS3: *La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de estos sucesos.*

PS4: *La asignación de probabilidades no se basa en la repetibilidad del experimento.*

PS5: *Los sucesos elementales pueden o no ser equiprobables.*

PS6: *El espacio muestral puede o no ser finito.*

PS7: *La probabilidad es un valor subjetivo. Depende no sólo del suceso sino del conocimiento del sujeto sobre el fenómeno.*

Se conservan ahora los elementos de significado PS1, PS2, PS3, PS5 y PS6 respecto a la concepción frecuencial. Respecto a PS4 hacemos la misma consideración que respecto a la acepción clásica: La repetibilidad no es una condición esencial para asignar la probabilidad a los sucesos. Los elementos PS6 y PS7 suelen ser soslayados.

Podemos considerar que esta nueva acepción amplía las dos anteriores, porque incorpora el conocimiento de la persona para la asignación de las probabilidades. Sin embargo, este es un punto aún en debate y el principal punto de desacuerdo entre subjetivistas y objetivistas.

Son pocos los textos en los que se presenta este enfoque de la probabilidad. En [A], en la introducción dedicada al capítulo de probabilidad, propone dos ejemplos: Uno sobre lanzamiento de dos dados y otro sobre la probabilidad de que un determinado país obtenga la medalla de oro en la prueba de los 100 m. masculinos en las próximas olimpiadas, que utiliza como pretexto para introducir la noción de probabilidad subjetiva:

> "*Sin embargo, en cada caso nos referimos a un tipo diferente de juicios de "probabilidad". Así, el primero es un ejemplo de lo que podríamos llamar juicio de probabilidades "a priori" y está relacionado con el cálculo matemático de probabilidades; el segundo es un ejemplo de lo que, a falta de mejor expresión, llamaríamos un juicio de credibilidad y es una medida del grado de confianza que tenemos en la verdad de una cierta afirmación o en el acaecimiento de determinado "suceso"* (Texto [A], p. 39).

En [B], indica que abundan las situaciones en que no es posible predecir si un determinado hecho se producirá o no y que en muchos casos, lo único que se puede hacer es calcular el mayor o menor grado de seguridad que se puede tener en que se produzca el hecho deseado o no deseado:

> *"Este mayor o menor grado de seguridad es lo que se llama PROBABILIDAD del hecho (también se dice suceso) en cuestión"* (Texto [B], p. 27).

En [J] es el texto en que hemos encontrado de modo más explícito una concepción subjetiva de la probabilidad. Contiene incluso un apartado que habla de "*grado de confianza*" de los distintos sucesos de una experiencia aleatoria:

> "*Hemos dicho que, al realizar una experiencia aleatoria, no sabemos qué resultado saldrá; por consiguiente, tampoco podemos saber qué suceso ocurrirá, Pero, evidentemente, unos sucesos nos merecen más confianza que otros*" (Texto [J], p. 293).

Sigue indicando la forma de cuantificar el grado de confianza, mediante la asignación de valores numéricos a los sucesos, de acuerdo con los axiomas de la probabilidad:

> "*Vamos a cuantificar el grado de confianza que nos merezcan los distintos sucesos de una experiencia aleatoria. Para ello, empezaremos asociando un número a cada resultado posible, del modo siguiente:*
> *Cada número debe ser positivo, mayor que cero y menor que 1; además, la suma de todos los números debe ser igual a 1.*
> *Es decir, efectuamos un reparto proporcional del número 1 entre todos los resultados posibles; a este reparto lo llamamos aplicación frecuencial.*
> *Para una misma experiencia aleatoria podríamos definir muchas aplicaciones frecuenciales, pero en cada caso procuraremos utilizar la que esté más de acuerdo con la frecuencia relativa que tendría cada resultado si repitiéramos la experiencia muchas veces*" (Texto [J], p. 293).

En esta explicación encontramos varias transformaciones inadecuadas del saber matemático que podrían inducir concepciones incorrectas en los estudiantes. Por un lado se sugiere que, para asignar probabilidades, es preciso repartir proporcionalmente el número 1 entre todos los resultados posibles, sin indicar sobre la base de qué propiedad podría efectuarse este supuesto reparto proporcional.

Consideremos, por ejemplo, el experimento aleatorio consistente en lanzar al aire una chincheta y observar el resultado, o el consistente en aprobar/suspender un examen. Es claro que en estos ejemplos no podría aplicarse el principio de indiferencia, por lo que una aplicación de la regla sugerida llevaría a una asignación incorrecta de probabilidades. En todo caso, esta regla no tiene sentido en un espacio muestral infinito. Aunque se elige una concepción subjetiva para definir la probabilidad, al final se da una regla de cálculo con la llamada aplicación frecuencial (p. 293). Finalmente utiliza esta aplicación frecuencial para definir la probabilidad de un suceso:

> "*A cada suceso le asignamos un número, obtenido sumando las imágenes de cada uno de sus elementos en la aplicación frecuencial. Este número recibe el nombre de probabilidad del suceso*" (Texto [J], p. 296).

En [I] hay dos ejercicios propuestos que responden a la concepción subjetiva, que son los siguientes:

> "5. *Inventa un suceso de cada tipo:*
> *a) muy probable o casi seguro; b) medianamente probable; c) poco probable; d) casi imposible.*
> *6. Califica de casi seguro, probable, poco probable o casi imposible, cada uno de los siguientes sucesos:*
> *a) Que un equipo de primera división gane su encuentro de la semana;*
> *b) Que ese mismo equipo gane algún encuentro de la temporada;*
> *c) Acertar la lotería primitiva haciendo una única apuesta;*
> *d) Obtener doble 6 al lanzar dos dados"* (Texto [I], p. 228).

En [K] encontramos en la introducción al tema de la probabilidad una mención implícita de la concepción subjetiva de ésta:

> "*Con frecuencia utilizamos en el lenguaje corriente la palabra "probabilidad"*; así, por ejemplo: "*Parece probable que el Real Madrid elimine al Hamburgo" o "es probable que mañana no pueda venir", etc.*
> *Cuando decimos esta frase queremos expresar que no estamos totalmente seguros de la afirmación, pero que tenemos cierta confianza de que así se produzca*" (Texto [K], p. 408).

El resto de los libros de texto analizados no tratan la concepción subjetiva de la probabilidad.

2.5.4 CONCEPCIÓN FORMAL

Hawkins y Kapadia (1984), hablan de probabilidad formal cuando ésta se calcula con precisión usando las leyes matemáticas de la teoría axiomática correspondiente. Esta teoría es debida a Kolmogorov. Su desarrollo teórico se basa en la teoría de la medida y surgió como reacción frente a las inconsistencias y paradojas mostradas por las definiciones anteriores.

Aunque la aproximación formal nos proporciona el único modo de obtener una definición inequívoca de la probabilidad y de superar las circularidades e inconvenientes ya citados en los otros enfoques, Godino y cols. (1987) sugieren que este enfoque es inadecuado en los primeros niveles de enseñanza, debido a la complejidad de la teoría matemática subyacente. Sin embargo, este enfoque se presenta en un gran número de textos analizados.

Los elementos intensionales del significado asociados a esta concepción de probabilidad que vamos a considerar en nuestro análisis son los siguientes:

PA1: *La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.*

PA2: *La probabilidad del suceso seguro es 1.*

PA3: *La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de estos sucesos.*

PA4: *Es preciso dotar al conjunto de sucesos con las operaciones de unión e intersección de una estructura de álgebra de Boole para poder definir la probabilidad sobre esta álgebra de sucesos.*

PA5: *La probabilidad es una función matemática definida en el álgebra de sucesos, que toma valores reales (en el intervalo [0,1]). Esto quiere decir que podemos asociar una probabilidad a un suceso sólo si es un elemento del álgebra de sucesos*. (Teóricamente sería posible definir experimentos y sucesos especiales a los cuales no pudiéramos asociar una probabilidad, aunque tales sucesos no tienen interés desde el punto de vista practico).

PA6: *La probabilidad es una función de conjuntos, normada, numerablemente aditiva.* Esta propiedad implica los axiomas 1 a 3 y además la extensión del tercero al caso de unión numerable de sucesos.

PA7: *El espacio muestral puede ser finito o no*.

PA8: *No se requiere la repetibilidad del experimento para la asignación de probabilidades.*

PA9: *Los sucesos elementales pueden o no ser equiprobables*.

Esta definición axiomática resuelve las inconsistencias de las definiciones anteriores: La probabilidad es cualquier función definida en el álgebra de sucesos, que satisfaga las propiedades PA1 a PA3. Engloba todas las concepciones que hemos presentado anteriormente, puesto que éstas satisfarían las condiciones exigidas. Por ello, la axiomática de Kolmogorov ha sido aceptada por los seguidores de las diversas tendencias. Su gran éxito fue también debido a que logró conectar el cálculo de probabilidades en la tendencia general de la matemática de su tiempo, apoyada en la teoría de conjuntos y conectada con la teoría de la medida. Al fin y al cabo, en esta visión la probabilidad no es más que una función y el concepto de función ha sido uno de los más generales y fecundos en la matemática del siglo XX.

Sin embargo, en esta aproximación sigue sin resolver el problema de las aplicaciones: Cómo asignar las probabilidades iniciales a los sucesos y cuál es la naturaleza de estas probabilidades. En consecuencia, los debates filosóficos asociados al tema continúan, especialmente entre los seguidores de las escuelas objetivista y subjetivista de la probabilidad, que también tiene sus implicaciones sobre la concepción y aplicación de la inferencia estadística.

Hemos encontrado el enfoque formal de la definición de la probabilidad en un número apreciable de textos analizados, presentando generalmente los elementos de significado PA1 a PA6.

En [A], después de definir las frecuencias absoluta, relativa y sus propiedades afirma que:

"*Nuestro objetivo es ahora definir una aplicación del conjunto B en el conjunto de los números comprendidos entre 0 y 1, de forma que a cada elemento de B le asigne un número x* ($0 \le x \le 1$).
Así, por ejemplo, diremos que al suceso elemental "obtener 1" le asignamos el número 1/6. Más adelante veremos cómo se calcula dicho número" (Texto [A], p. 47).

En consecuencia se presenta la probabilidad usando la idea de función (aplicación). Puesto que la definición no proporciona un método de cálculo por sí misma, soslaya este problema, dejándolo para más adelante, donde se introducirá la regla de Laplace. Pero, en esta regla, hay que admitir la equiprobabilidad de los sucesos, para poder asignarles una probabilidad. Para introducir la noción de probabilidad aporta la siguiente definición, que coincide prácticamente con la que podríamos hallar en cualquier texto universitario:

"*B) Definición axiomática de la probabilidad:*
Sea E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y sea B el espacio de sucesos asociado a dicho experimento aleatorio. Admitimos que cualquier suceso $S \in B$ *cumple los siguientes axiomas:*

1. A cualquier suceso $S \in B$ se le puede asociar un número no negativo $p(S)$ que se llama probabilidad de dicho suceso.
2.Si S_1, S_2, ...,Sn son sucesos incompatibles dos a dos, se verifica:
$p(S_1 \cup S_2 \cup \ldots\ldots \cup Sn) = p(S_1) + p(S_2) + \ldots\ldots + p(Sn)$
3. La probabilidad del suceso seguro, E, es $p(E)= 1$.
El conjunto formado por el espacio muestral E, el conjunto de sucesos y la aplicación se llama espacio probabilístico y se representa por (E, B, p)" (Texto [A], p. 47).

Resaltamos también la complejidad conceptual de esta definición, puesto que el conjunto inicial de esta aplicación es el álgebra de sucesos. Se trata, en consecuencia, no de una función de variable real, como las que el alumno está acostumbrado a manejar, sino de una función de conjuntos con imagen real. A pesar de esta dificultad conceptual, hemos encontrado definiciones similares en otros textos.

En [C], después de comentar brevemente las concepciones frecuencial y clásica, introduce la definición axiomática de la probabilidad de la siguiente forma:

"*La probabilidad, determinada por el procedimiento que sea, es, por tanto, un número que asociamos a cada suceso.*

$$P: S \longrightarrow Q$$

Es una aplicación que hace corresponder a cada suceso un número racional (hemos llamado S al conjunto de todos los sucesos).
A la vista de lo que ocurría con las frecuencias relativas, a la probabilidad le exigimos las siguientes propiedades:
1. $P(S) \geq 0$, cualquiera que sea el suceso S.
2. $P(E) = 1$
3. Si S_1 y S_2 son disjuntos, $P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2)$
A partir de estas propiedades asignadas por imposición (axiomas) se deducen otras, similares a las de las frecuencias relativas" (Texto [C], p. 73).

Observamos aquí, que se restringe la probabilidad a valores racionales, lo cual no es cierto, en general. Un suceso puede tener como probabilidad un número irracional. Baste recordar que el famoso problema de la aguja de Buffon está relacionado con el cálculo del número π.

En [F], después de comentar los conceptos de frecuencias absoluta, relativa y las propiedades de las frecuencias relativas, introduce la probabilidad mediante la definición axiomática de la siguiente forma:

"*Sea P(E) un espacio de sucesos y R el cuerpo de los números reales.*
Se llama probabilidad a una aplicación $p: P(E) \longrightarrow R$ que verifica los axiomas siguientes (ver figura):
Axioma 1: Para todo suceso $A \in P(E)$: $0 \leq p(A) \leq 1$.
Axioma 2: $p(E) =1$.
Axioma 3: Para todo par de sucesos A y B incompatibles, $p(A \cup B)= p(A) + P(B)$.
Es importante señalar que estos axiomas han surgido de observar el comportamiento de las frecuencias relativas.
Se llama espacio probabilístico a la terna (E,P(E),p), donde:
E es el espacio muestral.
P(E) es el álgebra de Boole delos sucesos de E.
p es la probabilidad" (Texto [F], p. 228).

Definiciones similares se presentan en [G] y en [K]. El resto de los libros no presenta esta concepción.

2.5.5 OTROS ASPECTOS CONCEPTUALES DE PROBABILIDAD

Probabilidades geométricas.

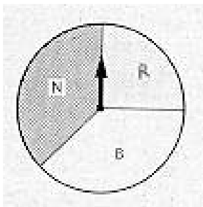
El concepto de probabilidad como medida permite resolver problemas de probabilidades geométricas. El sentido es que si E es una región con una medida conocida, la probabilidad de que un punto elegido al azar pertenezca a un subconjunto A de E es el cociente entre la medida de A y la medida de E.

No se trata de una nueva concepción de la probabilidad, sino de un caso particular de la definición general de probabilidad como medida (función de conjunto, normada, numerablemente aditiva). En algunos libros de texto hemos encontrado este tipo de problemas y ejemplos.

En los ejercicios y ejemplos de [J], uno de los contextos más utilizados son los geométricos, a partir de una ruleta como el que sigue a continuación:

" Ejemplo 1
Para la ruleta del gráfico:

Figura 2.5.5.1



el conjunto de resultados posibles es =(Rojo, Blanco, Negro), con la siguiente aplicación frecuencial:

Rojo → *1/4*
Blanco → *3/8*
Negro → *3/8*

¿Cuál es la probabilidad del suceso C = (Blanco, Negro)?
Calcularemos dicha probabilidad sumando las imágenes frecuenciales de los dos elementos del suceso:
p(C) = 3/8 + 3/8 = 6/8 = 3/4 " (Texto [J], p. 296).

El resto de los textos no incluye este tipo de contextos.

Concepciones subyacentes sobre la probabilidad.

Hemos visto que, usualmente, los textos analizados presentan más de una concepción de la probabilidad, bien en forma explícita o implícita.

Sin embargo, por lo general, suele observarse una concepción dominante, bien porque sea la que se presenta en el ámbito de definición, bien por el uso que se hace de la misma en los ejemplos y ejercicios propuestos. A continuación vamos a describir estas concepciones dominantes en los textos analizados.

En [J] destaca la aproximación frecuencial de la probabilidad. Se usa el término "aplicación frecuencial", ya analizado, que podría inducir una concepción errónea sobre la probabilidad.

Tabla 2.5.1. Presentación de las distintas concepciones de probabilidad en los textos analizados

	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]	[F]
Concepción clásica	Cociente entre casos favorables y posibles (p. 50)	Cociente entre casos favorables y posibles (p. 28) No menciona regla de Laplace	Cociente entre casos favorables y posibles (p. 72) No menciona regla de Laplace	Cociente entre casos favorables y posibles (p. 77)	Cociente: k/n (p. 177) No menciona regla de Laplace	Cociente entre casos favorables y posibles (p. 229)
Concepción frecuencial			El valor al cual se aproxima la f. r.de un suceso tanto como queramos (p. 72)	Al aumentar el nº de exp. la f.r. de un suceso tiende a estabilizarse alrededor de un nº (p. 76)	Estimación teórica de la f. r. de un suceso (p. 177)	
Concepción subjetiva	Medida del grado de confianza que tenemos en la verdad de una cierta afirmación o en el acaeci-miento de un suceso. (p. 39)	Mayor o menor grado de seguridad que se puede tener en que se produzca el hecho deseado o no deseado (p. 27)				
Definición formal	Una aplicación que asocia a cada suceso un nº no negativo y cumple axiomas (p. 47)		Una aplicación: a cada suceso un nº racional. Le exigimos unas propiedades (p. 73)			Una aplicación: a cada suceso un nº real, que cumple los axiomas (p. 228)
Concepción que inducen	Cociente entre casos favorables y posibles Aplicación Medida del grado de confianza	Cociente entre casos favorables y posibles Grado de seguridad.	Cociente entre casos favorables y posibles Nº al que tienden las f.r. Aplicación en Q	Cociente entre casos favorables y posibles Nº al que Tienden las f.r.	Cociente Estimación Teórica de las f.r.	Cociente entre casos favorables y posibles Aplicación en R

En [I] se emplean predominantemente los enfoques clásico y frecuencial. La probabilidad de un suceso queda identificada con el número a que tienden las frecuencias relativas y con el cociente entre casos favorables y casos posibles (Regla de Laplace), que es la más utilizada en todos los ejemplos y ejercicios. Estos dos enfoques son también los predominantes en [H].

Tabla 2.5.2. Presentación de las distintas concepciones de probabilidad en los textos analizados

	[G]	[H]	[I]	[J]	[K]
Concepción clásica	Cociente entre casos favorables y posibles (p. 205)	Cociente entre casos favorables y posibles (p. 192)	Cociente entre casos favorables y posibles (p. 244)		Cociente entre casos favorables y posibles (p. 416)
Concepción frecuencial	Implícitamente (p. 204) Como frecuencia de un suceso cuando el nº de pruebas se repite ilimitadamente.	Frecuencia relativa para asignar probabilidades. (p. 197)	Cuando n1 de observaciones aumenta la f. Relativa del suc. Asociado se va acercando más y más hacia un cierto valor (p. 236)	Asignación con probabilidades	Con frecuencia relativa.
Concepción subjetiva				Como grado de creencia (p. 293)	De forma implícita: Tenemos cierta confianza (p. 408)
Definición formal	Una aplicación p:[P(H),A]->R que obedece axiomas (p. 207)			Asignación con probabilidades	Una aplicación del álg. Boole de sucesos en R, que verifica axiomas (p. 412)
Otras			Término medio (p. 227)	Reparto pro-porcional: Aplicación fre cuencial. (p. 293) Probabilidades geométricas. Implícitamente	
Concepción que inducen	Cociente casos favorables/casos posibles Aplicación de álgebra Boole en R.	Cociente casos favorables/casos posibles Nº al que tienden las frec. relativas	Cociente casos favorables/casos posibles Nº al que tienden las frec. relativas	Aplicación frecuencial	Cociente casos favorables/casos posibles Nº al que tienden las frec. relativas Aplicación de álgebra Boole en R. Cierta confianza.

En [K], a pesar de que en el capítulo aplicado a la probabilidad, presenta una breve referencia a las concepciones frecuencial y clásica, todo el desarrollo del tema y de las propiedades lo basa fundamentalmente en la concepción formal empleando abundante notación formalizada. Aparece el concepto de "espacio de sucesos" e identifica la probabilidad fundamentalmente con una aplicación.

En [G], se razona que la definición rigurosa de probabilidad es la axiomática, *"Inaceptable el concepto intuitivo de probabilidad, por las razones antes expuestas, Kolmogorov, en 1933, estableció la probabilidad de un modo axiomático"* (p. 207). Sin embargo, en los ejemplos resueltos utiliza generalmente la regla de Laplace, por lo que esta concepción también es predominante en este texto. Finalmente en [C], [E],y [F] se presentan varias de estas concepciones no dándose en especial más importancia a ninguna de ellas sobre el resto. Esta información se resume en las tablas 2.5.1. y 2.5.2.

2.5.6 CONCLUSIONES SOBRE LA PRESENTACIÓN DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD EN LOS TEXTOS

Como consecuencia del estudio anterior, obtenemos las siguientes conclusiones, sobre la presentación en los libros de texto analizados, del concepto de probabilidad.

1. Ningún texto trata todas las concepciones, y en general se omiten algunos elementos de significado asociados a las mismas en las concepciones expuestas.

2. **La concepción clásica** es tratada en todos los textos analizados, excepto en [J]. Todos ellos la definen como el cociente entre el número de casos favorables y el de casos posibles, aunque algunos no mencionan explícitamente la regla de Laplace. ([B], [C], y [E].

Prácticamente ninguno habla de los problemas de circularidad en esta concepción de la probabilidad. Sólo [G], menciona que esta concepción es completamente insuficiente desde un punto de vista matemático (p. 205).

A pesar de que se enuncia que para poder aplicar la regla de Laplace los sucesos elementales del experimento han de ser equiprobables, no se insiste lo suficientemente en que sólo se aplica en estos casos, pudiendo llevar a los alumnos a aplicar esta regla en otros casos que no proceda. Así mismo se han observado fenómenos de cambio de terminología de algunos conceptos, como en [D] donde se habla de "espacios uniformes".

3. **La concepción frecuencial** la tratan todos los textos analizados, excepto [A], [B] y [F].

De los textos que la tratan todos hablan de frecuencias relativas. Sobre el número de experimentos necesarios para el cálculo de la probabilidad frecuencial, el tema se soslaya generalmente:

" Tanto como queramos" Texto [C].

"Ilimitadamente" Texto [G]

Cuando hablan del valor al que tienden las frecuencias relativas no explican claramente la diferencia entre la convergencia de sucesiones con la que los alumnos se encuentran más familiarizados y la convergencia estocástica.

Creemos que en la concepción frecuencial se debe explicar mejor la forma en que las frecuencias relativas tienden hacia un valor determinado, y la problemática asociada al número de experimentos necesarios en la determinación de la probabilidad.

4. **La concepción subjetiva** sólo la tratan cuatro textos de los analizados utilizando las siguientes expresiones:

"Medida del grado de confianza" Texto [A].

"Mayor o menor grado de seguridad" Texto [B].

"Grado de creencia" Texto [J].

"Tenemos cierta confianza" Texto [K].

En la concepción subjetiva, hay gran disparidad de criterios. En caso de incluirla habría que explicarla mejor, e insistir en que el valor asignado a la probabilidad depende de la información de cada persona.

5. **La concepción formal** se contempla aproximadamente en la mitad de los textos analizados, a pesar de su complejidad.

Quienes la tratan lo hacen casi todos de la misma forma, que los textos de primeros cursos de Universidad. Como excepciones citamos al texto [A], que sólo habla de asignar un número entre 0 y 1 y [C] quien habla de una aplicación del espacio de sucesos en Q, haciendo una restricción innecesaria de la probabilidad a valores racionales.

Hacen mención al espacio probabilístico: [A], [F] y [K]. Creemos que la concepción formal no es adecuada a este nivel de 1º de BUP (14-15 años), y por tanto no debería ser tratada.

Finalmente las **probabilidades geométricas**, sin mencionar explícitamente su nombre, sólo se tratan en [J], aunque por ser un contexto muy rico y relacionado con la idea de fracción pensamos que podría utilizarse más.

2.6. PROBABILIDAD CONDICIONAL. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA. EXPERIMENTOS COMPUESTOS

En esta sección se analizan varios conceptos que, generalmente, aparecen ligados en los manuales escolares, debidos a su estrecha interconexión. Se trata de los conceptos de dependencia e independencia, probabilidad condicional y probabilidades en experimentos compuestos. El orden con que se presentan en los textos varía ligeramente, ya que, como hemos indicado, al estar ligados entre sí estos conceptos no puede prescindirse de uno de ellos para introducir el resto.

2.6.1. PROBABILIDAD CONDICIONAL

El concepto probabilidad condicional, es fundamental, tanto para la noción de independencia, como para poder definir la probabilidad en experimentos compuestos. Según Heitele (1975) la probabilidad condicional mide el cambio en el grado de nuestras creencias en función de la nueva información. Puesto que, como hemos razonado anteriormente, la aleatoriedad no es una propiedad de los objetos o fenómenos, sino un modelo que aplicamos en su análisis, en situaciones concretas este modelo puede ser reforzado por nuestro conocimiento complementario sobre la situación. Este es el punto de vista de la escuela bayesiana, donde todas las probabilidades son condicionales, y que postula una aproximación diferente a la inferencia estadística, lo que indica la importancia de este concepto dentro de esta escuela.

Si A y B son dos sucesos en un espacio muestral E y B tiene probabilidad no nula, entonces definimos la probabilidad de A condicionada por B como la probabilidad de que, habiendo ocurrido B se verifique también A, es decir, la probabilidad de A condicionada por B viene dada por la fórmula siguiente, supuesto $p(B) \neq 0$:

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Como vemos en esta definición, si ocurre B, la probabilidad de A se evalúa en un espacio muestral reducido. Puede demostrarse que la probabilidad condicional cumple los axiomas de probabilidad.

A pesar de su importancia, este concepto no siempre es correctamente comprendido. Falk (1988) describe las siguientes dificultades con relación a la idea de probabilidad condicional:

a) Confusión entre condicionamiento y causación: Con frecuencia la probabilidad condicional se interpreta como la probabilidad de que el suceso B produzca u ocasione el suceso A. No sólo esta interpretación es inadecuada, sino que puede dar lugar a no considerar la pertinencia de calcular la probabilidad condicionada, cuando los sucesos intervinientes no tienen una relación de tipo causal. Este tipo de sesgo también se pone de manifiesto en los estudios sobre la forma en que los sujetos perciben la asociación entre variables. Por ejemplo, Estepa (1994) ha puesto de manifiesto cómo algunos alumnos confunden correlación y causalidad, denominando a este fenómeno "*concepción causal de la asociación estadística*".

b) Dificultad en saber elegir el suceso que actúa como condición en los problemas sobre probabilidad condicional. Esta es una dificultad que se manifiesta especialmente en la resolución de problemas de enunciado verbal, donde el alumno percibe que está trabajando con probabilidades. Sin embargo le es difícil diferenciar si se trata de probabilidades simples, compuestas o condicionales. En caso de identificar la probabilidad condicional, confunde con frecuencia el suceso que actúa como condición.

c) Confusión entre las probabilidades P(A/B) y P(B/A), denominada por Falk como la confusión de la inversa. Por ejemplo, confundir la probabilidad de tener los ojos azules si se es rubio y la probabilidad de ser rubio, teniendo los ojos azules. Este error también se muestra en el caso particular del nivel de significación en un contraste de hipótesis (Vallecillos, 1994) donde se confunde la probabilidad de rechazar una hipótesis falsa con la probabilidad de que la hipótesis sea falsa, una vez que la hemos rechazado. La primera es el nivel de significación. La segunda no puede ser calculada en un paradigma de inferencia clásica, pero, a pesar de ello, los investigadores experimentales confunden con frecuencia estas dos probabilidades condicionales.

d) Creer en la existencia de un "*suceso condicionado A/B*", mientras que lo que es condicionado es la probabilidad. Falk atribuye estos tres errores a la ambigüedad en el lenguaje coloquial que usamos en los enunciados verbales de los problemas probabilísticos, mientras que el lenguaje simbólico matemático de la probabilidad es mucho más preciso.

Como consecuencia de nuestro análisis anterior, los elementos intensionales del *significado de la probabilidad condicional que hemos identificado son los siguientes:*

CO1: Si A y B son dos sucesos en un espacio muestral E, definimos la probabilidad de A condicionada por B, como el cociente entre la probabilidad de la intersección de A y B y la probabilidad de B, es decir, mediante la fórmula siguiente:

CO2: La probabilidad del suceso condicionante P(B) debe ser distinta de cero para poder definir la probabilidad condicional.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

CO3: P(A/B) $\neq$ P(B/A), en general; es decir la probabilidad condicional cambia cuando se invierte el papel de los dos sucesos que intervienen en la misma.

CO4: En la definición de probabilidad condicional intervienen dos sucesos A y B. Lo que se condiciona es la probabilidad y no el suceso.

CO5: 0 $\leq$ P(A/B) $\leq$ 1; La probabilidad condicional toma un valor comprendido entre 0 y 1.

CO6: P(E/B) = 1; La probabilidad condicional del suceso seguro es igual a la unidad, sea cual sea el suceso que actúa como condición.

CO7: Si A $\cap$ C = $\varnothing$, P(A $\cup$ C/B) = P(A/B) + P(C/B); es decir, se mantiene el axioma de la adición de probabilidades de sucesos incompatibles.

A continuación analizamos si los libros de texto de nuestra muestra presentan cada uno de estos elementos de significado y el modo en que lo hacen.

Definición de probabilidad condicional

En primer lugar hemos analizado los puntos CO1 y CO2, es decir, si los libros de texto presentan la definición de probabilidad condicional y si indican que para poder definir este concepto, la probabilidad del suceso que aparece en el denominador debe ser distinta de cero.

Hemos encontrado la definición de probabilidad condicional en algunos libros, que puede ser explícita o implícita. En el primer caso, hemos encontrado dos variantes. Unos libros la definen directamente, como los textos [A] y [C]:

> "*A la probabilidad P(B/supuesto que ocurrió A) se le llama probabilidad de B condicionada a A. Se puede expresar, simplemente, P(B/A)"* (Texto [C], p. 76).

En otros casos, como [K], se dedica un apartado a la probabilidad condicionada, que se introduce a partir de la frecuencia relativa:

> "*Mediante un proceso de abstracción y teniendo en cuenta la relación que existe entre frecuencia relativa y probabilidad, obtenemos el concepto de probabilidad del siguiente modo.*
> *Definición:Se llama probabilidad condicionada del suceso B respecto del suceso A y denotaremos por p(B/A) al cociente:*

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}\ ,\quad p(A)\neq 0$$

Del mismo modo:

" (Texto [K], p. 418).

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)},\quad p(B)\neq 0$$

En otros casos, como en los libros [E] y [F], se hace mención de la probabilidad condicional, a través de un ejemplo, aunque sin nombrarla explícitamente:

"¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases al extraer dos cartas consecutivas de una baraja española? Sean A el suceso "sacar as en la primera extracción" y B el suceso "sacar as" en la segunda extracción. Los sucesos A y B no son independientes.

p (A) = 4/40

Si se realiza A quedan tres ases, y entonces la probabilidad de B es 3/39. En este caso, en vez de p(B) se suele escribir p(B/A), para indicar que el suceso B viene condicionado por el suceso A: p(B/A) = 3/39. Aquí se verifica:

$p(A\cap B) = p(A) . p(B/A) = 4/40 . 3/39 = 1/130$" (Texto [F], p. 232).

Como vemos en este ejemplo, se definen implícitamente varios conceptos: Probabilidad condicional, dependencia e independencia de sucesos. También se observa la ambigüedad del lenguaje, que podría dar lugar a confusión en los alumnos, ya que, en vez de indicar que la probabilidad del suceso B viene condicionada por el suceso A se dice que es el suceso B el que viene condicionado. Esto podría dar la falsa impresión de que estamos trabajando con una probabilidad simple y de una operación inexistente entre sucesos (condicionamiento, que no tiene sentido). Este texto [F], más adelante en el capítulo de estadística, dentro de un apartado que denomina "*Complementos y ampliación",* trata mediante un ejemplo y la definición los conceptos de probabilidad condicionada, de forma similar a otros textos ([F], p. 272).

Otra forma de introducir implícitamente la probabilidad condicional es a partir del experimento compuesto, como en el texto [I]:

"*Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, la probabilidad de que ocurra el suceso S_1 en la primera experiencia y S_2 en la segunda y ... y S_n en la n-ésima es: $p(S_1$ y S_2 y...y $S_n)$ = $p(S_1).p(S_2)... p(S_n)$. Para dos sucesos dependientes, la probabilidad de que ocurra el suceso S_1 en la primera y S_2 en la segunda es:*

$p(S_1$ y $S_2) = p(S_1)$. p (S_2 suponiendo que ha ocurrido S_1).

Para tres sucesos dependientes:

$p(S_1 y S_2 y S_3) = p(S_1).p$ (S_2/ocurrió S_1). $p(S_3$/ocurrió S_1 y ocurrió $S_2)$" (Texto [I], pp. 249-250).

Mientras en el ejemplo anterior se introducía la noción de probabilidad condicional a partir de un ejemplo particular, sin hablar en general de experimentos compuestos, en este caso, la definición tiene un carácter más general. En ninguno de los dos ejemplos se habla de probabilidad condicional, pero sí se usa la notación. En este último ejemplo, incluso se generaliza al caso de tres experimentos.

En [G] realiza una definición un poco forzada de la probabilidad condicionada, ya que en la misma introduce la definición de espacio probabilístico que no ha definido anteriormente, viéndose obligado a incluir una aclaración a pie de página. Así encontramos:

"*Sean A y B dos sucesos compatibles, no imposibles procedentes de la misma categoría de pruebas: $A\in P(H)$; $B \in P(H)$ $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$; $A \cap B \neq \varnothing$.*

Entiéndase que A es el subconjunto de H, formado por los i sucesos elementales: $A = \{h_1,h_2, ...,h_i\}$

Se denomina probabilidad de B condicionada a A -denotada p(B/A)- a la probabilidad de B sobre el *espacio probabilístico de A*" (Texto [G], p. 210).

A continuación justifica que" *la probabilidad de un suceso condicionado a otro es igual al cociente de la probabilidad de su intersección y la del condicionante"* (Texto [G], p. 211). Finalmente indicamos que en otros libros, aunque no hace mención explícita de la probabilidad condicionada, si aparecen ejercicios relacionados con ella, como el siguiente ejemplo:

> *"Sin embargo: P(A). P(sucede B habiendo sucedido A)=3/9.2/8=6/72 y esto es precisamente P(A y B), como hemos calculado anteriormente "* (Texto [H], p. 195).

Respecto a indicar que el suceso condicionante tiene que tener una probabilidad no nula, son pocos libros los que lo incluyen. En la definición de [K] y [E] se tiene en cuenta que p(A) y p(B), según el caso han de ser distintas de cero. En [F], se indica que p(A) $\neq 0$, que es la probabilidad que en la definición de p(B/A) figura en el denominador. El resto de los libros no analizan el hecho de que las probabilidades de los sucesos condicionantes han de ser distintas de cero. Asimismo, indicamos que en algunos libros ([B], [D] y [J]) no se introduce la probabilidad condicional.

Los dos sucesos que intervienen en la probabilidad condicional

Uno de los errores frecuentemente descritos sobre la comprensión de la probabilidad condicional es que los sucesos A y B a veces se intercambian o no se tiene conciencia de que P(A/B) $\neq$ P(B/A). Hemos buscado y sólo en el libro [G] se indica esta diferencia de valor que se obtiene y el diferente significado de estas dos probabilidades condicionales.

> "*Teorema 3. inversión de condiciones.El teorema de la probabilidad compuesta permite escribir para dos sucesos A y B, de la misma categoría de pruebas:*

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}; \qquad p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

p(A∩ B) = p(A). p(B/A); p(A∩B) = p(B). p(A/B); Igualando:

$$p(B/A)=\frac{p(B)\,p(A/B)}{p(A)}$$

puesta de la forma:

$$\frac{p(B/A)}{p(B)}=\frac{p(A/B)}{p(A)}$$

aparece una fórmula muy utilizada en la teoría de la información" (Texto [G], p. 214).

Respecto a aclarar que lo que se condiciona es una probabilidad y no un suceso, no solamente no se indica, sino que en algunos casos, como vimos antes en el texto [F], el lenguaje es bastante ambiguo y podría dar origen a la confusión descrita sobre la existencia de un "suceso condicionado" (Falk, 1988). Por ejemplo, en [A] hemos encontrado incluso una definición de suceso condicionado:

> *"Entonces, al suceso consistente en que se cumpla B (obtener bola blanca), habiéndose cumplido A, se le llama suceso B condicionado a la verificación del suceso A, y se escribe: B/A"* (Texto [A], p. 51).

Lo mismo ocurre en el libro [E], donde hemos encontrado la siguiente definición:
"El suceso "ser una chica, sabiendo que procede de1 1º A" lo simbolizaremos por H/A. Se calcula enseguida que p(H/A)=17/70 y que p(H/A) = 17/40. (La expresión H/A se lee "H condicionado a A")" (Texto [E], p. 179).

En el libro [G] no aparece esta definición, pero se hace referencia implícita al mismo:
"*La probabilidad de un suceso condicionado a otro es igual al cociente de la probabilidad de su intersección y la del condicionante*" (Texto [G], p. 211).

Esta confusión conceptual no aparece en el resto de los textos.

Axiomas de la probabilidad condicional

Sólo en un libro hemos encontrado estudiados con detalle los axiomas de probabilidad, aplicados al caso de la probabilidad condicional, aunque, consideramos justificado no incluir este aspecto, debido a que excesivamente formal para este nivel de los alumnos. Se trata del texto [G], donde se demuestra que "*la probabilidad condicionada es una probabilidad*" porque cumple la axiomática definitoria de la probabilidad.

Como resumen de nuestro análisis se presenta la tabla 2.6.1 con los elementos de significado asociados al concepto de probabilidad condicional. Cuando no son tratados aparece en blanco.No todos los libros incluyen el estudio de la probabilidad condicional y cuando lo hacen el estudio es muy restringido, lo que nos parece acertado en este nivel de enseñanza. Sólo en un caso se analiza el hecho de que la probabilidad condicional cumple los axiomas de probabilidad, lo cual, por otro lado nos parece adecuado a este nivel de enseñanza. E caso de incluir el tema observamos una variedad en la presentación que puede ser explícita o implícita y ser directa o bien a través de la frecuencia relativa condicional, o el experimento compuesto.

Tabla 2.6.1. Presentación de la probabilidad condicional en los libros analizados

Libros	CO1	CO2	CO3	CO4	CO5	CO6	CO7
[A]	Definición directa			Define Suc. Condicionado			
[B]							
[C]	Definición directa						
[D]							
[E]	Implícita Ejemplo	Explícito		Define Suc. Condicionado			
[F]	Implícita Ejemplo y Definición	Si		Lenguaje ambiguo			
[G]	Probabilidad Suceso condicionado		Explícito	Referencia implícita	Si	Si	Si
[H]	Ejercicios						
[I]	Implícita E. compuesto						
[J]							
[K]	Def. Fr. relativa	Explícito					

No se destaca el papel de los dos sucesos que intervienen en la probabilidad condicional ni el diferente valor de la probabilidad condicional cuando intercambiamos estos sucesos entre sí, con excepción del texto G. Creemos que este punto se debiera resaltar más, debido a las confusiones repetidamente señaladas sobre este punto en las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad.

2.6.2. INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA

Para Borovcnick, Bentz y Kapadia (1991) la independencia es el concepto que distingue la teoría de la probabilidad, de la teoría de la medida. Es parte de las definiciones fundamentales en esta rama de las matemáticas, pero no un axioma básico. Es una hipótesis clave en teoremas fundamentales, como el de Bernoulli, que establece un puente del enfoque estructural a la interpretación frecuencial y por ello la identificación de este concepto contribuyó a la aceptación rápida de la axiomática de Kolmogorov por la comunidad científica.

Con el concepto de independencia de ensayos similares es posible deducir una medida de probabilidad en el espacio producto con solo conocer la distribución de probabilidad en los espacios muestrales de cada experimento simple. Por ello se convirtió en una pieza clave en la axiomática de Kolmogorov. Para Freudenthal (1973) la independencia es un concepto fundamental en probabilidad, aunque indefinido, como lo son los puntos y rectas en geometría. Considera que una comprensión completa de la independencia no puede obtenerse en la escuela.

En los libros de texto usados en la enseñanza secundaria y universitaria se suele definir la independencia entre dos sucesos, a partir de la regla de multiplicación de probabilidades, del siguiente modo:

Definición 1. Dos sucesos A y B son independientes, si y solo si $P(A\cap B)=P(A).P(B)$, es decir, si la probabilidad de la intersección de los dos sucesos viene dada por las probabilidades simples de los sucesos considerados.

Una definición equivalente, salvo para el caso de que A o B tengan probabilidad 0, y que, Según Freudenthal (1973), es más conveniente desde el punto de vista didáctico es la siguiente:

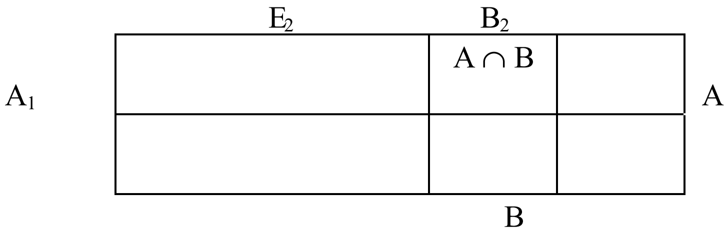
Definición 2: Dos sucesos A y B son independientes si y solo si $P(B/A)=P(B)$, es decir, si la probabilidad del suceso B no cambia cuando se añade la condición de que haya ocurrido el suceso A. En cualquiera de las dos definiciones puede mostrar con facilidad que la independencia o la dependencia es una relación simétrica. Esta propiedad se ve directamente en la definición 1 y se obtiene con ligeras manipulaciones de la definición 2. Esta última definición tiene el inconveniente que es preciso exigir que los sucesos tengan probabilidades no nulas (al menos el suceso A) para poder asegurar la existencia de las probabilidades condicionales.

Un problema con la definición 1 es cuando A y B son sucesos pertenecientes a distintos experimentos, por ejemplo cuando decimos que el resultado al lanzar una moneda es independiente del resultado obtenido al lanzar otra. Supongamos que en este caso el suceso A sea "obtener cara en la primera moneda" y el suceso B "obtener cara en la segunda". ¿Qué significaría $A\cap B$? La intersección de conjuntos sólo puede definirse sobre subconjuntos del mismo conjunto universal. Truran y Truran (1997) analizan este problema y la solución aportada por diversos autores.

Una solución dada por Feller es considerar los denominados "subconjuntos cilíndricos" y "subconjuntos rectangulares". Cuando se consideran dos espacios muestrales finitos E_1 y E_2, el espacio muestral del experimento compuesto sería el producto cartesiano E_1xE_2. En este caso, y si $A_1 \varepsilon E_1$ y $B_2 \varepsilon E_2$ podemos definir el conjunto cilíndrico A como A_1 x E_2 y similarmente el conjunto cilíndrico B como E_1 x B_2.

La definición de estos conjuntos cilíndricos permitirá suprimir las objeciones de que A y B deben ser miembros del mismo conjunto universal, para poder definir su intersección. Pero no resuelve el problema de la definición 1.

Cuando decimos $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ en el primer lado de la ecuación nos referimos al espacio producto. Pero para poder calcular P(A) o P(B) en el segundo lado, no es claro si nos estamos refiriendo en realidad a A_1 y B_2. La definición de independencia en el caso de espacios muestrales infinitos es algo más complicada, puesto que los conjuntos cilíndricos son solo una pequeña parte de todos los subconjuntos del espacio muestral. Sin embargo, por suerte, es suficiente asignar probabilidades a los conjuntos cilíndricos para determinar en forma única una extensión de esta probabilidad válida para todos los sucesos del espacio muestral producto.



Truran y Truran (1997) indican que el concepto de independencia puede referirse a sucesos o a experimentos aleatorios y que tiene un significado diferente en estos dos contextos. Sugieren distinguir estas dos situaciones como modo de superar las dificultades sobre el tema, dando las dos definiciones siguientes:

Independencia clásica: Se refiere a los sucesos que son subconjuntos de un mismo espacio de probabilidad. Dos sucesos A y B se dice que son independientes si y sólo si $P(A \cap B) = P(A).P(B)$. Esta definición hace claro que la independencia es una relación simétrica.

La forma $P(A/B) = P(A)$ hace claro que la probabilidad de obtener A a partir del subespacio de posibilidades B es la misma que la de obtener A a partir del espacio muestral completo. La independencia de A y B no implica falta o existencia de relación causal entre A y B o de un tercer suceso con A y B. La definición alternativa "A no produce efecto sobre B" ha producido mucha confusión entre dependencia /independencia y causalidad.

Independencia de experimentos: Para Truran y Truran (1997) la independencia de experimentos es una decisión subjetiva sobre si el resultado de un experimento aleatorio es o no influenciado por otro experimento aleatorio, posiblemente del mismo generador aleatorio. Lleva también a la multiplicación de probabilidades, pero no puede usar la notación conjuntista clásica (definición 1).

Dos experimentos X e Y con m y n resultados A_n y B_m son independientes si se juzga que ninguno de ellos tiene efecto sobre el otro. Esto significa que la probabilidad de que X produzca el resultado A_i y Y produzca el resultado B_j es igual a la probabilidad de que X produzca el resultado A_i multiplicada por la probabilidad de que Y produzca el resultado B_j.

Esta característica común de la multiplicación es lo que ha confundido la distinción entre los dos tipos de independencia. Sin embargo, la distinción es clara: la independencia de ensayos se refiere a la interrelación entre diferentes espacios probabilísticos y la independencia clásica a la de los resultados de un único experimento, lo que es mucho más sencillo.

Para Heitele (1975) la idea de independencia es más fundamental incluso que la de probabilidad condicional. Para este autor es una idea fundamental considerar independientes los experimentos aleatorios que no tienen conexión física. Sin embargo esto no resuelve el problema de las situaciones en donde las probabilidades de los elementos del espacio producto cartesiano se definen en modo que no todos los elementos son equiprobables. Esto explica la dificultad de aplicación de la idea de independencia, en los contextos prácticos, porque la decisión de considerar si realmente dos experimentos son independientes uno de otro es, hasta cierto punto, subjetiva. También muestra la discrepancia entre los modelos teóricos y su puesta en práctica. La idea de independencia expresada en la regla del producto es fácil de comprender, pero incluso los científicos entrenados en estadística tienen dificultad en reconocer si la independencia es aplicable o no en una situación práctica. Hawkins y cols.(1992) también indican que los estudiantes confunden a veces las ideas de sucesos excluyentes y sucesos independientes.

Para analizar estas definiciones de independencia hemos identificado los siguientes elementos intensionales del significado del concepto de independencia:

I1: Diferencia entre independencia de sucesos pertenecientes a un mismo espacio muestral (experimento simple) e independencia de experimentos.

I2: Dos sucesos A y B son independientes, si y sólo si la probabilidad de la intersección es igual al producto de probabilidades: $P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$.

I3: Si $P(A) \neq 0$, dos sucesos A y B son independientes si y sólo si la probabilidad de uno no varía cuando se condiciona por el otro: $P(B/A) = P(A)$.

I4: La relación de independencia/dependencia es simétrica.

I5: La relación de independencia/ dependencia <u>no</u> es transitiva.

I6: Dos experimentos son independientes si y solo si el resultado de cada uno de ellos no influencia el del otro.

I7: Si los sucesos A y B son dependientes $P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)$.

I8: Teorema de la probabilidad total. Sea E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y supongamos que en E existe una partición (que en teoría de la probabilidad se conoce como sistema completo de sucesos), es decir un conjunto de sucesos A_1 A_2 A_n, tales que:

$A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo i ? j;

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$.

En estas condiciones, para todo suceso $B \in E$ se cumple:

$P(B) = P(B/A_1).P(A_1) + ... + P(B/A_n).P(A_n)$.

I9: Teorema de Bayes: Sea E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y supongamos que en E existe una partición (que en teoría de la probabilidad se conoce como sistema completo de sucesos), es decir un conjunto de sucesos A_1, A_2, A_n, tales que: $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo i ? j;

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$.

En estas condiciones, para todo suceso $B \in E$ se cumple:

$$p(A_i / B) = \frac{P(B / A_i).P(A_i)}{P(B)}$$

El teorema de Bayes es el punto de partida de la inferencia bayesiana. Los sucesos A_i se interpretan como una serie de causas que podrían ocasionar la ocurrencia del suceso B. Las probabilidades P(B/Ai) se denominan "probabilidades a priori" o probabilidades de que cada una de las causas A_i produzca al suceso B. Las probabilidades $P(A_i/ B)$ se denominan " probabilidades a posteriori" o probabilidades de que haya ocurrido una causa dada, una vez se produce el efecto.

A continuación analizamos la presencia de cada uno de estos elementos de significado en los textos analizados.

Distinciones entre independencia de sucesos pertenecientes a un mismo espacio muestral (experimento simple) e independencia de experimentos.

Sólo hemos encontrado esta propiedad en el texto [I], en que, aunque explícitamente no se presenta, se trata implícitamente, puesto que se estudia tanto la independencia de sucesos, como la independencia de experimentos, que se presenta en la forma siguiente:

> *"Dos o más experiencias aleatorias se llaman independientes cuando el resultado de cada una de ellas no depende de los resultados de las demás. Dos o más experiencias aleatorias se llaman dependientes cuando el resultado de una de ellas influye en el desarrollo de la otra"* (Texto [I], p. 249).

No hemos encontrado ninguna referencia explícita a la distinción entre independencia de sucesos pertenecientes a un mismo experimento e independencia de sucesos pertenecientes a diferentes experimentos o independencia de experimentos en ninguno de los libros.

Definición clásica de independencia a partir del producto de probabilidades

Hemos analizado la definición consistente en que dos sucesos A y B son independientes si y sólo si $P(A\cap B) = P(A).P(B)$. En el libro [C], al final del apartado 6.5 sobre experimentos compuestos, incluye las nociones de dependencia e independencia de sucesos y de la probabilidad condicionada, de la siguiente forma que se ajusta a esta definición, aunque también aparece la idea más intuitiva de independencia como no influencia:

> *"En un experimento compuesto por dos pruebas, si cada una de ellas no influye sobre la otra, se dice que son independientes. En tal caso, si A es un suceso de la primera y B un suceso de la segunda, la probabilidad de que ocurran ambos es P(AyB) = P (A). P (B)"* (Texto [C], p. 76).

Definiciones que usan la regla del producto para definir la independencia se encuentran también en [A] y [F]. En [I] se generaliza a varias pruebas:

> "*Cuando varias experiencias aleatorias son independientes la probabilidad de que ocurra el suceso S_1 en la primera experiencia y S_2 en la segunda y ... y Sn en la n-ésima es: $p(S_1 \text{ y } S_2 \text{ y.. y } S_n) = p(S_1). p(S_2)... p(S_n)$"* (Texto [I], p. 249).

Estos resultados se generalizan para n sucesos independientes, afirmando que *"este resultado se conoce con el nombre de teorema de la probabilidad compuesta"*. (Texto [I], p. 420). En [E] y [K] se indica también el desarrollo de la fórmula de cálculo de la probabilidad compuesta en caso de independencia:

> "*Por tanto, si A y B son independientes, la fórmula (1) se transforma en esta otra:*
>
> $$p(B)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)} \quad \Rightarrow \quad p(B\cap A)=p(B).p(A)$$
>
> " (Texto [E], p. 180).

En [D], dedica un pequeño apartado que denomina *"Probabilidad compuesta de sucesos independientes"* donde aporta la siguiente definición, basada en la regla del producto de probabilidades:

> *"Cuando dos sucesos A y B son independientes, se llama probabilidad compuesta al producto de las probabilidades de los dos sucesos"* (Texto [D], p. 79).

Así mismo encontramos el siguiente ejemplo en que el alumno debería usar esta regla para el cálculo de la probabilidad pedida:

> *¿Qué probabilidad tenemos de sacar cara y 3 en el lanzamiento de simultáneo de una moneda y un dado?* (Texto [D], p. 79).

En [H], no aparece un apartado específico de experimentos compuestos, pero los trata a través de ejemplos y ejercicios como el que sigue, en los que los alumnos deben aplicar la regla del producto:

> *"En una urna hay 3 bolas rojas y 6 bolas verdes. Se extraen sucesivamente dos. Llamamos A ="sacar la 11 bola roja" y B = "sacar la 21 bola roja". Hallar P(A y B) en los casos siguientes: 1. Se devuelve la 10 bola. 2. No se devuelve la 10 bola*" (Texto [H], p. 195).

Concluye después de este ejemplo de la siguiente forma, que corresponde a la idea de independencia como no influencia:

> "*En general: Dos sucesos son independientes cuando la realización de cada uno de ellos no influye en la del otro. Si A y B son dos sucesos independientes: P(AyB) = P(A).P(B)* " (Texto [H], p. 195).

De los ejercicios relacionados con estos conceptos, tan solo hay tres que no se refieren a juegos de azar, éstos son: c), d), y e) de la p. 195. No tratan este elemento de significado los textos [B] y [J].

Definición a partir de la probabilidad condicional

Consiste en definir la independencia de sucesos de la forma siguientes: Dado que $P(A) \neq 0$, dos sucesos A y B son independientes si $P(B/A)=P(A)$. Hemos encontrado esta definición en los textos [A], [E], [F], [G] y [K], en forma más o menos parecida al siguiente ejemplo:

> *"Dos sucesos A y B de un mismo espacio probabilístico son independientes si: P(B)=P(B/A), siendo dependientes en caso contrario"* (Texto [G], p. 212).

En el resto de los textos no se incluye esta propiedad de los sucesos independientes, consistente en la invarianza de la probabilidad, cuando se condiciona por un suceso independiente del dado.

Propiedades de la relación de independencia

Hemos analizado si los libros de texto realizan o no una discusión de las propiedades que tiene la relación de independencia. Respecto a la propiedad simétrica sólo aparece en [A] y [G], como vemos a continuación:

> "*Teorema 1. La relación de independencia de sucesos es simétrica; es decir:*
> $\forall A \subset H, \forall B \subset H, P(B) = P(B/A) \Leftrightarrow P(A)=P(A/B)$ " (Texto [G], p. 213).

La segunda propiedad estudiada es que dos experimentos son independientes si el resultado de cada uno de ellos no influencia el del otro. En [C], concluye con la noción de independencia y dependencia de suceso, apoyándose para ello en los dos ejemplos mencionados anteriormente, de la siguiente forma:

"En un experimento compuesto por dos pruebas, si cada una de ellas no influye sobre la otra, se dice que son independientes. En tal caso, si A es un suceso de la primera y B un suceso de la segunda, la probabilidad de que ocurran ambos es P(A y B) = P(A).P(B)" (Texto [C], p. 76).

Similar análisis se presenta en [F]. En [E] se analiza la misma propiedad con un ligero matiz, pues se hace mención al cambio en la probabilidad:

"Si A y B son dos sucesos de probabilidad no nula y la realización de A no varía la probabilidad de que se realice al mismo tiempo B, se dice que A y B son independientes. En tal caso se tiene p(B/A) = p(B)" (Texto [E], p. 180).

No se hace mención a la falta de transitividad de la relación de independencia, lo cual también es explicable por el espacio limitado dedicado al tema.

Propiedades de la relación de dependencia

Hemos encontrado un estudio de algunas de estas propiedades en el texto *[I] que* dedica un apartado a la composición de experiencias independientes y dependientes. Primeramente nos referimos a que si los sucesos A y B son dependientes $P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)$:

"Para dos sucesos dependientes, la probabilidad de que ocurra el suceso S_1 en la primera y S_2 en la segunda es: p (S_1 y S_2) = p(S_1). p (S_2 suponiendo que ha ocurrido S_1). Para tres sucesos dependientes: p(S_1 y S_2 y S_3) = p(S_1).p(S_2 /ocurrió S_1). p(S_3/ocurrió S_1 y ocurrió S_2)" (Texto [I], pp. 249-250).

Asimismo, aparece el estudio de ese punto en el libro [K], como podemos ver en el siguiente ejemplo:

"De las dos relaciones anteriores se obtiene:

$$p(A \cap B) = p(A) \,.\, p(B/A)$$
$$p(A \cap B) = p(B) \,.\, p(A/B)$$

La probabilidad de suceso intersección es igual a la probabilidad de uno de ellos, supuesta no nula, por la probabilidad del otro condicionada a la realización de la anterior" (Texto [K], p. 418).

En [C] aparece esta propiedad en la forma siguiente:

"Si las pruebas no son independientes, P (A y B) = P (A). P (B/supuesto que ocurrió A).
A la probabilidad P (B/supuesto que ocurrió A) se le llama "probabilidad de B condicionada a A". Se puede expresar, simplemente, P (B/A)" (Texto [C], p. 76).

Una segunda propiedad es que, si dos sucesos A y B son dependientes, se verifica que $p(B) \neq p(B/A)$. En [A] continúa con la definición de sucesos dependientes e independientes como sigue:

"Si $p(B/A) \neq p(B)$, se dice que el suceso B es dependiente de A. Si $p(B/A)=p(B)$, se dice que el suceso B es independiente del suceso A y se tiene: $p(A \cap B) = p(A).p(B)$ (Texto [A], p. 52).

Aporta la misma definición para el caso p(A/B) y concluye que *"Esta última fórmula recibe el nombre de fórmula de la probabilidad compuesta." (Texto [A], p. 52)*. En [K], aparece en forma similar (p. 420). En [G], Define la independencia y dependencia de sucesos enunciando y demostrando algunos teoremas relativos a la independencia de sucesos como el siguiente:

"*Teorema 2. Dos sucesos incompatibles, no imposibles, nunca son independientes*" (Texto

[G], p. 213).

En [B], y en [D] no menciona nada en relación con este concepto.

Probabilidad total y teorema de Bayes.

Estos dos conceptos sólo son tratados en el texto [A]. Dentro de un apartado denominado "Fórmulas de Bayes", introduce en primer lugar, el teorema de la probabilidad total, sin mencionar su nombre, y a continuación el teorema de Bayes:

"4.10. Fórmulas de Bayes:

Sean A_1, A_2, A_3, tres sucesos incompatibles asociados a un experimento aleatorio, tales que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E$, siendo E el espacio muestral o suceso seguro, y sea B un suceso cualquiera (Figura 25b). Se tiene:

$B= B \cap E = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3)= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$

Luego, $p(B)= p(A_1 \cap B)+p(A_2 \cap B)+p(A_3 \cap B)$*"* (Texto [A], p. 53).

A continuación después de una breve demostración, concluye así:

"Y sustituyendo p(B) por su valor de la fórmula (5), resulta:

$$p(A_1/B)=\frac{p(A_1).p(B/A_1)}{p(A_1).p(B/A_1)+p(A_2).p(B/A_2)+p(A_3).p(B/A_3)}$$

$$p(A_2/B)=\frac{p(A_2).p(B/A_2)}{p(A_1).p(B/A_1)+p(A_2).p(B/A_2)+p(A_3).p(B/A_3)}$$

$$p(A_3/B)=\frac{p(A_3).p(B/A_3)}{p(A_1).p(B/A_1)+p(A_2).p(B/A_2)+p(A_3).p(B/A_3)}$$

que son las fórmulas de Bayes" (Texto [A], p. 53).

En la tabla 2.6.2. presentamos un resumen de los elementos de significado presentados en relación con la dependencia e independencia. En ella observamos que la diferenciación entre la independencia de sucesos pertenecientes al mismo espacio muestral y la independencia entre experimentos sólo se trata implícitamente en le texto [I]. La probabilidad de la intersección de sucesos independientes sí es tratada en todos los textos excepto en [H], que lo hace a través de ejemplos y ejercicios y comentaremos más adelante en la sección 3.8. La definición de independencia a través de la probabilidad condicionada, es decir que dos sucesos son independientes cuando p(B/A) = p(B) aparece en los textos [A], [E], [F], [G] y [K], mientras que la definición de que son independientes cuando el resultado de uno de ellos no influye en la realización del otro, aparece en los textos [D], [E], [F], [H] e [I].

La definición de dependencia entre sucesos a partir de la fórmula de la probabilidad condicionada aparece en los textos [C], [F], [G], [I] y [K]. La propiedad de simetría de la independencia de sucesos sólo la trata los textos [A] y [G], mientras que la no transitividad aparece de forma implícita en el texto [I]. El teorema de la probabilidad total y las fórmulas de Bayes únicamente aparecen en el texto [A].

Tabla 2.6.2. Elementos de significado relacionados con la dependencia e independencia

	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9
[A]		Definición	Definición	Si				Si	Si
[B]		Definición							
[C]		Definición				Ejemplo	Si		
[D]		Definición				Si			
[E]		Definición	Definición			Si			
[F]		Definición	Definición			Definición	Definición		
[G]		Definición	Definición	Si			Si		
[H]		Ejemplos y ejercicios				Si			
[I]	Implícitamente	Definición			Implícitamente	Si	Si		
[J]		Definición							
[K]		Definición	Definición				Si		

Podemos concluir por tanto que los elementos de significado que hacen referencia a las distintas definiciones tienen un tratamiento aceptable en el 50% de los textos, excepto el I2, sobre que la probabilidad de la intersección de sucesos es igual al producto de las probabilidades de dichos sucesos que aparece en todos los textos excepto en [H], que lo hace a través de ejemplos y ejercicios. Por el contrario, el resto de los elementos de significado, sólo aparece como hemos visto en uno o dos textos.

2.6.3. PROBABILIDAD EN EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Para Freudenthal (1973) en probabilidad el interés casi nunca se centra en un solo espacio probabilístico, sino más bien en la interrelación de muchos espacios probabilísticos. Un dispositivo especialmente útil es construir el producto cartesiano de dos o más espacios muestrales para obtener el espacio muestral del experimento compuesto.

Separar los conceptos de espacio muestral y distribución puede parecer ahora obvio. Pero ha sido uno de los obstáculos tradicionales en el desarrollo conceptual. La cuestión de extensión de las probabilidades de varios experimentos simples al experimento compuesto no fue alcanzada hasta el desarrollo de las ideas de independencia y probabilidad condicional. (Borovnick y cols. 1991).

Los elementos intensionales de significado que hemos identificado para el concepto de experimentos compuestos son los siguientes:

EC1: Los experimentos compuestos se componen de varios experimentos simples que pueden ser o no dependientes.

EC2: El espacio muestral es el producto cartesiano de los espacios muestrales en los experimentos simples.

EC3: Si los experimentos son independientes la probabilidad para todo suceso $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \in A_i$ *es:* $P(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = P(A_1) \ldots\ldots P(A_n)$

EC4: Si los experimentos son dependientes la probabilidad para todo suceso $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \in A_i$ *es:* $P(A_1) \times P(A_2 / A_1) \times \ldots \times P(A_n / A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

A continuación analizamos cada uno de ellos.

Experimento compuesto como composición de experimentos simples

Primeramente hemos analizado el hecho de que se componen de varios experimentos simples que pueden ser o no dependientes.

En [C], dedica un apartado al estudio de los experimentos compuestos, concepto que introduce mediante dos ejemplos relativos a extracción de cartas, el primero consistente en extraer una carta de cada una de las dos barajas disponibles, y el segundo extraer dos cartas de una sola baraja, afirmando que:

> *"En ambos casos se presentan experimentos que pueden ser considerados como compuestos de dos: la doble extracción como dos extracciones consecutivas"* (Texto [C], p. 75).

En [I], a través del enunciado de tres problemas en el margen izquierdo de la página 247 introduce el concepto de experiencias compuestas, así por ejemplo uno de ellos dice:

> "*Problema 1. Lanzamos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos unos?"* (Texto [I], p. 247).

Nos advierte que:

> *"En cada uno de estos problemas aparece un experimento que se puede descomponer en dos" así en "el problema 1: lanzar un dado y después otro"* (Texto [I], p. 247).

Procede a continuación a la resolución de los tres problemas anteriormente mencionados en los que emplea la regla de Laplace, pero utiliza un recurso distinto en cada uno de ellos.

En el primero utiliza una tabla de doble entrada, en el segundo la combinatoria, advirtiendo que en este caso, al contrario que en el anterior el resultado de la segunda carta sí depende de la que haya salido en primer lugar. En el tercer problema propuesto recurre a la utilización del diagrama del árbol a los que califica de *"muy útiles para el cálculo de probabilidades compuestas"* (Texto [I], p. 248).

Dedica un apartado a la composición de experiencias independientes y dependientes, donde las define de la siguiente forma:

> *"Dos o más experiencias aleatorias se llaman independientes cuando el resultado de cada una de ellas no depende de los resultados de las demás.*
> *Dos o más experiencias aleatorias se llaman dependientes cuando el resultado de una de ellas influye en el desarrollo de la otra"* (Texto [I], p. 249).

En el resto de los libros no se hace mención a esta descomposición.

La segunda propiedad es la formación del espacio muestral como producto cartesiano de los espacios muestrales en los experimentos simples. No la hemos encontrado explícitamente en ningún texto. Sin embargo, hemos encontrado a lo largo del desarrollo del apartado de experiencias compuestas del texto [I], expresiones de esta formación del espacio muestral producto en algunas de las definiciones y ejemplos que implícitamente, nos introduce esta propiedad. Como ejemplo, presentamos la siguiente definición sobre la independencia de sucesos, donde aparece el espacio producto $S_1 \times S_2 \times \ldots S_n$.

> *"Cuando varias experiencias aleatorias son independientes la probabilidad de que ocurra el suceso S_1 en la primera experiencia y S_2 en la segunda y ... y S_n en la n-ésima es:*
> *$p(S_1 \text{ y } S_2 \text{ y} \ldots \text{y } S_n) = p(S_1).\, p(S_2) \ldots p(S_n)$"* (Texto [I], p. 249).

Probabilidad de un suceso en el caso de experimentos independientes

En [C], al final del apartado 6.5 sobre experimentos compuestos, incluye las nociones de dependencia e independencia de sucesos y de la probabilidad condicionada, de la siguiente forma, donde da la regla de cálculo de probabilidades compuestas en caso de experimentos independientes:

> *"En un experimento compuesto por dos pruebas, si cada una de ellas no influye sobre la otra, se dice que son independientes. En tal caso, si A es un suceso de la primera y B un suceso de la segunda, la probabilidad de que ocurran ambos es*
> *P (A y B) = P (A) . P (B)"* (Texto [C], p. 76)

También lo hemos encontrado en [I], generalizado a un número cualquiera de pruebas, como mostramos a continuación:

> *"Cuando varias experiencias aleatorias son independientes la probabilidad de que ocurra el suceso S_1 en la primera experiencia y S_2 en la segunda y ... y S_n en la n-ésima es:*
> *$p(S_1$ y S_2 y ... y $S_n) = p(S_1).\ p(S_2)...\ p(S_n)$"* (Texto [I], p. 249).

No tratan este concepto el resto de los textos en forma explícita.

Probabilidad de un suceso en el caso de experimentos dependientes

Hemos encontrado la regla de cálculo de probabilidades compuestas en experimentos dependientes en [C]:

> *"Si las pruebas no son independientes, P (A y B) = P (A) .P (B/supuesto que ocurrió A) .*
> *A la probabilidad P (B/supuesto que ocurrió A) se le llama "probabilidad de B condicionada a A". Se puede expresar, simplemente, P (B/A)"* (Texto [C], p. 76).

En [I] también encontramos esta regla de cálculo, que se generaliza al caso de varias pruebas:

> *"Para dos sucesos dependientes, la probabilidad de que ocurra el suceso S_1 en la primera y S_2 en la segunda es:*
> *$p(S_1$ y $S_2) = p(S_1)\ .\ p\ (S_2$ suponiendo que ha ocurrido $S_1)$.*
> *Para tres sucesos dependientes:*
> *$p(S_1$ y S_2 y $S_3) = p(S_1).p(S_2$/ocurrió $S_1).\ p(S_3$/ocurrió S_1 y ocurrió $S_2)$"* (Texto [I], pp. 249-250).

Como resumen presentamos la tabla 2.6.3. sobre el tratamiento de los experimentos compuestos en los textos analizados.

Tabla 2.6.3. Tratamiento de los experimentos compuestos en los textos analizados

	EC1	EC2	EC3	EC4
[A]				
[B]				
[C]	Si trata		Si trata	Si trata
[D]				
[E]				
[F]				
[G]				
[H]				
[I]	Si trata	Implícitamente	Si trata	Si trata
[J]				
[K]				

En ella observamos que los únicos textos que tratan los experimentos compuestos son [C] e [I]. Los elementos de significado intensionales EC1, EC3 y EC4 lo tratan ambos textos y el

EC2 sobre que el espacio muestral de un experimento compuesto es el producto de los espacios muestrales de los experimentos simples que lo componen es el texto [I], que lo hace de una forma implícita.

2.6.4. CONCLUSIONES SOBRE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL, INDEPENDENCIA Y EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Probabilidad condicional

No todos los libros incluyen el estudio de la probabilidad condicional y cuando lo hacen el estudio es muy restringido. Sólo en un caso se analiza el hecho de que la probabilidad condicional cumple los axiomas de probabilidad, lo cual, por otro lado nos parece adecuado a este nivel de enseñanza.

En caso de incluir el tema observamos una variedad en la presentación que puede ser explícita o implícita y ser directa o bien a través de la frecuencia relativa condicional, o el experimento compuesto.

Señalamos también la ambigüedad de lenguaje de algunos libros que puede inducir a creer que el condicionamiento es una operación que afecta a los sucesos y no a la probabilidad. Esta ambigüedad llega a veces a presentar una definición de "suceso condicionado", incorrecta desde nuestro punto de vista y señalada por otros autores, como Falk.

No se destaca el papel de los dos sucesos que intervienen en la probabilidad condicional ni el diferente valor de la probabilidad condicional cuando intercambiamos estos sucesos entre sí, con excepción del texto G. Creemos que este punto se debiera resaltar más, debido a las confusiones repetidamente señaladas sobre este punto en las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad.

Dependencia e independencia de sucesos

En ella observamos que la diferenciación entre la independencia de sucesos pertenecientes al mismo espacio muestral y la independencia entre experimentos sólo se trata implícitamente en le texto [I]. La probabilidad de la intersección de sucesos independientes sí es tratada en todos los textos excepto en [H], que lo hace a través de ejemplos y ejercicios y comentaremos más adelante en la sección 3.8. La definición de independencia a través de la probabilidad condicionada, es decir que dos sucesos son independientes cuando $p(B/A) = p(B)$ aparece en los textos [A], [E], [F], [G] y [K], mientras que la definición de que son independientes cuando el resultado de uno de ellos no influye en la realización del otro, aparece en los textos [D], [E], [F], [H] e [I].

La definición de dependencia entre sucesos a partir de la fórmula de la probabilidad condicionada aparece en los textos [C], [F], [G], [I] y [K]. La propiedad de simetría de la independencia de sucesos sólo la trata los textos [A] y [G], mientras que la no transitividad aparece de forma implícita en el texto [I]. El teorema de la probabilidad total y las fórmulas de Bayes únicamente aparecen en el texto [A].

Podemos concluir por tanto que los elementos de significado que hacen referencia a las distintas definiciones tienen un tratamiento aceptable en el 50% de los textos excepto el I2, sobre que la probabilidad de la intersección de sucesos es igual al producto de las probabilidades de dichos sucesos que aparece en todos los textos excepto en [H], que lo hace a través de ejemplos y ejercicios. Por el contrario, el resto de los elementos de significado, sólo aparece como hemos visto en uno o dos textos.

Experimentos compuestos

El tratamiento que reciben los experimentos compuestos en los libros de texto analizados es escaso, posiblemente debido a la limitación del tiempo disponible. Los únicos textos que plantean estos conceptos son [C] e [I]. Los elementos de significado intensionales EC1 (un experimento compuesto se compone de varios simples), EC3 y EC4(sobre independencia y dependencia de experimentos) lo tratan los textos [C] e [I] y el EC2 (el espacio muestral de un experimento compuesto es el producto de los espacios muestrales de los experimentos simples que lo componen) es el texto [I], que lo hace de una forma implícita.

2.7. VARIABLE ALEATORIA

2.7.1. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO DE LA VARIABLE ALEATORIA

El último concepto tratado en nuestro análisis es el de variable aleatoria. Aunque son pocos los libros que lo introducen de manera explícita, sin embargo lo hemos encontrado en alguno de ellos, bien en el tema de probabilidad o en el de estadística. Otras veces se hace uso del concepto de forma implícita, por lo que nos ha parecido necesario completar nuestro análisis con este punto. En particular consideramos implícita la idea de variable aleatoria cuando se describe la variable estadística en el tema de probabilidad, ya que una variable estadística se obtiene a partir de los valores observados de una variable aleatoria en una muestra.

Para Hawkins y cols. (1992) el concepto de variable aleatoria es bastante sutil. Es una función con valores numéricos cuyo dominio es un espacio muestral. Una definición precisa de la variable aleatoria requiere un grado de sofisticación matemática excesivo para los estudiantes de secundaria. No obstante, una aproximación más informal podría ser adecuada para estos niveles.

Según Heitele (1975) la idea de variable aleatoria es fundamental en estadística, ya que amplió notablemente las aplicaciones de la probabilidad y permitió resolver algunas paradojas, como la de San Petesburgo. Las variables aleatorias no son sólo importantes dentro de la teoría de la probabilidad, sino también en la vida cotidiana. Tres son los puntos importantes en el modelo de variable aleatoria: la distribución, la esperanza y la varianza. La distribución de una variable permite comparar cada caso aislado con el conjunto de observaciones. La esperanza matemática se interpreta intuitivamente como la media aritmética de los valores de la variable si repitiésemos un gran número de veces el experimento en idénticas condiciones. La varianza permite apreciar la variabilidad de la distribución en torno a la media. También es importante la composición de variables aleatorias mediante operaciones de tipo diverso para obtener otras nuevas.

Los niños pequeños consideran equidistribuidas todas las variables aleatorias. Incluso los alumnos mayores asumen la equidistribución en experimentos tan sencillos como el número de caras al lanzar dos monedas, como ha puesto de manifiesto Lecoutre y Cordier (1990) en repetidos experimentos con estudiantes de diversa edad y preparación. Heitele plantea esta creencia como un problema didáctico y sugiere que debería introducirse a los alumnos al estudio de distribuciones, como la normal, donde este principio falla. Sin embargo, puesto que los teoremas de límite no son accesibles hasta llegar a la Universidad, quizás el único modo de introducir la distribución normal para alumnos de secundaria fuese por medio de la simulación.

Borovcnik y cols. (1991) indican que una variable es aleatoria cuando su valor se determina como resultado de un experimento aleatorio. Para caracterizarla necesitamos conocer el conjunto de todos sus posibles resultados y las probabilidades asociadas a cada uno de ellos.

Una variable aleatoria se define como una función ζ del espacio muestral E en el conjunto de números reales R.

$$\zeta : E \longrightarrow R$$

No cualquier función puede ser una variable aleatoria. Se requiere que, para cada intervalo I, el conjunto $\{s: \zeta(s) = I\}$ sea un suceso del espacio muestral, y, por tanto, tenga una probabilidad bien definida. Esto garantiza que la variable aleatoria transporte la probabilidad P que está definida sobre el espacio muestral E a la línea real, definiendo $P_\zeta(I) = (P\{s: \zeta(s) \in I\})$

En consecuencia, del análisis anterior, identificamos los siguientes elementos intensionales del significado de la variable aleatoria:

VA1: La variable aleatoria toma sus valores dependiendo de los resultados de un experimento aleatorio.

VA2: Es una función del espacio muestral en R.

VA3: Queda caracterizada mediante la distribución de probabilidad: Conjunto de valores que toma junto con su probabilidad.

VA4: Se requiere que, para cada intervalo I de R el conjunto original sea un suceso del espacio muestral.

VA5: Una variable aleatoria define una medida de probabilidad sobre el conjunto de números reales.

VA6: Para cada variable aleatoria podemos definir una función de distribución de la forma siguiente:

$$R: \longrightarrow [0, 1]$$
$$x: \longrightarrow F(x) = P(\zeta \leq x)$$

VA7: La función de distribución de una variable aleatoria es una función real de variable real, monótona no decreciente.

VA8: La función de distribución de una variable aleatoria determina en forma biunívoca la distribución de probabilidad.

VA9: Sea (x_i, p_i) $i \in I$ *la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta. Se define la media o esperanza matemática como* $E[\zeta] = \Sigma_{i \in I} x_i p_i$. *Este concepto extiende la idea de media en una variable estadística.*

VA10: La moda es el valor más probable de la variable.

VA11: La mediana es el valor de la variable para el cual la función de distribución toma el valor 1/2. Por tanto, la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor menor o igual a la mediana es exactamente 1/2.

A continuación analizamos la presencia en los libros de cada uno de estos elementos de significado.

2.7.2. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Consideramos en este apartado la definición de la variable aleatoria, así como sus propiedades, tratadas de forma explícita o implícita. Como hemos indicado, la mayor parte de los libros de texto tratan la noción de variable estadística con distintos niveles de formalización dentro del tema de estadística, aunque son muy pocos los que tratan explícitamente la noción de variable aleatoria.

Consideramos, sin embargo, que al estudiar la variable estadística se hace mención implícita a la idea de variable aleatoria, ya que una variable estadística refleja el conjunto de valores tomados por una variable aleatoria en una muestra.

VA1: La variable aleatoria toma sus valores dependiendo de los resultados de un experimento aleatorio.

En [E], aparece implícitamente (p.183), al definir la esperanza matemática. Aunque no hemos encontrado este elemento de significado, en algunos libros de texto como en [G] y dentro del capítulo de estadística, en el apartado "*Estadística descriptiva. Terminología. Variable aleatoria*", se define el concepto de variable estadística de la siguiente forma:

> "*Se denomina variable estadística a la variable que toma valores, llamados resultados dentro de un determinado dominio o carácter, con una determinada frecuencia o* <u>*probabilidad*</u>" (Texto [G], p. 222).

Después de aclarar que existen variables estadísticas cualitativas y cuantitativas y que éstas últimas a su vez pueden ser discretas y continuas, en el ejemplo 29 afirma que:

> "*La variable estadística espesor del dieléctrico de una fabricación en serie de una determinada pieza de un condensador es una variable* <u>*aleatoria*</u> *cuantitativa continua, pues, teóricamente, puede tomar cualquier valor del intervalo de extremos mayor y menor conseguidos*" (Texto [G], p. 222).

En este ejemplo observamos una mención explícita a la variable aleatoria y también una cierta confusión entre los conceptos de variable aleatoria y variable estadística, ya que la estadística viene dada por una distribución de frecuencias y la aleatoria por una distribución de probabilidad.

En el texto [A], aparece implícitamente, en el ejemplo de la página 59, donde se refiere a la distribución de frecuencias y la distribución de probabilidad. No tratan este concepto el resto de los textos analizados

VA2: La variable aleatoria es una función del espacio muestral en R.

No tratan este aspecto ninguno de los textos analizados.

VA3: La variable aleatoria queda caracterizada mediante la distribución de probabilidad, es decir, el conjunto de valores que toma junto con su probabilidad.

En [A], dentro del tema 5 denominado Variable estadística. Medidas de posición central. Medidas de dispersión, en el apartado 5.4 Distribución de frecuencias y de probabilidad a partir de un ejemplo de lanzar diez veces un dado, afirma que:

> "*En general:*
> *El conjunto de valores que puede tomar una variable aleatoria, juntamente con sus probabilidades respectivas, se llama una distribución de probabilidad. Si la variable aleatoria x puede tomar los valores* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *con probabilidades* $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ *la distribución de probabilidad se expresa*
>
> *Así:*

X	$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$
P	$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n$

" (Texto [A], p. 60).

Concluye comentando que las distribuciones de frecuencia y de probabilidad suelen representarse gráficamente mediante diagramas de barras o mediante sectores.

En [I], en el apartado dedicado al estudio de la frecuencia absoluta y relativa, que denomina *"distribución esperada y distribución empírica"* está introduciendo implícitamente la idea de variable estadística y variable aleatoria por medio de un ejemplo de experimento aleatorio de lanzar un dado. La distribución esperada se refiere a la distribución de probabilidad de la variable aleatoria "número de elementos al lanzar un dado" y la distribución empírica a la variable estadística correspondiente a la repetición del experimento un número dado de veces. Introduce explícitamente las frecuencias relativas, la distribución de frecuencias y la representación por diagramas de barras de las distribuciones de frecuencias y probabilidades y las compara (teórica y empírica).

Presenta la probabilidad de un suceso como el valor esperado de la frecuencia relativa correspondiente a dicho suceso en la variable estadística, frecuencia relativa del suceso en una serie de experimentos. Va mostrando, a través de un ejemplo, la convergencia de la distribución empírica según aumenta el número de experimentos hacia la distribución teórica (o esperada) (Texto [I], pp.229-236). Es éste el texto en que se presenta más claramente la relación entre estos conceptos, aunque el nivel de formalización no sea excesivo, lo cual puede parecer adecuado para el curso a que está dirigido.

Señala que en algunos casos (dado sesgado) no poseemos la distribución esperada y procedemos al revés. Obtener una distribución empírica para un número grande de experimentos y hacernos una estimación de la distribución esperada:

> *"Hay ocasiones en que la experiencia aleatoria que se va a realizar tiene unas condiciones de regularidad tales que podemos tener, a priori (antes de hacer ninguna experiencia), la distribución esperada.*
>
> *Esto es lo que ocurre con los lanzamientos de dados o monedas correctas y con las extracciones de cartas en barajas completas. Posteriormente, la experimentación nos lleva a resultados que se parecen mucho a los esperados, tanto más cuanto mayor es el número de lanzamientos o de extracciones.*
>
> *Pero otras veces no hay ninguna referencia a priori. Solo la experimentación nos permitirá obtener datos sobre el comportamiento de los distintos sucesos. Los datos obtenidos serán tanto mejores (tanto más fiables) cuanto más larga sea la experimentación"* (Texto [I], p. 231).

No tratan este concepto el resto de los textos.

VA4: Se requiere que, para cada intervalo I de R, el conjunto original sea un suceso del espacio muestral.

No tratan este concepto ninguno de los textos analizados.

VA5: Una variable aleatoria define una medida de probabilidad sobre el conjunto de números reales.

No tratan este concepto ninguno de los textos analizados.

VA6: Para cada variable aleatoria podemos definir una función de distribución de la forma siguiente:

$$R: \longrightarrow [0, 1]$$
$$x: \longrightarrow F(x) = P(\zeta \leq x)$$

No tratan este concepto ninguno de los textos analizados.

VA7: La función de distribución de una variable aleatoria es monótona no decreciente.
No tratan este concepto ninguno de los textos analizados.

VA8: La función de distribución de una variable aleatoria determina en forma biunívoca la distribución de probabilidad.
No tratan este concepto ninguno de los textos analizados.

Consideraremos, en lo que sigue, las variables aleatorias discretas, pues, los escasos ejemplos encontrados en los libros de texto se refieren a este tipo de variable.

2.7.3. MOMENTOS

VA9: Sea $(x_{i,}\ p_i)\ i\in I$ *la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta. Se define la media o esperanza matemática como* $E[\zeta] = \Sigma_{i\in I}\, x_i\, p_i$.

La esperanza matemática o valor medio de la distribución de probabilidad es una de las ideas fundamentales en este campo, ya que, según Heitele (1975) puede ser precursora de la idea de probabilidad. Extiende la idea de media aritmética y permite definir un juego equitativo. En [E], dentro de un apartado denominado problemas de recapitulación, encontramos:

"*8. Se llama esperanza matemática de un juego a la suma de los productos de las cantidades que se pueden alcanzar por las respectivas probabilidades de obtenerlas. Un juego se llama equitativo cuando la esperanza matemática es igual a la apuesta. Por ejemplo; se paga 1 pta. por sacar una carta de una baraja española de 40 cartas; si sale una sota se cobran 2 ptas., si sale un caballo 3 ptas., y si sale un rey 5 ptas. Como la pro babilidad de cada uno de estos sucesos vale 1/10, se tiene:*
Esperanza matemática = 2 ptas.1/10 + 3 ptas.1/10 + 5 ptas.1/10 = 1 pta.
de modo que el juego resulta equitativo" (Texto [E], p .183).

A continuación propone un problema donde hay que calcular la esperanza matemática de varios juegos e indicar si son o no equitativos. Vemos que en este ejemplo no solo se hace referencia explícita a la esperanza matemática y a la idea de juego equitativo, sino que implícitamente se está definiendo la variable aleatoria y su distribución.

En [J], sólo aparece un ejercicio sobre la esperanza matemática que es el 58 (p. 301). No tratan este concepto el resto de los textos analizados.

VA10: La moda es el valor más probable de la variable.

La moda es un valor central sencillo de calcular, sin embargo no es tratada en los textos que hemos analizado, posiblemente debido a la limitación de tiempo.

VA11: La mediana es el valor de la variable para el cual la función de distribución toma el valor 1/2.

Tabla 2.7.1. Presentación del concepto de variable aleatoria en los textos analizados

	VA1	VA2	VA3	VA4	VA5	VA6	VA7	VA8	VA9	VA10	VA11
[A]	II		D								
[B]											
[C]											
[D]											
[E]	I								E E		
[F]											
[G]	I										
[H]											
[I]			I E								
[J]									E		
[K]											

I E= Implícitamente, Ejemplo; D= Definición, I = Implícitamente, E= Ejercicios, E E =Ejemplo y Ejercicio

Como resumen, presentamos la tabla 2.7.1., donde se recogen cada uno de los elementos de significado intensionales relacionados con el concepto de variable aleatoria.

Cuando estos elementos de significado aparecen en los textos analizados, lo indicamos según la leyenda que figura al pie de la tabla, y si no son tratados aparece el casillero correspondiente en blanco.

En ella observamos que los únicos elementos de significado tratados en algunos textos son los relacionados con la definición, la caracterización mediante la distribución de probabilidad y la esperanza matemática. El resto de los elementos de significado no aparecen en ningún texto.

2.7.4. CONCLUSIONES SOBRE LA VARIABLE ALEATORIA

Como acabamos de ver en la mayoría de los textos no se trata el concepto de variable aleatoria, posiblemente debido a la limitación de tiempo y espacio. Teniendo en cuenta su importancia dentro de la estadística como han resaltado diversos autores, entre ellos Heitele (1975), consideramos que debe ser tratado y relacionado con la probabilidad, aunque de una manera no excesivamente formalizada, pero para ello debería aumentarse y extenderse a lo largo de la educación secundaria el tiempo dedicado a la enseñanza de la probabilidad. Es importante también distinguir entre variable estadística y variable aleatoria, quedando la primera definida mediante una distribución de frecuencias y la variable aleatoria que queda caracterizada por una distribución de probabilidad, siendo el texto [A], el único que realiza esta distinción.

2.8. CONCLUSIONES GENERALES SOBRE LOS ELEMENTOS INTENSIONALES DEL SIGNIFICADO DE LOS CONCEPTOS PROBABILÍSTICOS ELEMENTALES

En este capítulo hemos analizado los elementos intensionales que los libros de texto presentan para cada uno de los conceptos probabilísticos elementales incluidos en el nivel de primer curso de bachillerato. En los objetivos de la investigación indicábamos que esto era el punto de partida para estudiar el resto de los elementos de significado de los conceptos probabilísticos. Asimismo pretendíamos mostrar la variabilidad de la presentación del tema en los diferentes libros. A continuación describimos brevemente las principales conclusiones de este estudio, aunque todas ellas implican una mayor extensión del tiempo dedicado a la enseñanza de la probabilidad en secundaria y una distribución gradual a lo largo del período 12-16.

Experimento aleatorio

En nuestro análisis del concepto identificamos tres aspectos básicos subyacentes en la idea de aleatoriedad: el experimento aleatorio, los resultados y las secuencias de resultados de estos experimentos. No todos los libros contemplan estos tres puntos, que deberían incluirse para aumentar el tiempo dedicado a analizar las diferencias entre experimentos aleatorios y deterministas, siguiendo a Hawkins y cols. (1992).

Sería también interesante mostrar al alumno el uso de tablas de números aleatorios y la generación de números aleatorios mediante el ordenador. También creemos necesario evitar las connotaciones de aleatoriedad como contrapuesta a la existencia de leyes, ya que nuestro análisis muestra que tal concepción no es adecuada. Asimismo conviene hacer ver al alumno el carácter de "modelo" de la aleatoriedad y la importancia de incorporar la información sobre el fenómeno, incorporando las diferentes concepciones de la probabilidad (objetiva y subjetiva).

Espacio muestral. Sucesos, sus tipos y operaciones

Se ha observado la variabilidad en los grados de formalización del estudio de las operaciones entre sucesos y sus propiedades, que abarcan desde la omisión de este aspecto hasta el estudio formal de la estructura de álgebra de Boole. Así mismo se han identificado terminologías poco adecuadas como: *"espacio total"*, en [D]; *"suceso total"*, en [E]; *"espacio de comportamientos"*, en [C], que en nuestra opinión debieran ser evitadas. Asimismo abogamos por tratar el tema de los sucesos aleatorios y sus operaciones, aunque sin excesiva formalidad, porque estas operaciones permiten posteriormente comprender las operaciones con la probabilidad.

Frecuencias relativas y sus propiedades

Aunque la definición de frecuencia relativa aparece en todos los textos, el tratamiento es diverso, y sólo alguno de ellos estudian en detalle las propiedades que sirven de base a la definición posterior de probabilidad.

Tampoco todos los textos hacen un tratamiento explícito de la convergencia de la frecuencia relativa hacia un valor determinado cuando se realiza un elevado número de veces un experimento. El texto que hace un estudio más completo y que muestra la diferencia entre distribución esperada y distribución empírica acompañado de una serie de ejemplos y actividades, es el texto [I]. Pensamos que las actividades experimentales propuestas en los nuevos diseños curriculares, pueden permitir una introducción intuitiva a la idea de convergencia en este nivel de enseñanza.

Noción de probabilidad

Ningún texto trata todas las concepciones, y en general se omiten algunos elementos de significado asociados a las mismas. La concepción clásica es tratada en todos los textos analizados, excepto en [J], aunque prácticamente ninguno habla de los problemas de circularidad en esta concepción de la probabilidad. A pesar de que se enuncia que para poder aplicar la regla de Laplace los sucesos elementales del experimento han de ser equiprobables, no se insiste lo suficientemente en que sólo se aplica en estos casos, pudiendo llevar a los alumnos a aplicar esta regla en otros casos que no proceda.

La concepción frecuencial la tratan todos los textos analizados, excepto [A], [B] y [F], aunque se soslaya el problema del número de experimentos necesarios para el cálculo de la probabilidad frecuencial.

La concepción subjetiva sólo la tratan cuatro textos de los analizados. Pensamos que habría que incluirla, e insistir en que el valor asignado a la probabilidad depende de la información de cada persona.

La concepción formal se contempla aproximadamente en la mitad de los textos analizados, quizás de manera excesivamente formal, que pensamos no es adecuada a este nivel de 1º de BUP (14-15 años).

Finalmente las probabilidades geométricas, sin mencionar explícitamente su nombre, sólo se tratan en [J], aunque por ser un contexto muy rico y relacionado con la idea de fracción debería utilizarse más.

Probabilidad condicional

No todos los libros incluyen el estudio de la probabilidad condicional y cuando lo hacen el estudio es muy restringido. En caso de incluir el tema observamos una variedad en la presentación que puede ser explícita o implícita y ser directa o bien a través de la frecuencia relativa condicional, o el experimento compuesto.

Señalamos también la ambigüedad de lenguaje de algunos libros que puede inducir a creer que el condicionamiento es una operación que afecta a los sucesos y no a la probabilidad.

Dependencia e independencia de sucesos

La diferenciación entre la independencia de sucesos pertenecientes al mismo espacio muestral y la independencia entre experimentos sólo se trata implícitamente en le texto [I] y la definición de independencia o dependencia se hace a través de la probabilidad condicionada o a través de la fórmula del producto, dependiendo del libro.

Son pocos los casos en que se presentan las propiedades de la relación de dependencia y el teorema de Bayes. Pensamos que este tema debería postponerse al final de la educación secundaria.

Experimentos compuestos

El tratamiento que reciben los experimentos compuestos en los libros de texto analizados es escaso. Los únicos textos que plantean estos conceptos son [C] e [I]. Los elementos de significado intensionales EC1 (un experimento compuesto se compone de varios simples), EC3 y EC4 (sobre independencia y dependencia de experimentos) lo tratan ambos textos y el EC2 (el espacio muestral de un experimento compuesto es el producto de los espacios muestrales de los experimentos simples que lo componen) es el texto [I], que lo hace de una forma implícita. Sin embargo la mayoría de las aplicaciones de la probabilidad implican la consideración de la composición de experimentos. Es éste un punto que pensamos podría introducirse a los alumnos de secundaria de una forma intuitiva, apoyándose en los diagramas de árbol.

Variable aleatoria

La mayoría de los textos no se trata el concepto de variable aleatoria, y teniendo en cuenta su importancia dentro de la estadística como han resaltado diversos autores, entre ellos Heitele (1975), consideramos que debe ser tratado y relacionado con la probabilidad, aunque de una manera no excesivamente formalizada.

Para finalizar, queremos dejar constancia de la complejidad del tema de la probabilidad, por lo que creemos que el desarrollo del mismo se debería hacer en un período más largo de tiempo, realizando una distribución de los contenidos a lo largo de varios cursos, debiendo comenzar la formación estocástica en edades más tempranas.

CAPÍTULO III
ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LOS EJERCICIOS Y EJEMPLOS EN LOS LIBROS DE TEXTO: ELEMENTOS EXTENSIONALES DEL SIGNIFICADO DE CONCEPTOS PROBABILÍSTICOS

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se efectúa una clasificación y análisis de los ejercicios y ejemplos de probabilidad presentados en los libros seleccionados. Asimismo, se efectúa un estudio estadístico de las variables de tarea y su distribución en dos de los textos analizados en los capítulos anteriores, que se han elegido de acuerdo a criterios que describiremos con mayor detalle en la sección 3.2. Nuestra intención al estudiar los atributos de estos ejemplos y ejercicios, respecto a las variables seleccionadas, es mostrar algunas características generales de los ejercicios y ejemplos presentados en los libros de texto similares a los analizados y que podrían influir en el significado de la probabilidad presentado al estudiante.

Finalmente, obtenemos del análisis una lista de elementos extensionales (sección 1.2.3) de los conceptos probabilísticos elementales, que puede ser útil para el análisis de otros libros de texto y en la construcción de materiales curriculares.

El papel de los ejemplos y ejercicios

Los ejemplos y ejercicios son una parte importante de cualquier libro de texto y su importancia es bien reconocida dentro de la didáctica de la matemática. La enseñanza de las matemáticas incluye, entre otras decisiones la selección de los ejemplos que hay que presentar al alumno y de los ejercicios que estos deben resolver (González, 1993). El número y variedad de ejemplos que se incluyen para ilustrar un concepto y las experiencias acumuladas por los estudiantes con sus prácticas con ejercicios contribuirá a su aprendizaje de tareas particulares.

La práctica más común según el autor citado, es mostrar al alumno algunos ejemplos del concepto antes o después de haberlo definido y estudiado sus propiedades y luego asignarle algunos ejercicios para reforzar el aprendizaje. Esta práctica se justifica porque se supone que se gana maestría en el tema a través del trabajo con los ejercicios y de los ejemplos mostrados del concepto.

La capacidad de extraer conocimientos conceptuales a partir de los ejemplos y ejercicios ha sido también investigada por algunos autores. Chi y cols. (1989) analizaron el proceso que seguían los estudiantes de universidad al estudiar los ejemplos de los libros de texto. Observaron que los estudiantes que eran capaces de aprender a partir de los ejemplos tendían a generar explicaciones y proporcionar justificaciones para cada uno de los pasos implícitos o explícitos que llevaban a la solución. También solían relacionar estas explicaciones con los principios básicos usados en la solución. Por el contrario, los estudiantes con menor capacidad no eran capaces de explicar como se pasaba de un paso a otro de la solución del problema en los ejemplos mostrados en los libros.

Los ejercicios que hemos analizado pueden considerarse casos particulares de un concepto más amplio, que es el de problema. En nuestro trabajo consideraremos ejercicio a aquellos problemas que se presentan sin resolver y para los cuales el alumno debe hallar su solución. Respecto a los ejemplos, hemos considerado dos tipos: a) Los problemas resueltos que, generalmente sirven para mostrar al alumno el proceso de resolución de otros ejercicios similares que se incluyen a continuación; b) Ejemplificación de conceptos o de propiedades de conceptos antes o después de la correspondiente definición. También este último tipo lo podríamos considerar dentro de la categoría de problema resuelto, considerando la palabra problema en un sentido amplio que trataremos de precisar en lo que sigue.

En palabras de Lester *"Un problema es una situación en la cual un individuo o grupo de ellos es invitado a resolver una tarea para la que no hay un algoritmo inmediato que determine completamente el método de solución"* (Lester, 1978, p. 54). El término problema se refiere también a la descripción de una situación en la que se da cierta información, se establecen una o varias metas y se requieren algunas acciones para alcanzarlas. Por acción no se significa necesariamente que el resolutor debe conocer un algoritmo para resolver el problema. De esta forma esta definición incluye los problemas y ejercicios usuales en los libros de texto, así como otros tipos de problemas más abiertos (González, 1993; Wickelgren, 1981). Asimismo, podríamos incluir la demostración de propiedades o su discriminación lo que nos llevaría a considerar los ejemplos de los libros de texto como problemas resueltos en este sentido amplio.

Los problemas matemáticos han sido estudiados como tema de investigación desde diversas perspectivas. Kilpatrick (1985) estudia estos distintos enfoques, indicando que, desde un punto de vista psicológico, hay un acuerdo de que a la situación planteada ha de añadirse una persona; el problema ha de ser "problema para alguien": La misma tarea puede ser problema para un alumno y no serlo para otro.

Desde una perspectiva social-antropológica, el problema es visto como una tarea, es dado y recibido en una transacción. Esta es la perspectiva adoptada también en la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1986) por el cual, para que el problema pueda ser medio para el aprendizaje, ha de producirse la devolución, es decir, el alumno debe tomar el problema como propio y tomar un interés personal en su resolución.

Otros puntos de vista señalados por Kilpatrick (1985), son el matemático por el que las matemáticas son definidas por los problemas que se resuelven con su ayuda; *"toda la Matemática es creada mediante el proceso de formulación y resolución de problemas"* (p. 3). Por último, se halla el punto de vista pedagógico o curricular, en que se estudian los problemas por lo que significan en la enseñanza.

Respecto a este último punto de vista, Stanic y Kilpatrick (1989) señalan que los problemas pueden servir para alcanzar otros fines didácticos. El fin pretendido puede ser: La justificación de los contenidos a impartir; aumentar la motivación del alumno; proporcionar un vehículo para la transmisión de conocimientos o reforzar el aprendizaje.

Puesto que en el marco teórico sobre el significado de los objetos matemáticos (Godino y

Batanero, 1994; 1998), tales objetos emergen de la actividad de resolución de problemas, el análisis que realizamos en este capítulo es esencial para caracterizar el significado de los objetos probabilísticos en los libros estudiados. Como consecuencia del análisis, se describirán y clasificarán los elementos extensionales del significado de dichos objetos, así como las variables de tarea asociadas y su distribución en dos de los libros analizados.

En general, los ejercicios y ejemplos analizados en nuestra investigación son de tipo verbal. Diferentes definiciones de problemas matemáticos *verbales* se han dado en la bibliografía, pero, en general, la expresión "problema verbal" se usa para problemas específicos que se describen en forma narrativa de la que el estudiante debe extraer la información relevante y seleccionar los algoritmos o estrategias apropiados para su resolución.

3.2. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS

Usualmente, los libros de texto, además de presentar el desarrollo teórico de cada tema, contienen ejemplos de los conceptos y propiedades, ejemplos de problemas resueltos y colecciones de actividades prácticas para ser propuestas a los alumnos, que suelen englobarse en uno o varios apartados dentro de cada tema, bajo la denominación de "problemas", "ejercicios", "cuestiones" o "actividades".

Emplearemos conscientemente la palabra "ejercicio" para referirnos a cualquiera de estas ultimas actividades, por parecernos de significación más acorde con nuestro propósito. Por un lado, se pretende estudiar el desarrollo del tema de probabilidad, a través de los ejercicios que sobre este tema aparecen en los libros de texto, a "priori", antes de haberlos dado a realizar a los alumnos. Por ello, no podemos, en un estudio independiente del resolutor, saber si una determinada actividad de este tipo realmente es para él un "problema" o se trata simplemente de un ejercicio de refuerzo del aprendizaje.

Por otro lado, la palabra "ejercicio" destaca de una forma prioritaria este papel de ejercitación que hemos señalado. El fin pretendido con los ejercicios es principalmente el reforzamiento del aprendizaje, aunque no pueden descartarse los otros papeles que, para la resolución de problemas, son descritos en el artículo de Stanic y Kilpatrick. El interés del análisis de los problemas propuestos en los manuales escolares se deduce del hecho indudable que la facilidad de un estudiante para resolver problemas depende de la forma en que se presenta y el medio en que tuvo lugar la adquisición de destrezas así como el conocimiento requerido en este aprendizaje inicial.

Al realizar un análisis de los manuales escolares, es preciso tener en cuenta, que, como indican Robert y Robinet (1989), los profesores no siempre asignan a sus alumnos todos los ejercicios de los manuales y con frecuencia añaden otros no contemplados en los libros de texto. Por ello, en un análisis "fuera de clase" sólo podemos obtener una idea parcial de las consecuencias de los ejercicios sobre los aprendizajes. *"Sin embargo, se puede suponer que la colección de ejercicios hechos está incluida, en cierta forma, en algo próximo a la colección de ejercicios propuestos por los manuales. Esto nos autoriza a estudiar (al menos con prudencia) la relación entre estos enunciados y las actividades potenciales de los alumnos, previendo las consecuencias posibles sobre el aprendizaje*" (Robert y Robinet, 1989, p. 2).

En los apartados que siguen presentamos una clasificación teórica de esta clase de actividades, presentadas en los libros de texto empleados en nuestro trabajo y un estudio empírico de la frecuencia de aparición en dos de dichos manuales. Los fines de nuestro análisis son los siguientes:

1) Analizar teóricamente los elementos extensionales del significado de los conceptos probabilísticos elementales y comprobar experimentalmente si en los libros estudiados se contemplan todos los tipos más importantes de actividades que se determinaron en forma teórica en los capítulos anteriores, para cada uno de los conceptos analizados.
2) Analizar algunas variables de tarea de estos ejemplos y ejercicios desde el punto de vista teórico, justificando su interés en el aprendizaje de la probabilidad.
3) Estimar la frecuencia relativa de las principales categorías de las variables anteriores y de los tipos de actividades en los ejemplos y ejercicios y estudiar las repercusiones posibles sobre el tipo de enseñanza que reciben los usuarios de los libros.
4) Tratar de detectar diferencias importantes, desde el punto de vista didáctico, sobre los ejercicios y ejemplos propuestos en los diferentes manuales escolares.
5) Obtener una parrilla de análisis de los ejemplos y ejercicios de probabilidad que guíe el desarrollo curricular y la práctica de la evaluación sobre este tema en la enseñanza secundaria obligatoria.

Los problemas, especialmente los de tipo verbal, se han usado como instrumento para evaluar la destreza del resolutor. Sin embargo, Newell y Simon (1972) indican que el investigador debe considerar la tarea en sí misma como la principal influencia en la conducta del resolutor. Por ello, si la conducta de los estudiantes al resolver las tareas propuestas está directamente relacionada con las características de la tarea, entonces el estudio de las características de los problemas puede ayudar a comprender las dificultades de los estudiantes en su resolución.

3.2.1. METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS

Tipos de variables consideradas en el estudio

Dentro de las investigaciones sobre resolución de problemas, uno de los puntos esenciales ha sido la definición de variables sobre los mismos. La resolución de problemas ha sido una de las áreas de investigación de mayor impacto en la didáctica de las matemáticas. Entre otros problemas específicos que se han investigado son las características del resolutor, las características del problema, el desarrollo de estructuras cognitivas y el uso de técnicas especificas para mejorar la capacidad de resolución de problemas.

Los investigadores interesados en entender la interacción entre el estudiante y la tarea de resolución de problemas han manipulado con frecuencia las tareas presentadas para probar hipótesis especificas respecto a las competencias de los estudiantes. Kilpatrick (1978) diferencia tres aspectos básicos relacionados con la resolución de problemas: Del problema presentado; el sujeto y la situación de resolución. Para cada uno de ellos propone una categorización de las variables usadas en la investigación sobre resolución de problemas: variables de tarea; variables del sujeto y variables de la situación. Además divide las variables de tarea en variables de contexto, variables de estructura y variables de formato.

Goldin y McClintock (1980) definen a su vez cuatro categorías de variables de tarea: variables de sintaxis; variables de contenido y contexto; variables de estructura y variables de conducta heurística. Estas variables son relacionadas con las fases de Polya (1957) para resolver problemas: comprender el problema; idear un plan; llevarlo a cabo y revisar el plan de resolución y la solución hallada. Según estos investigadores las variables de sintaxis, contenido y contexto están ligadas a la comprensión del problema; las variables de estructura están ligadas a la puesta en marcha del plan de resolución y las variables de conducta heurística al diseño del plan y a su revisión retrospectiva.

Para González (1993), las variables de sintaxis, contenido, contexto y estructura definen en gran medida las características esenciales de los problemas verbales y pueden observarse directamente del análisis del enunciado del problema. La ultima categoría - variables de conducta heurística - se deducen de la actuación del resolutor. Sin embargo, en los ejemplos y ejercicios resueltos en los libros de texto pueden estudiarse este tipo de variables, a partir de la solución presentada por el autor.

La importancia de la descripción de las variables en los problemas escolares es subrayada por Puig y Cerdán (1988). En la escuela los problemas se proponen, se enuncian o se presentan enunciados y se resuelven. Así que, situados ahora en el ambiente escolar, si queremos saber qué entendemos por un problema, habrá que descubrir las características de su enunciado ysu resolución.

De entre la clasificación dada por Kilpatrick (1978) a las variables que se pueden considerar en la resolución de problemas, revisten un interés particular para nuestro estudio las que denomina variables de tarea. Se utiliza el término tarea porque se plantea para estudiar lo que los sujetos hacen y no con finalidades de enseñanza, y, por tanto, está aislada, sin relación con ninguna situación o secuencia de aprendizaje. Es decir, son aquellas características del problema mismo que pueden hacer variar las conductas del resolutor e influir de modo más o menos acusado en el logro de la solución.

Webb (1984) indica que las variables de contenido están relacionadas con la información matemática dentro del problema y las variables de contexto describen la "forma" del problema, es decir, su marco de presentación.

Entre las variables de contenido que se han mostrado su influencia en la dificultad del problema se han descrito la complejidad sintáctica, la existencia de información no necesaria (Carpenter y cols., 1980; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981) ya que los estudiantes tienden a incorporar en el problema todos los datos presentados, incluso aunque no sean necesarios.

3.2.2. LIBROS ANALIZADOS

Se ha realizado un estudio estadístico detallado del total de ejercicios incluidos en dos de los manuales empleados. Aunque hubiese sido más completo un estudio global, hemos preferido utilizar sólo dos textos en el estudio detallado por considerarlo suficiente para nuestro propósito de probar la existencia de diferencias entre ellos, en cuanto al tipo de ejercicios propuestos.

Este análisis ha partido de un estudio global más superficial del resto de los textos empleados, que ha servido también para identificar los tipos de actividades propuestas en los manuales para cada uno de los conceptos probabilísticos identificados en nuestro estudio.

A continuación, pasamos a describir el análisis efectuado en los libros citados, que han sido los textos [A] e [I]. El segundo de ellos se ha elegido porque, en nuestro análisis teórico llevado a cabo en el capítulo 2, fue uno de los que mostró mayor riqueza conceptual, ofreciendo, desde nuestro punto de vista un significado más completo de los conceptos probabilísticos elementales al alumno. Además la metodología seguida en este libro es predominantemente práctica, con una gran variedad de ejemplos y ejercicios, lo que lo hace especialmente adecuado para un análisis de las actividades propuestas. Puesto que este libro ha sido editado a final del período estudiado, consideramos conveniente efectuar la comparación con otro texto de principios del período. Elegimos así el texto A, que presenta un enfoque mucho más estructuralista y una metodología basada, casi exclusivamente en el esquema teoría-práctica.

El procedimiento llevado a cabo en el análisis de ejercicios y su posterior tratamiento estadístico con el paquete Statgraphics, que más adelante indicaremos, ha sido el siguiente: A veces, bajo una misma numeración se presentan varios ejercicios independientes, por lo que se ha dividido cada uno en tantas unidades de análisis como apartados tenía, resultando un total de doscientos sesenta y cinco ejercicios que se han resuelto, analizando el procedimiento estándar de resolución y efectuando un análisis de contenido, tanto del enunciado del problema como de este procedimiento. De este modo se han identificado las variables a analizar.

Se codificaron los valores de estas variables, revisándose posteriormente estos códigos por un segundo investigador, para asegurar la fiabilidad del proceso, grabándose posteriormente para su tratamiento estadístico.

En el resto de los libros se han analizado solamente la presencia o ausencia de ejemplos o ejercicios en cada una de las categorías de nuestra variable básica, que es la tipología de actividad que debe realizar el alumno, con relación a los conceptos implícitos en los ejemplos y ejercicios.

3.2.3 DECISIÓN SOBRE CUÁNDO SE TRATA DE UN EJERCICIO O EJEMPLO

El proceso de selección implica la creación de dos categorías separadas: a) conjunto de problemas que debían ser resueltos por el alumno a los que nos referiremos como ejercicios; y b) conjunto de problemas resueltos, a los que nos referiremos como ejemplos. En cada libro analizado se identificaron los ejercicios y ejemplos, pasándose posteriormente a la codificación de las variables.

Se consideró que se trataba de un problema verbal, si se satisfacían las siguientes condiciones:

a) Se ajustaba a la definición de problema verbal; esto es, el problema incluía una narrativa a partir de la cual el estudiante debe extraer la información relevante y seleccionar los algoritmos o estrategias apropiados para su resolución.
b) El problema se presentaba verbalmente. La narrativa podrá referirse a situaciones reales o abstractas.
c) No se incluye explícitamente las indicaciones de los pasos a seguir en la solución.

En caso de que el problema se presentase resuelto o que se indicasen los pasos para su resolución y también aquellos casos en que realmente no se plantease al alumno un verdadero problema, se consideró como un ejemplo.

3.2.4. VARIABLES Y SU CODIFICACIÓN

Se han considerado las siguientes variables:

Tipo de actividad que se pide al alumno

Dentro de esta variable hemos considerado cuatro categorías: 1) Ejemplo introductorio; 2) ejemplo después de la definición; 3) ejercicio introductorio; 4) ejercicio después de la definición, y 5) problema después de haber hecho un ejemplo similar. A continuación definimos estas categorías, poniendo un ejemplo de cada uno de los casos.

1. Ejemplo introductorio. Consideramos como ejemplo las descripciones de situaciones en que se aclara el significado de los conceptos introducidos teóricamente así como los problemas que se presentan resueltos dentro de los manuales. Un ejemplo es introductorio si se incluye antes de la definición explícita del concepto. Por tanto, se usa el ejemplo para dar una definición implícita del mismo o para mostrar casos en que se aplica o no se aplica un concepto que posteriormente se va a definir. Encontramos este caso en el libro [A], en el que ejemplos de las operaciones con sucesos se usan para dar una definición implícita de los mismos:

> *"En el experimento aleatorio: Sacar una carta de una baraja española y observar el resultado, considera los sucesos: A) obtener una carta de oros; B) obtener un caballo.*
>
> *El suceso obtener una carta de oros o una carta de caballo es, por definición, el suceso unión de los sucesos A y B; se representa por $A \cup B$.*
>
> *El suceso obtener una carta que sea de oros y (simultáneamente) caballo es, por definición el suceso intersección de los sucesos A y B; se representa por $A \cap B$.*
>
> *De esta forma, y partiendo de un ejemplo concreto, hemos definido dos operaciones: unión e intersección en el conjunto de sucesos contenidos en un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio"* (Texto [A], p. 43).

2. *Ejemplo después de la definición:* En este caso el ejemplo sirve para reforzar la comprensión de un concepto ya definido, como en el siguiente caso, que corresponde al libro [C], donde después de definir la probabilidad en el caso de experimentos compuestos, según sean independientes o dependientes, propone el siguiente ejemplo, referido al cálculo de probabilidades en experimentos compuestos:

> "*Consideremos el siguiente experimento compuesto: Lanzamos un dado. A continuación extraemos un naipe de una baraja de 40. Calcular la probabilidad de obtener puntuación impar en el dado, y que la carta extraída sea figura.*
>
> *El lanzamiento del dado no influye en la extracción del naipe. Son pues sucesos independientes. La probabilidad será:*
>
> *P(impar y figura) = P(impar). P(figura)*
>
> *P(impar) = 3/6= 1/2*
>
> *P(impar y figura) = 1/2; 2/5 = 1/5 = 0,2*
>
> *P(figura)= 16/40=2/5*" (Texto [C], p. 76).

3. Ejercicio introductorio. Consideramos ejercicios todas aquellas actividades que con distinto títulos (como problemas, actividades, ejercicios) se presentan para que el alumno las resuelva. Un problema es introductorio si el alumno debe movilizar en su resolución conceptos que no han sido todavía definidos explícita o implícitamente. Creemos que este tipo de ejercicios tiene para el alumno las características de un verdadero problema, puesto que no tiene accesible de forma inmediata un algoritmo que le proporcione la solución. Como ejemplo, en [I], en el apartado denominado experiencias compuestas, encontramos el siguiente ejercicio:

> "Problema 1: *Lanzamos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos unos?* " (Texto [I], p. 247).

4. Ejercicio después de la definición: Son los ejercicios que se presentan una vez introducido el concepto teóricamente y cuyo fin principal es reforzar el aprendizaje. En general, algunos de estos ejercicios no serán verdaderos problemas para el alumno puesto que se encuentran agrupados a continuación de la definición teórica y por ello, se les proporciona una clave para hallar su solución. Esto ocurre en particular cuando se presentan seguidos varios de estos ejercicios muy similares, variando sólo en aspectos particulares de los datos proporcionados. Por ejemplo [F], una vez definida la regla de Laplace, propone algunos problemas muy similares, uno de los cuales es el siguiente:

> "*19. Se tiran tres monedas al aire. Se pide:*
> *a) Espacio muestral. b) La probabilidad de sacar dos caras*" (Texto [F], p. 229).

5. Problema después de haber hecho un ejemplo similar. Por las consideraciones indicadas anteriormente hemos querido reflejar este aspecto particular. Como ejemplo, en [I], después de realizar un ejemplo basado en los estudios de Mendel sobre la herencia, y sus experimentos de cruce de plantas con diferentes características, propone el siguiente ejercicio, prácticamente igual al ejemplo presentado al alumno con anterioridad:

> "*¿Te atreves a conjeturar qué proporción de plantas rojas, blancas y rosa se obtendrán al cruzar plantas rojas y plantas rosas?* (Texto [I], p. 240).

Concepto al que el ejercicio se refiere explícitamente o implícitamente

Un punto importante en nuestro análisis es estudiar cuál, de entre los conceptos analizados en los capítulos anteriores debe movilizar el alumno para resolver el ejercicio o a cuál de estos conceptos se refiere el ejemplo. En el caso de que un ejemplo o ejercicio se refiera a varios conceptos, se ha subdividido en tantos apartados como fuese necesario. Los conceptos a que se refieren los ejemplos o ejercicios pueden ser uno de los siguientes: Experimento aleatorio; espacio muestral; sucesos y operaciones; frecuencia relativa; probabilidad; probabilidad condicional; dependencia e independencia; experimentos compuestos y variable aleatoria.

Tipología del ejercicio o ejemplo dentro de cada concepto

Esta es la principal variable dentro de nuestro estudio, pues describe la actividad especifica que debe realizar el alumno para resolver el ejercicio o que se ejemplifica en el ejemplo. Esta tipología de situaciones se describirá con detalle, para cada uno de los conceptos, en las secciones 3.4 a 3.9 y permitirá describir los *elementos extensionales* de los conceptos probabilísticos elementales. Debido a la longitud que se precisaría para repetir aquí esta descripción hemos preferido suprimirla y remitimos al lector a las siguientes secciones para el estudio de esta variable.

Tipos de espacio muestral

Hemos considerado de interés analizar el tipo de espacio muestral del experimento aleatorio que interviene en las situaciones propuestas al alumno, diferenciando entre espacio muestra infinito, finito, con dos elementos equiprobables; finito, con más de dos elementos equiprobables, finito, con sucesos no equiprobables, e impreciso.

1. Espacio muestral infinito: Este tipo de espacio muestral puede ser difícil para el alumno. En primer lugar, no le es posible describir todos los elementos del mismo por extensión, por lo cual su definición debe darse por comprensión. Además, el hecho de que la probabilidad de los sucesos elementales sea nula, a pesar de que se trate de sucesos no imposibles puede ser contradictorio. Otras dificultades conceptuales están relacionadas con el continuo.

> "*Se ha medido la talla de ciento veinte alumnos de primer curso de Bachillerato y se han obtenido cincuenta y seis que miden 1,58 m*" (Texto [G], p. 200).

2. Espacio muestral finito, con dos elementos equiprobables: Es el tipo más simple de experimento aleatorio. El alumno puede concebir claramente los casos favorables y desfavorables y la equiprobabilidad coincide con su intuición, ya que autores como Lecoutre y Durand (1988) o Batanero, Serrano y Garfield (1996), han descrito la tendencia de los alumnos a considerar todos los sucesos como equiprobables. En este tipo de espacios muestrales el alumno puede aplicar con facilidad la regla de Laplace, puesto que se cumple el principio de indiferencia. En el texto [F], aparece el siguiente:

> *"Son experimentos aleatorios:*
> *- La tirada de una moneda al aire"* (Texto [F], p. 222).

3. *Espacio muestral finito, con más de dos elementos equiprobables*. En este espacio muestral el alumno puede tener mayor dificultad para diferenciar los casos favorables y desfavorables que en el anterior. Sin embargo, la equiprobabilidad coincide también con su intuición, y el alumno puede aplicar con facilidad la regla de Laplace, puesto que se cumple el principio de indiferencia. En el texto [F], aparece el siguiente:

> *"Son experimentos aleatorios:*
> *- La extracción de una carta de la baraja"* (Texto [F], p. 222).

4. *Espacio muestral finito, con sucesos no equiprobables:* No es posible en este caso aplicar el principio de indiferencia y además, choca contra la intuición del alumno quien debe resolver el problema, bien por métodos combinatorios o por asignación de probabilidades frecuenciales.

> *" Una persona lee en un folleto de turismo que en Almería, en los meses de Julio, Agosto y Septiembre no hay más que una semana sin sol, por término medio. Animado por ello, decide ir a pasar una semana de vacaciones a Almería. ¿Tendrá la mala suerte de que le toque, precisamente, la semana sin sol?"* (Texto [B], p. 27).

5. Impreciso. Hemos incluido esta categoría, porque en algunos problemas, el espacio muestral no se llega a precisar con claridad, por ejemplo, cuando se trata de un ejercicio en que se piden demostrar algunas propiedades de la probabilidad o de la frecuencia relativa, sin hacer referencia a espacios muestrales concretos.

Posible asignación de probabilidades a los sucesos

Un punto importante es la asignación de probabilidades a los sucesos dentro de los experimentos que intervienen en la situación, porque ello está directamente relacionado con los distintos significados del término probabilidad descritos en la sección 2.5. Hemos diferenciado los tipos siguientes:

1. Regla de Laplace. Cuando es posible asignar las probabilidades a los sucesos en base a consideraciones de simetría física; o aplicando el principio de indiferencia. En este caso el significado subyacente de la probabilidad es el clásico.

> *" En un grupo de alumnos. 29 estudian francés y el resto, 8, estudian inglés. Un profesor elige un alumno al azar. Probabilidad de que este alumno sea de los que estudian francés"* (Texto [B], p. 30).

2. Información estadística disponible: Cuando no es posible asignar probabilidades usando la regla de Laplace, pero se presenta al alumno datos estadísticos de los cuales él puede obtener un valor aproximado para la probabilidad de los sucesos. En este caso, el significado subyacente de la probabilidad es el frecuencial.

" *e) Se ha medido el grosor de 1000 arandelas fabricadas por una máquina, obteniéndose la siguiente tabla:*

Grosor en mm	*231*	*232*	*253*	*234*	*235*	*236*	*237*	*238*	*239*
N? de piezas	*10*	*20*	*80*	*180*	*280*	*240*	*130*	*40*	*20*

Calcula la frecuencia relativa de los diferentes valores obtenidos.

f) Calcula la probabilidad de que:

- el grosor de la siguiente pieza que fabrique la máquina sea de 234 mm.

- el grosor de una pieza esté comprendido entre 234 y 236 mm. ambos incluidos" (Texto [H], p. 164). "

3.Realización o simulación de experimentos. Cuando no es posible usar la regla de Laplace, ni se proporciona información estadística sobre los diferentes sucesos, pero el alumno puede obtener este tipo de información mediante la experimentación o mediante la simulación del experimento. Este tipo de actividad también lleva consigo el significado frecuencial de la probabilidad, Pero, además, exige del alumno una participación más activa en la recogida de la información estadística.

"18. a) Tira dos dados 36 veces. Anota la suma de los puntos y haz la distribución de frecuencias relativas.

b) Agrupa tus resultados con los de la tabla del ejercicio anterior y observa como evolucionan las frecuencias relativas" (Texto [I], p. 239).

4.Consideración de probabilidad subjetiva: No siendo posible ninguno de los métodos anteriores de asignación de probabilidades, se pide al alumno asignar una probabilidad en base a su experiencia previa o sus creencias personales. Nos encontramos ante una situación que enfatiza el significado subjetivo de la probabilidad.

"6. Califica de casi seguro, probable, poco probable o casi imposible, cada uno de los siguientes sucesos:

a) *Al pasar por la calle, Antonio encuentra un billete de 5000 pesetas.*
b) *Antonio está enfermo al menos una vez al año.*
c) *Antonio suspende algún examen durante este año"* (Texto [I], p. 239).

5. Consideración geométrica de la probabilidad: Cuando el alumno puede asignar probabilidades basándose en criterios geométricos. Este tipo de ejercicio ha sido muy frecuente en el texto [J], donde se presentan con frecuencias problemas referidos a ruletas divididas en sectores de igual o diferente amplitud.

"Establece aplicaciones frecuenciales para las siguientes ruletas:

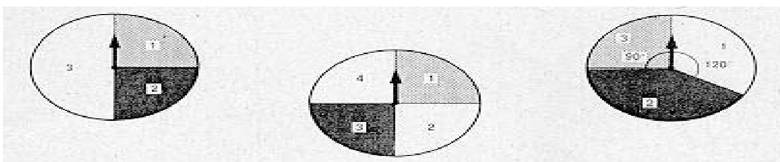


Figura 3.2.4.1

"(Texto [J], p. 295).

6. *Leyes físicas*. En el caso de presentar ejemplos de fenómenos deterministas es usual hacer referencia a leyes físicas, como la gravedad, o la ecuación del movimiento uniforme u otras conocidas por el alumno.

"Ejemplo 1

Una experiencia determinista es poner una bola de plomo sobre la superficie de un lago profundo: siempre se hunde" (Texto [G], p. 191).

Contexto del enunciado del ejercicio

Suydam y Weaver (1977) mostraron que los niños tienen mejores resultados cuando el contexto del problema les resulta familiar que si se trata de un nuevo contexto. Aunque los estudiantes muestran diferentes preferencias respecto a los problemas, parece claro que sus preferencias no influyen en su capacidad de resolver los problemas y que en general los problemas verbales referidos a situaciones no familiares o a situaciones abstractas son más difíciles que si el contexto es familiar.

Aunque este tipo de variables ha sido descrito teniendo como fin principal la resolución de problemas, creemos que son también aplicables al análisis de ejercicios en los libros de texto para proporcionar una clasificación de los mismos que nos indique los aspectos particulares del mismo.

1.Juego. La mayoría de los problemas y un gran número de aplicaciones se presentan en el contexto de juegos de azar, describiendo los resultados obtenidos por generadores aleatorios, tales como cartas, bolas en urnas, ruletas o dados. No en vano los juegos de azar dieron origen a la teoría de probabilidades y además, son interesantes para los alumnos. Este es el contexto encontrado con mayor frecuencia en los ejercicios y ejemplos analizados.

"De una baraja española de 40 cartas se sacan tres cartas simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean copas?" (Texto [E], p. 177).

2.Biología. Un segundo contexto importante lo representan los fenómenos biológicos, como la herencia, las características físicas de los alumnos, o la ecología.

"En una familia con dos hijos, calcula la probabilidad de:
a) que los dos sean varones; b) que uno sea chico y, la otra, chica; c) que ambos tengan el mismo sexo.
Para simplificar, considera que la probabilidad de que uno sea chico es igual a la de que sea chica" (Texto [I], p. 252).

3. Física. Como ya hemos indicado, y en particular en el caso de ejemplos referidos a fenómenos deterministas, encontramos referencia a fenómenos en el campo de la física.

"Si consideramos el experimento que consiste en arrojar un objeto al vacío, observaremos que repitiéndolo bajo análogas condiciones siempre que el objeto cae al suelo verticalmente con una aceleración de 9,8 m/s^2" (Texto [K], p. 397).

4. Meteorología. Es un caso especialmente importante, ya que los fenómenos atmosféricos son un ejemplo típico de aleatoriedad, diferente de los juegos y que el alumno puede encontrar en su vida diaria. Este contexto se usa en el siguiente ejemplo:

"Una persona lee en un folleto de turismo que en Almería, en los meses de Julio, Agosto y Septiembre no hay más que una semana sin sol, por término medio. Animado por ello, decide ir a pasar una semana de vacaciones a Almería. ¿Tendrá la mala suerte de que le toque, precisamente, la semana sin sol?" (Texto [B], p. 27).

5. Sociedad, trabajo, etc. Incluimos en este apartado la descripción de fenómenos referidos a la vida social o política, tales como empleo, datos de producción, comercio, elecciones, etc.

6. Experiencia del alumno. Nos referimos a ejemplos particulares de la vida cotidiana del niño que no queden específicamente englobados en los contextos descritos anteriormente. Por ejemplo, resultados de exámenes, etc.

"296. Se propone a un equipo de tres alumnos la resolución de un problema. Se estima, en función de sus evaluaciones, que la probabilidad de que lo resuelva el primero es 1/2; la de que lo resuelva el segundo es 1/3 y1/4 la probabilidad de que lo consiga el tercero. ¿Cuál es la probabilidad de que resuelva el problema el equipo?" (Texto [G], p. 281).

Presentación de la información

Entre las variables de contexto la forma de presentación se ha mostrado que influye en la conducta del resolutor (Webb, 1984). Suydam y Weaver mostraron que los problemas aritméticos que incluyen un gráfico, dibujo u otra representación gráfica, resultan más sencillos que los que no los incluyen. Resultados semejantes fueron obtenidos por Carpenter y cols. (1980) y Cohen y Stover (1981).

1. Verbal. Es la forma usual de presentar los ejemplos y ejercicios. Incluimos en esta categoría aquellos casos en que la información de tipo verbal es la única disponible.

"De cada 100 veces que saquemos dos bolas de la bolsa, aproximadamente 50 (la mitad) las bolas serán del mismo color" (Texto [B], p. 29).

2. Tabla. Cuando, además del enunciado verbal, se suministra al alumno datos estadísticos dispuestos en una tabla. La interpretación del enunciado del problema requerirá, por tanto, la capacidad de lectura de la tabla de datos, en la que, con frecuencia, aparecen convenios implícitos, como, por ejemplo, notación que se refiere a las frecuencias absolutas o relativas que el alumno debe conocer.

"3. Toma una moneda, lánzala 5 veces y anota los resultados en un cuadro como el que aparece a continuación. Repite el proceso hasta totalizar 100 tiradas:

	1ª		*2ª*		....	*2ª*	
	Cara	*Cruz*	*Cara*	*Cruz*		*Cara*	*Cruz*
Frecu. Abs.							
Fr. Rel.							

La columna 1ª se refiere a las 5 primeras tiradas; la columna 2.ª a las 10 primeras; la columna 3.ª a las 15 primeras; y así sucesivamente hasta la columna 20.ª, que se refiere a la totalidad de las 100 tiradas" (Texto [E], p. 176).

3. Gráfico estadístico. Cuando, además del enunciado verbal del problema, se presenta al alumno algún gráfico estadístico, que debe interpretar para obtener los datos del problema. Como en el caso anterior, requiere unos conocimientos adicionales del alumno sobre la construcción e interpretación de gráficos.

4. Diagrama de árbol. En algunas ocasiones, el enunciado es completado mediante diagramas en árbol, sobre todo en el caso de que el concepto a estudiar se refiera a los experimentos compuestos, su espacio muestral o las probabilidades asociadas.

5. Gráficos, diagramas de flechas. Cuando aparecen en el enunciado gráficos no estadísticos o diagramas de flecha.

6. Fotos o dibujos que se añaden al problema para aumentar la motivación del alumno, aunque, en realidad no contienen una parte significativa de los datos.

7. Tabla y gráfico. Caso de que se incluyen estos dos tipos de información.

3.3. DISTRIBUCIÓN GLOBAL DE LOS EJERCICIOS Y EJEMPLOS RESPECTO A LAS VARIABLES BÁSICAS: ESTUDIO COMPARATIVO DE DOS TEXTOS

Una vez definidas las variables a analizar y finalizada la recogida de datos, procedimos a la codificación y tratamiento estadístico de los mismos, usando el paquete STATGRAPHICS.

En esta sección analizamos las diferencias entre los dos libros de texto analizados en cuanto a las variables básicas, esto es, el tipo de actividad pedida, conceptos de que trata el ejercicio, tipo de espacio muestral, modo de asignar probabilidades, contexto y forma en que se da la información. Aunque los resultados encontrados no pueden extenderse, en general, a cualquier otro libro de texto, el estudio permite, sin embargo subrayar la diversidad de significados que, respecto a los conceptos probabilísticos elementales, podrían encontrarse en libros que han sido pensados para un mismo nivel de enseñanza. En las secciones que siguen serán estudiados los tipos concretos de actividad que se pide a los alumnos, para cada uno de los conceptos particulares que hemos analizado en el capítulo 2.

3.3.1. TIPO DE ACTIVIDAD

En primer lugar hemos analizado la distribución en los libros de los ejemplos y actividades y si se trata de un ejemplo o ejercicio introductorio, o un ejemplo o ejercicio posterior a la definición. Como hemos indicado, esta diferencia nos parece importante, pues en caso de que el ejercicio se introduzca antes del estudio teórico del concepto representaría para el alumno un verdadero problema, mientras que si se presenta después de las definiciones, se trataría más bien de un ejercicio de aplicación. Además, si en un libro de texto se da una proporción importante de ejercicios antes del estudio teórico, indicaría una posición más constructivista del libro y en caso contrario indicaría una orientación teoría-práctica.

Hemos tomado como un caso especial aquél en el que, aunque el ejercicio es introductorio se presenta después de haber incluido un ejemplo similar completamente resuelto. En este caso no se trataría de un verdadero problema para el alumno, puesto que éste puede copiar el método de resolución empleado en el ejemplo previo. Finalmente, hemos encontrado el caso de ejercicios dirigidos, en los que el autor indica al alumno los pasos a seguir en la solución, por lo que estaríamos en el caso anterior.

Tabla 3.3.1 Frecuencia y (porcentaje) del tipo de actividad por libro

Tipo de actividad	Libro [I]	Libro [A]	Total
1. Ejemplo introductorio	25 (14,36)	35 (38,46)	60 (22,64)
2. Ejemplo posterior definición	19 (10,91)	19 (20,88)	38 (14,33)
3. Ejercicio introductorio	19 (10,91)	2 (2,20)	21 (7,92)
4. Ejercicio posterior definición	101 (58,04)	34 (37,36)	136 (50,94)
5. Ejercicio posterior a un ejemplo	9 (5,17)	0 (0)	9 (3,39)
6. Ejercicio dirigido	1 (0,57)	1 (1,10)	2 (0,75)
Total	174 (65,66)	91 (34,21)	265 (100,00)

Respecto a los ejemplos, una presencia alta de éstos antes de introducir la definición indica que el autor utiliza los ejemplos para que el alumno se familiarice con el concepto que se trata de introducir, para, progresivamente dar paso a la definición formal del mismo y suavizaría algo la orientación teoría-práctica.

De acuerdo con la tabla 3.3.1., lo más frecuente entre las actividades analizadas son los ejercicios después de la definición (tipo 4), que representan más de la mitad del total de actividades en los libros analizados, por lo que deducimos que el enfoque de enseñanza en estos libros sigue predominantemente el esquema teoría-práctica. Es también importante la presencia de ejemplos introductorios de los conceptos, lo que supondría un apoyo para el alumno en la comprensión de dichos conceptos. También podemos observar que hay diferencias importantes entre los dos libros. En el libro [I] es mayor la cantidad de ejercicios antes de introducir una definición, es decir, que se trataría de verdaderos problemas, lo que señala a un influjo mayor de las tendencias constructivistas en estos autores. Tanto el número absoluto de ejemplos, como su proporción respecto al total de ejemplos y ejercicios es mayor dentro del texto [A], que usa los ejemplos introductorios para mostrar un ejemplo particular antes de introducir la definición.

No obstante, el número total de ejercicios es muy superior en el libro [I], lo que de nuevo indica en este libro una mayor orientación al enfoque basado en resolución de problemas por parte del alumno y la mayor importancia dada a las aplicaciones, frente al aspecto teórico.

Hemos realizado un estudio estadístico de la significación de estas diferencias mediante el contraste Chi-cuadrado de homogeneidad de muestra, que requiere ciertos requisitos para su aplicación. Estos requisitos se refieren a las frecuencias mínimas esperadas en las celdas de la tabla de contingencia y al número de celdas en los que dicha frecuencia es menor que 5. Diversos autores recomiendan agrupar filas o columnas similares o bien suprimir alguna de ellas en caso que sea necesario para cumplir estos requisitos. Por ello, para poder calcular el Chi cuadrado, hemos suprimido las categorías 5 y 6, que son poco significativas. Obtenemos un valor Chi cuadrado de 29.96, con 3 g.l. que indica una diferencia muy significativa ($p<0.001$) en la distribución del tipo de actividad en ambos libros.

3.3.2. CONCEPTOS SOBRE LOS QUE TRATAN LOS EJERCICIOS

La segunda variable analizada ha sido el concepto sobre el que trata el ejemplo o ejercicio, entre los analizados en el capítulo 2. El estudio de esta distribución nos da una idea de los conceptos a los que los autores prestan mayor atención por considerarlos más relevantes o más difíciles para el alumno.

Tabla 3.3.2. Frecuencia y (porcentaje) de la distribución de conceptos en los ejemplos y ejercicios por libro

Conceptos	Libro [I]	Libro [A]	Total
1. Experimento aleatorio	2 (1,14)	4 (4,40)	6 (2,26)
2. Espacio muestral	1 (0,57)	8 (8,79)	9 (3,39)
3. Sucesos y operaciones	7 (4,02)	21 (23,08)	28 (10,56)
4. Frecuencia relativa	38 (21,83)	7 (7,69)	45 (16,98)
5. Probabilidad	52 (29,88)	15 (16,48)	67 (25,28)
6. Probabilidad condicional	0 (0)	4 (4,40)	4 (1,50)
7. Dependencia/Independencia	2 (1,14)	4 (4,40)	6 (2,26)
8. Experimento compuesto	55 (31,60)	22 (24,18)	77 (29,05)
9. Variable aleatoria	17 (9,77)	6 (6,59)	23 (8,67)
Total	174 (65,66)	91 (34,21)	265 (100,00)

En la tabla 3.3.2. se presentan los resultados, donde aparecen los textos analizados y los ejercicios y ejemplos relacionados con los conceptos siguientes: Experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos y operaciones, frecuencia relativa, probabilidad, probabilidad condicional, dependencia e independencia, experimento compuesto y variable aleatoria. De esta tabla deducimos que los conceptos más frecuentes son el experimento compuesto, la probabilidad y las frecuencias relativas, aunque también las operaciones con sucesos aparecen, así como la variable aleatoria. Hay que tener en cuenta que los ejercicios sobre operaciones con sucesos no son realmente "probabilísticos". Hay pocos ejercicios sobre espacio muestral, experimento aleatorio, probabilidad condicional, dependencia e independencia, conceptos todos ellos básicos y que merecían mayor atención dentro de los libros. Hawkins y cols. (1992) indican que el experimento aleatorio es uno de los conceptos básicos en estadística y que los libros de texto no le dedican la atención que se debiera, lo que se muestra también en nuestro caso.

Respecto al concepto de independencia, numerosos autores como Steinbring (1986) y Truran y Truran (1997) han señalado la dificultad de comprensión de este concepto, que es mayor precisamente desde el punto de vista de su aplicación, que desde el punto de vista teórico. Por ello creemos que los libros de texto debieran dedicar mayor proporción de ejercicios a este punto, donde se mostrara al alumno ejemplos de experimentos dependientes e independientes. Sin embargo, el alumno debe discriminar entre experimentos dependientes e independientes para resolver los problemas de cálculo de probabilidades en experimentos compuestos, ya que la fórmula del producto es diferente en cada uno de estos casos. Por ello es posible que el profesor en clase realice este tipo de ejercicios con los alumnos aunque explícitamente no se contemplan apenas en los textos analizados.

Para calcular el estadístico Chi-cuadrado, hemos agrupado en este caso los conceptos 2 y 3 (espacio muestral, sucesos y operaciones) y 6 y 7 (probabilidad condicional, dependencia e independencia) ya que la tabla primitiva contenía demasiadas celdas con frecuencias esperadas pequeñas. Una vez hecha la agrupación, solo hay una frecuencia esperada menor que 5 y es mayor que 1, lo que permite aplicar el contraste. El valor Chi-cuadrado 57,38 con 6 g.l. es muy significativo ($p<0.001$) e indica diferencias en la distribución de conceptos en los dos libros.

Observamos que el libro [I] tiene mayor proporción de ejemplos y ejercicios de frecuencia relativa, probabilidad y experimentos compuestos, mientras que el texto [A] tiene mayor proporción de espacio muestral, sucesos y operaciones. Ello es una indicación de que el libro [A] se adaptaba más al enfoque predominante al principio del período de la matemática moderna, en el que la teoría de conjuntos se intentaba ejemplificar en las diferentes ramas de las matemáticas. La probabilidad no fue una excepción y las operaciones con sucesos proporcionaron un excelente ejemplo de aplicación de los conceptos abstractos de operaciones conjuntistas. Además este ejemplo tenía una aplicación inmediata, al servir posteriormente de herramienta en el cálculo de probabilidades.

En el texto [I] esta influencia ha dejado de tener impacto, dando un mayor peso al cálculo con frecuencias y probabilidades, sin prestar apenas atención al álgebra de sucesos.

3.3.3. TIPOS DE ESPACIO MUESTRAL

El espacio muestral asociado al experimento se analiza en la tabla 3.3.3. Las categorías consideradas son las siguientes: Infinito, finito con dos sucesos equiprobables, finito con más de dos elementos equiprobables, finito con sucesos no equiprobables e impreciso cuando no hace referencia a ningún espacio muestral concreto.

Tabla 3.3.3. Frecuencia y (porcentaje) de tipos de espacio muestral en los ejemplos y ejercicios por libro

Espacio muestral	Libro [I]	Libro [A]	Total
Infinito	12 (6,90)	1 (1,10)	13 (4,91)
Finito 2 sucesos equiprobables	25 (14,37)	12 (13,19)	37 (13,96)
Finito sucesos equiprobables	91 (52,30)	63 (69,23)	154 (58,11)
Finito sucesos no equiprobables	39 (22,41)	7 (7,69)	46 (17,36)
Impreciso	7 (4,02)	8 (8,79)	15 (5,66)
Total	174 (65,66)	91 (34,34)	265 (100,00)

Generalmente los ejemplos y ejercicios se refieren a espacios muestrales finitos con más de dos elementos donde se puede aplicar la regla de Laplace. Es decir, se trataría de experimentos tales como lanzar un dado, extraer una carta de una baraja, extracción de bolas en urnas, etc. Junto con los casos de espacio muestral con dos resultados equiprobables (como lanzar una moneda) constituye el 72% del total de las actividades. Ello indica también una concepción predominante de probabilidad en los ejemplos y ejercicios, que es la laplaciana.

En un 5.66% de casos el espacio muestral no se especifica. Se trata de un problema abstracto en el cual no se concreta el experimento aleatorio, o bien de un caso de estimación de la probabilidad a partir de la frecuencia relativa, en que no se da la composición del espacio muestral.

Sólo dos celdas tienen frecuencias menores que 5 y son mayores que 1, con lo que no tenemos que agrupar para calcular el valor Chi-cuadrado que es de 16,96 con 4 g.l. (p=0,0020), es muy significativo e indica que hay una diferencia entre los dos libros. Observamos que el libro [I] contiene una pequeña proporción de espacios muestrales infinitos, y una proporción importante de espacios muestrales en los que los sucesos elementales no son equiprobables, que haría necesario el aplicar las concepciones frecuencial o subjetiva de la probabilidad. En consecuencia, en este libro hay una mayor variedad de espacios muestrales y de concepciones de probabilidad en los ejemplos y ejercicios propuestos.

Observamos una mayor proporción en el texto [A] de espacios muestrales donde los sucesos son equiprobables y algunos casos en que no se especifica el espacio muestral.

3.3.4. ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

Las distintas formas de asignación de probabilidad a los sucesos que aparecen en los ejercicios y ejemplos de los textos analizados, se muestran en la tabla 3.3.4

La asignación de probabilidades generalmente se hace aplicando la regla de Laplace, que supone un peso importante del cálculo combinatorio. Este cálculo, no obstante, no siempre es asequible al alumno, como se ha mostrado en las investigaciones de Navarro-Pelayo (1994) y en Batanero y cols. (1997 a) y b)). En un 20 % de casos la asignación de probabilidades se hace a partir de información estadística presentada al alumno lo que puede servir para establecer un puente entre estadística y probabilidad. Apenas aparecen actividades de experimentación por lo que no hay un verdadero enfoque frecuencial de la probabilidad, ya que al no hacer los experimentos por sí mismo se priva al alumno de la observación del fenómeno de la convergencia de las frecuencias relativas hacia la probabilidad y de las fluctuaciones aleatorias de la frecuencia relativa.

Son también casi inexistentes los ejercicios basados en la concepción subjetiva de la probabilidad o probabilidades geométricas.

Para aplicar el Chi-cuadrado se han agrupado todas las categorías excepto la 1 y 2. Obtenemos un valor 9,54 con 2 g.l. (p=0,0085) que es muy significativo.

Lo más destacable de estas diferencias es que, en el libro [A], prácticamente toda la asignación de probabilidades está basada en la regla de Laplace, y, por tanto, en el cálculo combinatorio, mientras que el tipo de asignación es más variado en el texto [I].

Tabla 3.3.4. Frecuencia y (porcentaje) de la asignación de probabilidades en los ejemplos y ejercicios por libro

Asignación de probabilidades	Libro [I]	Libro [A]	Total
1. Regla de Laplace	114 (65,52)	76 (83,52)	190 (71,70)
2. Información estadística	44 (25,29)	11 (12,09)	55 (20,75)
3. Realización/simulación experimentos	11 (6,32)	0 (0)	11 (4,15)
4. Subjetiva	4 (2,30)	1 (1,10)	5 (1,89)
5. Geométrica	1 (0,57)	1 (1,10)	2 (0,75)
6. Física	0 (0)	2 (2,20)	2 (0,75)
Total	174 (65,66)	91 (34,34)	265 (100,00)

3.3.5. CONTEXTOS

En la tabla 3.3.5. presentamos los contextos presentes en los ejercicios y ejemplos analizados y que son los siguientes: Juegos de azar; fenómenos biológicos, como herencia, características físicas de los alumnos o la ecología; fenómenos de tipo físico; meteorología; descripción de fenómenos referidos a la vida social o política, tales como, empleo, datos de producción, comercio, etc. y por último hemos considerado la experiencia previa del alumno sobre el experimento presentado, como por ejemplo los resultados de exámenes.

Tabla 3.3.5. Frecuencia y (porcentaje) de tipos de contexto en los ejemplos y ejercicios por libro

Contexto	Libro [I]	Libro [A]	Total
1. Juego	123 (70,69)	76 (83,52)	199 (75,09)
2. Biología	18 (10,34)	1 (1,10)	19 (7,17)
3. Física	5 (2,87)	1 (1,10)	6 (2,26)
4. Meteorología	1 (0,57)	0 (0)	1 (0,38)
5. Sociedad	4 (2,309	0 (0)	4 (1,519
6. Experiencia alumno	23 (13,22)	10 (10,99)	33 (12,45)
7. No se especifica	0 (0)	3 (3,30)	3 (1,13)
Total	174 (65,66)	91 (34,34)	265 (100,00)

Los contextos más frecuentes son los juegos y la biología así como los relativos a la experiencia del alumno. El gran predominio del contexto relativo a juegos de azar se relaciona, por un lado, con los tipos de espacios muestrales (sucesos equiprobables) y la asignación de probabilidades (laplaciana). Puede indicar también un intento de hacer más interesante el tema a los alumnos, quienes, en general, se interesan por los juegos de azar. No obstante, creemos que se aprecia una restricción importante en el dominio de las aplicaciones de la probabilidad mostradas al alumno.

Para calcular el Chi-cuadrado se han agrupado todos los contextos, menos el 1, 2 y 6. En este caso el valor de Chi-cuadrado es 8,88 con 3 g.l. (p=0,0310) que indica en este caso menores diferencias, lo que también se observa en la tabla de datos. La principal diferencia es que el rango de aplicaciones es algo mayor en el libro [I], sobre todo con relación a la biología, ya que se han usado ejemplos de genética, características biológicas y nacimientos, entre otros.

3.3.6. PRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN

En la tabla 3.3.6. aparecen las distintas formas en que los textos analizados presentan la información para la resolución de ejercicios o en la propuesta de ejemplos. Las distintas categorías han sido las siguientes: Verbal; tabla, cuando además de la información verbal se suministra al alumno datos estadísticos dispuestos en una tabla; gráfico estadístico, cuando además del enunciado verbal del problema se presenta al alumno algún gráfico estadístico; diagrama del árbol, cuando el enunciado es completado con un diagrama de árbol; gráficos no estadísticos o diagramas de flechas; fotos y dibujos que se añaden al problema; tabla y gráfico, cuando aparecen estos dos tipos de información; diagramas de Venn y por último cuando aparecen diagramas de Venn y grafos juntos o diagramas de flechas.

Los ejercicios y ejemplos se presentan, preferentemente en formato exclusivamente verbal, como se muestra en la tabla. También hay un peso importante de la presentación por medio de tablas estadísticas con o sin gráficos asociados, así como fotos, dibujos o ilustraciones. Es prácticamente inexistente el uso del diagrama en árbol, a pesar de la importancia que se le ha atribuido en la enseñanza de la probabilidad y combinatoria por Fischbein (1975). Creemos que los autores de los libros no son conscientes de las posibilidades de este recurso como modelo de la situación y como recurso generador en la resolución de problemas probabilísticos.

Tabla 3.3.6. Frecuencia y (porcentaje) de la presentación de la información en los ejemplos y ejercicios por libro

Presentación de la información	Libro [I]	Libro [A]	Total
1. Verbal	114 (65,52)	70 (76,92)	184 (69,43)
2. Tabla	28 (16,09)	2 (2,20)	30 (11,32)
3. Gráfico estadístico	2 (1,15)	0 (0)	2 (0,75)
4. Diagrama de árbol	4 (2,30)	0 (0)	4 (1,51)
5. Gráficos, diagramas, flechas	0 (0)	2 (2,20)	2 (0,75)
6. Fotos, dibujos...	20 (11,49)	4 (4,40)	24 (9,06)
7. Tabla y gráfico	6 (3,45)	6 (6,59)	12 (4,53)
8. Diagrama de Venn	0 (0)	6 (6,59)	6 (2,26)
9. D. de Venn y grafos o diagramas de flechas	0 (0)	1 (1,10)	1 (0,38)
Total	174 (65,66)	91 (34,34)	265 (100,00)

Para calcular el Chi-cuadrado hemos agrupado las opciones 2, 7 y 3 (tablas y gráficos estadísticos), 4,5,8,9 (diagramas de árbol, grafos, diagramas de Venn, etc.) El valor Chi cuadrado 16,56 con 3 g.l. (p=0,0009) es muy significativo. Las principales diferencias son que el libro [I], presenta en mayor proporción los datos usando tablas y/o gráficos estadísticos, lo que concuerda con la mayor presencia de la asignación frecuencial y los espacios muestrales con sucesos no equiprobables en este texto.

En el texto [A], la información es predominantemente verbal y también hay una pequeña proporción de ejercicios que usan diagramas de Venn o grafos para presentar la información, debido al enfoque basado en la teoría de conjuntos que ya hemos indicado.

3.3.7. CONCLUSIONES

Presentamos a continuación un resumen de las conclusiones obtenidas relacionadas con el estudio y distribución de los ejercicios y ejemplos respecto a las variables básicas, en los dos textos analizados.

Tipo de actividad

El número total de ejercicios es muy superior en el libro [I], lo que indica en este libro una mayor orientación al enfoque basado en resolución de problemas por parte del alumno y la mayor importancia dada a las aplicaciones, frente al aspecto teórico.

Conceptos puestos en juego en los ejercicios

Los conceptos más frecuentes son el experimento compuesto, la probabilidad y las frecuencias relativas, aunque también las operaciones con sucesos aparecen, así como la variable aleatoria. Hay pocos ejercicios sobre espacio muestral, experimento aleatorio, probabilidad condicional, dependencia e independencia, conceptos todos ellos básicos y que merecían mayor atención dentro de los libros. Por ello creemos que los libros de texto debieran dedicar mayor proporción de ejercicios a este punto, donde se mostrara al alumno ejemplos de experimentos dependientes e independientes.

Tipos de espacio muestral

Generalmente los ejemplos y ejercicios se refieren a espacios muestrales finitos con más de dos elementos donde se puede aplicar la regla de Laplace. Ello indica una concepción predominante de probabilidad en los ejemplos y ejercicios, que es la laplaciana.

En un 5.66% de casos el espacio muestral no se especifica. Se trata de un problema abstracto en el cual no se concreta el experimento aleatorio, o bien de un caso de estimación de la probabilidad a partir de la frecuencia relativa, en que no se da la composición del espacio muestral.

Asignación de probabilidades

La asignación de probabilidades generalmente se hace aplicando la regla de Laplace, que supone un peso importante del cálculo combinatorio. Este cálculo, no obstante, no siempre es asequible al alumno, como se ha mostrado en las investigaciones de Navarro-Pelayo (1994) y en Batanero y cols. (1997 a) y b)). En un 20 % de casos la asignación de probabilidades se hace a partir de información estadística presentada al alumno lo que puede servir para establecer un puente entre estadística y probabilidad. Apenas aparecen actividades de experimentación por lo que no hay un verdadero enfoque frecuencial de la probabilidad. Son también casi inexistentes los ejercicios basados en la concepción subjetiva de la probabilidad o probabilidades geométricas.

Contextos

Los contextos más frecuentes son los juegos y la biología así como los relativos a la experiencia del alumno. El gran predominio del contexto relativo a juegos de azar se relaciona, por un lado, con los tipos de espacios muestrales (sucesos equiprobables) y la asignación de probabilidades (laplaciana). Puede indicar también un intento de hacer más interesante el tema a los alumnos, quienes, en general, se interesan por los juegos de azar. No obstante, creemos que se aprecia una restricción importante en el dominio de las aplicaciones de la probabilidad mostradas al alumno.

Presentación de la información

Los ejercicios y ejemplos se presentan, preferentemente en formato exclusivamente verbal. También hay un peso importante de la presentación por medio de tablas estadísticas con o sin gráficos asociados, así como fotos, dibujos o ilustraciones.

Es prácticamente inexistente el uso del diagrama en árbol, a pesar de la importancia que se le ha atribuido en la enseñanza de la probabilidad y combinatoria por Fischbein (1975).

3.4. EXPERIMENTO ALEATORIO

3.4.1. TIPOLOGÍA BÁSICA DE EJEMPLOS Y EJERCICIOS Y SU PRESENCIA EN LOS LIBROS DE TEXTO

Una vez estudiada la distribución global de los ejemplos y ejercicios respecto a las variables básicas, analizaremos en esta sección y en las siguientes de este capítulo las actividades concretas pedidas al alumno, para cada uno de los conceptos que se trataron en el capítulo 2. Consideramos que, además de analizar la presentación de este tema a nivel conceptual (explícito e implícito), se deben estudiar los ejemplos y ejercicios que, sobre el concepto, se proponen a los alumnos.

Comenzamos analizando teóricamente las actividades consideradas como prototípicas o elementos extensionales del significado del concepto y haciendo un estudio cualitativo de su presencia o ausencia en todos los libros de la muestra. En la siguiente sección haremos un estudio estadístico comparativo detallado de las diferencias de estos ejemplos y ejercicios, en cuanto a las variables básicas en dos de los libros de texto. Este mismo procedimiento se seguirá en el resto de las secciones del capítulo.

Las actividades básicas que pueden ser planteadas al alumno en relación con la idea de aleatoriedad y experimento aleatorio son las siguientes:

SE1: *Discriminación entre experimentos aleatorios y deterministas.* Cuando se pide a los alumnos decidir sobre el carácter aleatorio o no de algunos fenómenos descritos. Esta es una actividad que consideramos muy importante para que el alumno comience a distinguir las características básicas de la aleatoriedad: "*El concepto de aleatoriedad es central para la educación estocástica por la simple razón de que este concepto, contrapuesto a otras teorías y conceptos matemáticos, es la característica específica de la teoría de la probabilidad*" (Harten y Steinbring, 1983, p. 363). Sin embargo, pensamos que no es posible adquirir este concepto sólo con el estudio de su definición sino que es necesario tratar de dilucidar las situaciones en que puede o no puede aplicarse.

En el texto [G] encontramos el siguiente ejercicio, que podríamos encuadrar dentro de esta categoría:

> "267. *Dígase si es un experimento determinista lanzar un dado y leer su cara superior en reposo"* (Texto [G], p. 278).

Ejercicios similares aparecen también en [G]: Ejercicio 268 (p. 278); en [E]: Ejercicio 1, (p. 175) y en [H]: Ejercicio 6.16 a), (p. 189).

Un ejemplo ha sido encontrado en el texto [E], sobre el lanzamiento de una moneda al aire (p. 174), donde se indica que no es un experimento determinista explicando las razones para ello. Otros aparecen en el texto [A].

SE2: *Proponer ejemplos de experimentos aleatorios y/o deterministas.* Cuando se pide a los alumnos ejemplos de experimentos aleatorios o deterministas. Esta actividad permitirá evaluar al profesor el grado de comprensión que muestran sus alumnos de la idea de aleatoriedad.

En ningún texto aparecen ejercicios de este tipo, lo único que hemos encontrado han sido ejemplos. En el texto [F], aparece el siguiente:

"Son experimentos aleatorios:
- La extracción de una carta de la baraja
- El lanzamiento de un dado.
- La extracción de una bola del bombo de la lotería.
- La tirada de una moneda al aire" (Texto [F], p. 222).

Ejemplos similares aparecen en los textos: [B]: Ejemplos 1 y 2, (p. 27), implícitamente, ya que sin mencionar la palabra experimento aleatorio, propone dos situaciones, una sobre las posibles cuestiones de un examen y otra sobre el tiempo que habrá en una ciudad en una determinada época, "*en que no es posible predecir si un determinado hecho se producirá o no*"; [C]: Ejemplo, (p. 66); [D]: Ejemplos 1 y 2, (p. 69) y ejemplos 1 y 2 (p. 70); [E]: Ejemplo, (p. 174); [G]: Ejemplos 1 y 2, (p. 191); [H]: Ejemplo 6.16, (p. 188); [I]: Ejemplos, pp. 227-228; [J]: Ejemplo, (p. 292) y [K]: Ejemplo, (p. 397).

Tabla 3.4.1. Actividades sobre el concepto de experimento aleatorio en los textos

	SE1	SE2
[A]	Ejemplos	
[B]		Ejemplos
[C]		Ejemplo
[D]		Ejemplos
[E]	Ejercicio y ejemplo	Ejemplo
[F]		Ejemplo
[G]	Ejercicios	Ejemplos
[H]	Ejercicio	Ejemplo
[I]		Ejemplos
[J]		Ejemplo
[K]		Ejemplo

Como resumen de las actividades propuestas presentamos la tabla 3.4.1. Puede verse en ella que las actividades referidas a aleatoriedad y experimentos aleatorios apenas incluyen ejercicios. Tan solo se muestran ejemplos de experimentos aleatorios y no aleatorios. En consecuencia, creemos que no puede realizarse un aprendizaje verdaderamente constructivo de esta noción. El concepto se presenta acabado al alumno y no hay situaciones problemáticas de las cuales pueda verse la necesidad del mismo, por lo que pensamos que no se presta atención suficiente al concepto.

3.4.2. ESTUDIO COMPARATIVO DE LA DISTRIBUCIÓN DE EJERCICIOS RESPECTO A LAS VARIABLES BÁSICAS

Una vez analizadas de modo global el tipo de ejemplos y ejercicios en todos los textos, dedicamos esta sección a un estudio comparado de estas variables en el caso particular de que el concepto puesto en juego sea el de aleatoriedad.

Son solo seis los ejemplos y ejercicios que hemos encontrado en relación con el experimento aleatorio y la aleatoriedad en los dos libros comparados, dos de ellos en el texto [I] y cuatro en el [A]. Como podemos observar en la tabla 3.4.2. sobre tipo de actividad pedida al alumno, no aparecen en estos dos libros ningún ejercicio relacionado con la aleatoriedad o el experimento aleatorio, aunque se presentan algunos ejemplos: introductorios en el texto [A] y posteriores a la definición en el libro [I] analizado.

Tabla 3.4.2. Frecuencia y (porcentaje) del tipo de ejemplos y ejercicios sobre experimento aleatorio en cada texto

Tipo de actividad	Libro [I]	Libro [A]	Total
Ejemplo introductorio	0 (0)	4 (100,00)	4 (66,67)
Ejemplo posterior	2 (100,00)	0 (0)	2 (33,33)
Total	2 (33,33)	4 (66,67)	6 (100,00)

Respecto a la actividad concreta a que se refieren estos ejemplos, observamos en la tabla 3.4.3. que aparecen los dos tipos que habíamos considerado en nuestro análisis de la sección. En el libro [I] se trata de discriminar entre experimentos aleatorios y deterministas, es decir, en el mismo ejemplo se muestran situaciones de los dos tipos para hacer consciente al alumno de sus diferencias. En el texto [A] se trata de poner ejemplos de experimentos aleatorios, sin otros deterministas que le sirvan de contrapartida.

Tabla 3.4.3. Frecuencia y (porcentaje) de la actividad sobre experimento aleatorio en cada texto

Actividad	Libro [I]	Libro [A]	Total
Discriminar	0 (0)	4 (100,00)	4 (66,67)
Proponer ejemplos	2 (100,00)	0 (0)	2 (33,33)
Total	2 (33,33)	4 (66,67)	6 (100,00)

La forma en que sería posible asignar las probabilidades en estos ejemplos sobre experimentos aleatorios es bastante variada, a pesar de ser pocos los ejemplos sobre el tema. En la tabla 3.4.4. observamos casos en que la asignación de probabilidades sería laplaciana, a partir de información estadística e incluso mediante la realización de experimentos por el propio alumno.

Tabla 3.4.4. Frecuencia y (porcentaje) de asignación de probabilidades en cada texto en las actividades sobre experimento aleatorio

Asignación	Libro [I]	Libro [A]	Total
Regla de Laplace	0 (0)	3 (75,00)	3 (50,00)
Información estadística	1 (50,00)	0 (0)	1 (16,67)
Experimento	1 (50,00)	1 (25,00)	2 (33,33)
Total	2 (33,33)	4 (66,67)	6 (100,00)

Los contextos empleados para los ejemplos sobre experimento aleatorio se presentan en la tabla 3.4.5. Son dos los contextos empleados, en los que los ejemplos se reparten en igual número: Juegos de azar y física. Sin duda ello se debe a que los juegos de azar proporcionan situaciones en las que es fácil para el alumno observar el carácter aleatorio del experimento y la física es un terreno apropiado para la búsqueda de situaciones de tipo determinista. Aunque los juegos de azar pueden ser adecuados, sobre todo desde el punto de vista de la motivación del alumno así como su familiaridad con algunos juegos de mesa, el hecho de que el libro de texto utilice sólo o mayoritariamente este contexto, puede hacer que el alumno obtenga la impresión de que la probabilidad sólo se aplica a situaciones de juego. Hacemos notar que el texto [I] sólo usa el segundo contexto por lo que no hay verdadera discriminación con los fenómenos deterministas.

Tabla 3.4.5. Frecuencia y (porcentaje) del contexto en cada libro en las actividades sobre experimento aleatorio

Contexto	Libro [I]	Libro [A]	Total
Juego	0 (0)	3 (75,00)	3 (50,00)
Física	2 (100,00)	1 (25,00)	3 (50,00)
Total	2 (33,33)	4 (66,67)	6 (100,00)

En la tabla 3.4.6. observamos que los tipos de espacio muestral que aparecen en los experimentos ejemplificados son infinitos (2 ejemplos) y finitos (4 ejemplos). En este último caso se trata de sucesos elementales equiprobables, salvo un ejemplo en el libro [A], que no usa ejemplos de espacios muestrales infinitos. Por el contrario, este es el único tipo de espacio muestral usado en los ejemplos sobre experimento aleatorio en el texto [I].

Tabla 3.4.6. Frecuencia y (porcentaje) del tipo de espacio muestral en cada texto en las actividades sobre experimento aleatorio

Tipo espacio muestral	Libro [I]	Libro [A]	Total
Infinito	2 (100,00)	0 (0)	2 (33,33)
Fnito 2 elementos equiprobables	0 (0)	1 (25,00)	1 (16,67)
Finito elementos equiprobables	0 (0)	2 (50,00)	2 (33,33)
Finito elementos no equiprobables	0 (0)	1 (25,00)	1 (16,67)
Total	2 (33,33)	4 (66,67)	6 (100,00)

En la tabla 3.4.7. observamos que la información de estos ejemplos se presenta exclusivamente en forma verbal, no habiendo diferencias entre los dos libros analizados, a pesar de que teóricamente sería posible en los ejemplos asignar probabilidades usando información estadística, e incluso experimentación.

Tabla 3.4.7. Frecuencia y (porcentaje) de la presentación de información en cada texto en las actividades sobre experimento aleatorio

Información	Libro [I]	Libro [A]	Total
Verbal	2 (100,00)	4 (100,00)	6 (100,00)
Total	2 (33,33)	4 (66,67)	6 (100,00)

3.4.3. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS EJERCICIOS Y EJEMPLOS RELACIONADOS CON LA IDEA DE EXPERIMENTO ALEATORIO

Respecto a las actividades presentadas, observamos un hueco importante en la falta de ejercicios relacionados con la idea de aleatoriedad y experimento aleatorio. Como señalan Harten y Steinbring (1983) para desarrollar el pensamiento estocástico no es suficiente confrontar a los individuos a situaciones estocásticas sencillas. Es necesario construir secuencias conectadas de tareas en las que el grado de dificultad y el rango de las técnicas y conceptos matemáticos sea variado y que muestre el significado de las diversas aproximaciones para interpretar fenómenos aleatorios reales.

Observamos que en el texto [I], se opta por la asignación de probabilidades mediante la información estadística o la experimentación, no haciendo uso en ninguna actividad de la regla de Laplace, mientras que en el libro [A], la mayor parte de las actividades hace uso de dicha regla.

Los contextos más utilizados como en la mayoría de los textos es el juego, seguido de la física. Aunque puede parecer adecuado, sobre todo desde el punto de vista de la motivación del alumno así como su familiaridad con algunos juegos de mesa, el hecho de que el libro de texto utilice sólo o mayoritariamente este contexto, puede hacer que el alumno obtenga la impresión de que la probabilidad sólo se aplica a situaciones de juego.

En relación con los espacios muestrales indicar que el texto [I] sólo utiliza el infinito, mientras que el libro [A] utiliza todos los demás casos, es decir, finito con dos elementos equiprobables, finito con más de dos elementos equiprobables y finito con elementos no equiprobables, no utilizando en ninguna actividad el espacio infinito, lo que parece adecuado a este nivel.

Por último, parece excesivo el uso que se hace de la presentación de la información de forma verbal, ya que a esta edad de 14 años, que son los destinatarios de los textos parece más aconsejable utilizar la información estadística así como proponer la realización de experimentos.

3.5. ESPACIO MUESTRAL. SUCESOS, SUS TIPOS Y OPERACIONES

El segundo bloque de ejercicios que vamos a analizar se refiere a los conceptos de espacio muestral, sucesos, sus tipos y operaciones. Como en el caso anterior comenzamos analizando las clases de actividades que, desde nuestro punto de vista, dotarían de sentido a estos conceptos para los alumnos. Seguidamente, haremos un estudio estadístico de la distribución de los ejercicios en los dos libros que hemos seleccionado.

3.5.1 TIPOLOGÍA BÁSICA DE EJEMPLOS Y EJERCICIOS RELACIONADOS CON EL ESPACIO MUESTRAL

Las actividades básicas que, respecto a la idea de espacio muestral hemos considerado, y que constituirían los elementos extensionales del significado del concepto son las siguientes:

SEM1: *Enumerar los elementos de un espacio muestral a partir de la descripción del experimento*. En esta actividad se pide el listado de todos los sucesos elementales en un espacio muestral, a partir de la descripción del mismo, generalmente hecha en forma verbal. Este problema es de naturaleza combinatoria, por lo tanto, si el experimento es complejo y el alumno no posee una capacidad suficiente de enumeración sistemática puede presentar ciertas dificultades, ya que en numerosas investigaciones como las de Fischbein y Gazit (1988) o Batanero y cols. (1997 a) y b)) se han puesto de manifiesto las serias limitaciones de los alumnos de secundaria sobre la combinatoria.

En el texto [A], hemos encontrado un ejercicio que podemos clasificar dentro de este apartado, en el que el experimento se describe verbalmente y, además, se indica al alumno una notación para la representación de los sucesos posibles en el experimento.

> *"56. Hallar el espacio muestral asociado al experimento aleatorio de sacar una moneda de un bolso que contiene una moneda de cinco pesetas, una moneda de 25 pesetas y una moneda de 50 pesetas.(Representar las monedas por las letras a, b, c). Seguidamente enunciar los sucesos $a \cup b$, $a \cup c$ y $(a \cup b) \cap (a \cup c)$"* (Texto [A], p. 54).

Ejercicios similares aparecen en el mismo texto [A]: 57, 58, 59, 60, 61 y 63, (p. 54); en [F]: 1 y 2, (p. 222), ejercicio 5 (p. 223) y ejercicios 1a) y 2a), (p. 233); en [G]: 269, 270 y 277, (p. 279); en [H]: ejercicios 6.16 a), c) y 6.17 a), (p. 189); y en [K]: ejercicios 25.1 a), 25.2 a), 25.3 a), 25.4 a), 25.7 y 25. 10 a) (p. 406).

Los ejemplos encontrados han sido numerosos en los textos analizados. En [A]: Ejemplo (p. 40) y 1, 2 y 3 (p. 41); en [D]: Ejemplo (p. 70); en [E]: Ejemplo (p. 174); en [F]: Ejemplos, (p. 222); en [G]: Ejemplo 3, (p. 192); en [H]: Ejemplo (p. 188); en [I]: Ejemplos, (p. 222); en [J]: Ejemplo 1, (p. 292) y en [K]: Ejemplos 1, 2, 3 y 4 (p. 398).

SEM2: *Calcular el número de elementos de un espacio muestral haciendo uso de razonamiento combinatorio.* Esta actividad corresponde a un problema combinatorio de recuento. El alumno debe calcular el número de elementos del espacio muestral sin enumerarlos, bien identificando una operación combinatoria o aplicando las reglas combinatorias básicas de la suma, producto y cociente. Aunque la actividad desarrollada por el alumno en los tipos de actividades SEM1 y SEM2 son de naturaleza combinatoria más que probabilística, creemos que son fundamentales para que el alumno adquiera la idea de espacio muestral. Además permite establecer la conexión entre probabilidad y combinatoria, que es considerada fundamental por autores como Heitele (1975) y Fichbein (1975). En el texto [H], encontramos el siguiente ejercicio, que podemos incluir en esta categoría:

> *"6.16. c) Lanzamos dos dados y observamos la puntuación obtenida en cada uno de ellos. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral? Escríbelos"* (Texto [H], p. 189).

Ejercicios similares aparecen en el texto [H]: Ejercicio 6.18 e), (p. 190); en [F]: Ejercicio 1 b), (p. 233) y en [J]: Ejercicio 4, (p. 295). No aparece ningún ejemplo del cálculo del número de elementos de un espacio muestral, utilizando razonamiento combinatorio, en los textos analizados.

Como resumen de la tipología de ejemplos y ejercicios relacionados con el espacio muestral, presentamos la tabla 3.5.1. donde aparece el tratamiento dado a las actividades relacionadas con estos conceptos en los textos analizados, dejándose en blanco cuando no se trata. En ella destacamos la escasez de ejercicios relacionados con la idea de espacio muestral. Esto puede ser una opción del autor lógica en los textos [B] e [I] en los que no se introduce el concepto. En el resto de los manuales y al comparar con la presentación teórica, que se analizó en la sección 2.3.1., observamos que en muchos casos se ha estudiado el tema teóricamente, pero no se presentan ejercicios, lo que indica de nuevo un énfasis excesivo en la presentación teórica sin contrapartida con las actividades que den un significado más completo a los conceptos.

Tabla 3.5.1. Actividades relacionadas con el concepto de espacio muestral

	SEM1	SEM2
[A]	Ejemplos y ejercicios	
[B]		
[C]		
[D]	Ejemplo	
[E]	Ejemplo	
[F]	Ejemplos y ejercicios	Ejercicio
[G]	Ejemplo y ejercicios	
[H]	Ejemplo y ejercicios	Ejercicios
[I]	Ejemplos	
[J]	Ejemplo	Ejercicio
[K]	Ejemplos y ejercicios	

3.5.2. TIPOLOGÍA DE EJEMPLOS Y EJERCICIOS RELACIONADOS CON LOS SUCESOS Y SUS OPERACIONES

Una vez analizado el espacio muestral, pasamos a los sucesos y operaciones entre los mismos que revisten gran importancia porque una correcta identificación de los sucesos implicados es necesaria para el cálculo adecuado de sus probabilidades. Puesto que son numerosos los conceptos que incluimos en este apartado, aparece un mayor número de posibles actividades. Hemos clasificado estas actividades en las siguientes situaciones prototípicas o elementos extensionales del concepto:

SS1: *Escribir todos los sucesos posibles (simples o compuestos) asociados a un experimento.* Se trata ahora de formar el conjunto de partes P(E), siendo E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, a partir o bien de la descripción del experimento o del espacio muestral, ya construido. Es también un problema de tipo combinatorio, donde el alumno debe formar todas las combinaciones de elementos del espacio muestral tomados de uno en uno, dos en dos, etc. En el texto [F], encontramos el siguiente ejercicio:

> *"3. El espacio muestral que resulta al lanzar dos monedas es E = {cc, cx, xc, xx}. Escribe los sucesos posibles"* (Texto [F], p. 223).

Ejercicios similares aparecen en el texto [F]: Ejercicio 4, (p. 223) y en [G]: Ejercicio 277 b), (p. 279), aunque en ellos, dado un determinado espacio muestral, piden cuántos sucesos hay. Ejemplos de este tipo hemos encontrado en los textos [C]: Ejemplo (p. 68); [F]: Ejemplo (p. 223); en [I]: Ejemplo (p. 222) y en [K]: Ejemplos 1 y 2, (p. 399).

SS2: *Dados dos sucesos formar su unión.* En este caso el alumno debe identificar los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos, y formar con ellos el suceso unión, que será muy importante para el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos, conocidas las probabilidades de sucesos simples. En el texto [G], hemos encontrado el siguiente ejercicio:

> *"273. Sobre una baraja de cincuenta y dos cartas se realiza la experiencia extraer un naipe al azar y ver cuál es. Sea el suceso A = obtener un as y el B = obtener corazones. ¿De cuántos sucesos elementales consta el suceso reunión $A \cup B$?"* (Texto [G], p. 279).

Ejercicios similares aparecen en [A]: Ejercicio 5.6 (p. 54); en [F]: Ejercicio 8, (p. 224); en [H]: Ejercicio 6.18 f) (p. 190) y en [K]: Ejercicio 25.12, (p. 406). Ejemplos de este tipo aparecen en los textos [A]: Ejemplo (p. 44); [C]: Ejemplo (p. 67) y ejemplo (p. 68); [D]: Ejemplo (p. 73); [F]: Ejemplo (p. 224); [G]: Ejemplo 7, (p. 194) y en [K]: ejemplos 1, 2 y 3, (p. 402). Consideramos importante que el alumno realice al menos una vez esta actividad puesto que el término "unión" no tiene el mismo significado en la vida ordinaria y en el cálculo de probabilidades. Por la misma razón, consideramos importante realizar ejercicios referidos al resto de operaciones con sucesos.

SS3: *Dados dos sucesos formar su intersección*. Dentro de esta tarea, se deben identificar los elementos comunes a los dos sucesos y formar con ellos el suceso intersección. Esta operación será utilizada tanto para el cálculo de probabilidades condicionales, en el estudio de la independencia entre sucesos y el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos. En el texto [F], encontramos un ejercicio de este tipo:

> *"8. Consideremos el espacio muestral E = {1,2,3,4,5,6}. Sean el suceso A = {1,2,3,4} y el suceso B = {4,5,6}.*
> *Escribe el suceso $A \cap B$ y el suceso $A \cup B$. ¿Son A y B sucesos incompatibles?"* (Texto [F], p. 224).

Ejercicios similares aparecen en [A]: Ejercicio 5.6 (p. 54); en [G]: Ejercicio 274, (p. 279); en [H]: Ejercicio 6.18 f) (p. 190) y en [K]: Ejercicio 25.12, (p. 406). Ejemplos de este tipo aparecen en los textos [A]: Ejemplo (p. 44); [C]: Ejemplo (p. 67) y ejemplo (p. 68); [D]: Ejemplo (p. 73); [F]: Ejemplo (p. 224); [G]: Ejemplo 8, (p. 195) y en [K]: Ejemplos 1, 2 y 3, (p. 402).

SS4: *Dados dos sucesos formar su diferencia.* Consiste en formar el suceso diferencia con los elementos que pertenecen a uno de los sucesos y no al otro. Ejercicios y ejemplos de este tipo no hemos encontrado en ningún texto. Sería importante este tipo de ejercicios y comprobar también que la diferencia no tiene la propiedad conmutativa.

SS5: *Enumerar los elementos del complementario de un suceso dado.* El alumno debe identificar los sucesos elementales que no pertenecen al suceso dado y formar con ellos el suceso complementario. Tanto esta operación como la anterior son necesarias en algunos casos de cálculo de probabilidades. Además en el cálculo de probabilidades encontramos muchos ejemplos en el que resulta ventajoso calcular la probabilidad de un suceso restando de la unidad la probabilidad de su suceso complementario. No hemos encontrado ningún ejercicio de este tipo. Los ejemplos encontrados han sido en los textos [C]: Ejemplo (p. 67) y ejemplo (p. 68); [D]: Ejemplo (p. 175); [F]: Ejemplo (p. 225); [G]: Ejemplo 6, (p. 194) y en [K]: Ejemplos 1, 2, 3, 4 y 5 (p. 403).

SS6: *Reconocer/discriminar/escribir ejemplos de sucesos simples y compuestos*. Se trata de discriminar sucesos simples y compuestos o proponer ejemplos de sucesos simples y compuestos. Aunque esta actividad pueda parecer muy sencilla, la no discriminación entre sucesos simples y compuestos puede estar en el origen del sesgo de equiprobabilidad descrito por Lecoutre (1988), por el que los alumnos consideran todos los sucesos equiprobables, con independencia del número de casos favorables asociados a cada uno de ellos. En el único texto que hemos encontrado un ejercicio ha sido en el texto [A]:

> *"62. Expresar 5 sucesos del experimento aleatorio consistente en sacar 3 bolas de una urna en la que hay 5 bolas rojas, 6 negras y 8 blancas"* (Texto [A], p. 54).

Así mismo, han sido en los textos [C], p. 68 e [I], pp. 243-244, los únicos ejemplos hallados, de este tipo de actividad.

SS7: *Reconocer/discriminar/escribir ejemplos de sucesos complementarios/no complementarios.* Cuando se pide a alumno reconocer o proponer ejemplos de cuando dos sucesos son complementarios y cuando no son complementarios. En el texto [J] hemos encontrado un ejercicio de este tipo:

> *"3. Dos sucesos se llaman contrarios si son incompatibles, y además su unión es el espacio muestral. De acuerdo con esta definición, si $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, ¿cuál es el suceso contrario de $\{1,2\}$? ¿Y el contrario de $\{4\}$?* (Texto [J], p. 295).

Ejercicios similares aparecen en el texto [F]: Ejercicios 9, 10, 11, 12, 13 y 14 (p. 225); en [G]: Ejercicios 272 y 276, (p. 279); en [H]: Ejercicio 6.17 d), e), f), g) y h), (p. 189) y ejercicio 6.19 d), (p. 191); en [J]: Ejercicio 5, (p. 295) y en [K]: Ejercicios 25.9 y 25.11, (p. 406). Los ejemplos encontrados han sido en los textos [A]: Ejemplo (p. 42) y ejemplo b) (p. 43), en [D]: Ejemplos 1 y 2, (p. 71) y en [I]: Ejemplos, p. 245.

SS8: *Reconocer/ discriminar/ escribir ejemplos de sucesos incompatibles*. Se pide reconocer o proponer ejemplos de sucesos que no tengan sucesos elementales comunes. Puesto que algunos autores han descrito la confusión que muestran los alumnos entre sucesos incompatibles y sucesos independientes, sería necesario la presencia de este tipo de actividades para superar la confusión descrita. En el texto [F] hemos encontrado el siguiente ejercicio:

> *"7. Di dos sucesos incompatibles con el suceso sacar dos caras al tirar dos monedas"* (Texto [F], p. 224).

Ejercicios similares aparecen en el mismo texto [F]: Ejercicio 8 (p. 224) y ejercicios 10 y 14 (p. 225); en [G]: Ejercicio 275 c), (p. 279); en [H]: Ejercicio 6.19 b) y c), (p. 191); en [J]: Ejercicios 1 y 5, (p. 295) y en [K]: Ejercicio 25.14, (p. 407). Ejemplos de este tipo aparecen en los textos [A]: Ejemplo (p. 42) y ejemplo (p. 43); en [C]: Ejemplo (p. 67) y ejemplo (p. 68); en [D]: Ejemplos 1 y 2, (p. 71); en [F]: Ejemplo (p. 224), en [G]: Ejemplos 9 y 10, (p. 196) y en [I], pp. 243-244.

SS9: *Demostrar o comprobar propiedades de las operaciones con sucesos.* Se pide a los alumnos una demostración de algunas propiedades de las operaciones con sucesos, generalmente de tipo algebraico o bien comprobar estas propiedades en casos particulares. Esta actividad no es muy frecuente y suele estar asociada a un mayor énfasis en la presentación formal del tema. En el texto [K], hemos encontrado el siguiente ejercicio, donde se pide comprobar las propiedades del álgebra de Boole, para determinados sucesos:

> *"25.13. Con los sucesos del ejercicio 25.10, comprueba todas las propiedades del Algebra de Boole"* (Texto [K], p. 406).

Un ejercicio similar aparece en el texto [F]: Ejercicio 6, (p. 224), aunque solo pide enunciar y escribir las propiedades de la unión y de la intersección de sucesos. Los únicos ejemplos encontrados de este tipo han sido también en el texto [K]: Ejemplos 1,2 y 3 (pp. 403-404), ejemplos 1 y 2 del apartado 25.6.5 y ejemplo 1 del apartado 25.6.6 (p. 404).

Como resumen de la tipología de actividades relacionadas con los sucesos, sus tipos y operaciones, presentamos la tabla 3.5.2. donde se indica el tratamiento dado en los textos a las actividades relacionadas con estos conceptos

Podemos observar la gran variabilidad en cuanto al rango de ejercicios relacionados con los tipos de sucesos y sus operaciones. Nos encontramos desde casos como [B] que no hacen mención a este tema, hasta textos como [F], [G] y [K] con una gran variedad. También hay libros en que solo se presentan ejemplos y no hay ningún ejercicio relacionado con estas nociones.

Respecto a los ejercicios y ejemplos la variabilidad de los libros es muy grande, desde no incluirlos hasta contemplar la mayoría de actividades considerada en nuestro análisis. Creemos que ello implica una diferenciación en el significado que de estos conceptos construirán los alumnos que usen unos u otros manuales.

Tabla 3.5.2. Actividades presentadas en los textos relacionadas con los sucesos y sus operaciones

	SS1	SS2	SS3	SS4	SS5	SS6	SS7	SS8	SS9
[A]		Ejemplo y ejercicio	Ejemplo y ejercicio			Ejercicio	Ejemplos	Ejemplos	
[B]									
[C]	Ejemplo	Ejemplos	Ejemplos		Ejemplos	Ejemplo		Ejemplos	
[D]		Ejemplo	Ejemplo		Ejemplos		Ejemplos	Ejemplos	
[E]									
[F]	Ejemplo y ejercicios	Ejemplo y ejercicio	Ejemplo y ejercicio		Ejemplo		Ejercicios	Ejemplo y ejercicios	Ejercicio
[G]	Ejercicio	Ejemplo y ejercicio	Ejemplo y ejercicio		Ejemplo		Ejercicios	Ejemplos y ejercicio	
[H]		Ejercicio	Ejercicio				Ejercicios	Ejercicio	
[I]	Ejercicios					Ejemplos	Ejemplos		
[J]							Ejercicios	Ejercicios	
[K]	Ejemplos	Ejemplos y ejercicio	Ejemplos y ejercicio		Ejemplos		Ejercicios	Ejercicio	Ejemplos y ejercicio

3.5.3. ESTUDIO COMPARATIVO DE LA DISTRIBUCIÓN DE EJERCICIOS Y EJEMPLOS RELACIONADOS CON EL ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS

Puesto que el número de ejemplos y ejercicios relacionados con la idea de espacio muestral, sucesos y operaciones entre sucesos es pequeño, hemos analizado conjuntamente la distribución de ejercicios relacionados a estos conceptos en los dos libros de texto. El total del ejercicios y ejemplos sobre estos temas ha sido de 8 en el libro [I], y 29 en el texto [A], lo que, como habíamos indicado anteriormente indica un mayor énfasis por el tema en éste último (Tabla 3.5.3.). Teniendo en cuenta, además que el número total de ejemplos y ejercicios es casi el triple que en el texto [I], la importancia relativa de la idea de espacio muestral y sucesos se hace mayor en el libro [A], propiciado por la presentación del tema que está muy apoyada en la teoría de conjuntos. Este libro [A] es un buen ejemplo del énfasis dado al enfoque conjuntista para la enseñanza de la probabilidad en la “corriente de la matemática moderna”, en la que se aceptaba la idea de que la reconstrucción lógica de los conceptos era posible a partir de un soporte formal.

La probabilidad fue un campo considerado como un buen ejemplo para mostrar la utilidad de la teoría de conjuntos y de la axiomatización dentro de esta corriente (Borovcnik y Peard, 1996).

Destacamos también el hecho de que la mayor parte de actividades son ejemplos, al contrario que en la distribución global estudiada en la sección 3.3. donde destacaban los ejercicios posteriores a los conceptos. En este sentido, la idea de espacio muestral recibe una menor atención respecto al número de ejercicios propuestos en estos dos libros, que el resto de los conceptos probabilísticos. Se observa también que mientras en el segundo libro los ejercicios son posteriores al concepto en el primero suelen ser introductorios.

Tabla 3.5.3. Frecuencia y (porcentaje) del tipo de situación en cada texto en relación al espacio muestral y sucesos

Tipo de actividad	Libro [I]	Libro [A]	Total
Ejemplo introductorio	5 (62,5)	18 (62,06)	23 (62,16)
Ejemplo posterior	0 (0)	7 (24,13)	7 (18,92)
Ejercicio introductorio	3 (37,5)	0 (0)	3 (8,11)
Ejercicio posterior	0 (0)	4 (13,79)	4 (10,81)
Total	8 (21,62)	29 (78,38)	37 (100,00)

En la tabla 3.5.4. presentamos los diferentes tipos de actividad en que podemos clasificar estos ejercicios, de acuerdo con el siguiente sistema de codificación:

1. Enumerar los elementos de un espacio muestral a partir de la descripción del experimento.
2. Calcular el número de elementos de un espacio muestral haciendo uso del razonamiento combinatorio.
3. Escribir todos los sucesos (simples o compuestos) asociados a un experimento.
4. Dados dos sucesos formar su unión.
5. Dados dos sucesos formar su intersección.
6. Reconocer/discriminar/escribir ejemplos de sucesos simples y compuestos.
7. Reconocer/discriminar/escribir ejemplos de sucesos complementarios/ no complementarios.
8. Reconocer/discriminar/escribir ejemplos de sucesos incompatibles.
9. Demostrar o comprobar propiedades de las operaciones con sucesos.

Tabla 3.5.4. Frecuencia y (porcentaje) de la actividad pedida en cada texto en relación al espacio muestral y sucesos

Actividad	Libro [I]	Libro [A]	Total
1. Enumerar elementos	0 (0)	8 (27,59)	8 (21,62)
2. Calcular número de elementos	1 (12,50)	0 (0)	1 (2,70)
3. Escribir todos los sucesos	3 (37,50)	2 (6,90)	5 (13,51)
4. Dados 2 sucesos formar unión	0 (0)	3 (10,34)	3 (8,11)
5. Dados 2 sucesos formar su intersección	0 (0)	2 (6,90)	2 (5,41)
8. Ejemplos de sucesos simples y compuestos	2 (25,00)	7 (24,14)	9 (24,32)
9. Ejemplos de sucesos complementarios	2 (25,00)	2 (6,90)	4 (10,81)
10. Ejemplos de sucesos incompatibles	0 (0)	3 (10,34)	3 (8,11)
11. Propiedades operaciones sucesos	0 (0)	2 (6,90)	2 (5,41)
Total	8 (21,62)	29 (78,38)	37 (100,00)

Como podemos ver las categorías más frecuentes de actividades han sido la enumeración del espacio muestral (8 casos) o de todos los elementos de un suceso definido mediante comprensión (5 casos) y obtener la diferencia de dos sucesos simples o compuestos (9 casos). Observamos también que en el segundo de los libros aparecen prácticamente todas las categorías de actividades que hemos considerado en nuestro análisis, lo cual confirma nuestra opinión de la mayor importancia dada en este texto al álgebra de sucesos.

En la tabla 3.5.5. se especifican los contextos utilizados en los ejercicios o ejemplos sobre espacio muestral.

Tabla 3.5.5. Frecuencia y (porcentaje) del contexto en cada libro en relación al espacio muestral y sucesos

Contexto	Libro [I]	Libro [A]	Total
1. Juego de azar	7 (87,50)	26 (89,66)	33 (89,19)
2. Experiencias cercanas alumno	1 (12,50)	3 (10,34)	4 (10,81)
Total	8 (21,62)	29 (78,38)	37 (100,0)0

Respecto a los contextos asociados con este tipo de ejercicios y ejemplos (tabla 3.5.5), se limitan a los juegos de azar (categoría 1) y a ejemplos de experiencias cercanas al mundo del niño (categoría 6). Esta drástica reducción del tipo de contexto se debe posiblemente a la mayor facilidad de estos contextos para la enumeración del espacio muestral asociado al experimento. Sobre todo en el primer caso se trata, generalmente de espacios muestrales con un pequeño número de elementos, con los que el alumno se halla familiarizado y donde es sencillo definir sucesos compuestos comprensibles para el alumno. Las proporciones de uno y otro tipo de contexto son similares en los dos libros de texto, ya que prácticamente el 90 por ciento de los ejercicios y ejemplos se refieren al terreno de los juegos de azar.

En la tabla 3.5.6. presentamos el tipo de espacio muestral que aparece en los ejercicios o ejemplos analizados.

Respecto a los espacios muestrales (tabla 3.5.6), la mayoría de los ejemplos y ejercicios se refieren ahora a espacios muestrales finitos, con sucesos equiprobables y más de dos elementos. Ello concuerda con los contextos utilizados ya que, salvo el caso de la moneda (2 elementos) la mayoría de los generadores aleatorios usados en los juegos de azar (dados, loterías, sorteos, ruletas, cartas) tienen más de dos elementos diferentes También concuerda con el análisis global de los ejercicios, realizado en la sección 3.3. Las proporciones de los diferentes tipos de espacio muestral se mantienen de nuevo en los dos libros. En el texto [A] aparece también un caso en que no se especifica el espacio muestral. Se trataría de un ejercicio descontextualizado, no relacionado con ningún experimento particular en el que se pide al alumno simplemente realizar una serie de operaciones conjuntistas con sucesos, que realmente está poco relacionado con la idea de probabilidad.

Tabla 3.5.6. Frecuencia y (porcentaje) del espacio muestral en cada texto en las actividades sobre espacio muestral y sucesos

Espacio muestral	Libro [I]	Libro [A]	Total
1. Finito, suceso equiprobable con 2 elementos	2 (25,00)	5 (17,24)	7 (18,92)
2. Finito, suceso equiprobable con más de 2 elementos	6 (75,00)	23 (79,31)	29 (78,38)
3. Impreciso	0 (0)	1 (3,45)	1 (2,70)
Total	8 (21,62)	29 (78,38)	37 (100,00)

En la tabla 3.5.7. incluimos las distintas formas de presentar la información en los ejemplos y ejercicios relacionados con este concepto.

Tabla 3.5.7. Frecuencia y (porcentaje) de la información dada por cada libro de texto en las actividades sobre espacio muestral y sucesos

Información	Libro [I]	Libro [A]	Total
1. Verbal	6 (75,00)	22 (75,86)	28 (75,68)
2. Tabla	0 (0)	1 (3,45)	1 (2,70)
3. Diagrama de árbol	0 (0)	4 (13,79)	4 (10,81)
4. Fotos, dibujos, situaciones	2 (25,00)	2 (6.90)	4 (10,81)
Total	8 (21,62)	29 (78,38)	37 (100.00)

En este tipo de ejercicios y ejemplos, la información se presenta casi exclusivamente en forma verbal, al igual que en el global de ejercicios, analizado en la sección 3.3. y esto no varía en los dos libros. Sin embargo, encontramos una mayor proporción del uso de fotos o ilustraciones en el libro [I], aunque como son sólo dos los ejemplos donde esto ocurre, no tiene peso estadístico en el total. En el texto [A], encontramos en algunos casos el uso del diagrama en árbol (4 ejemplos o ejercicios) y el uso de tablas (1 caso donde la información se da a partir de una tabla de contingencia).

3.5.4. CONCLUSIONES SOBRE LOS EJERCICIOS Y EJEMPLOS RELACIONADOS CON EL ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS

Tanto en el análisis de los tipos de actividades relacionadas con estos conceptos, como en el estudio de su distribución en dos de los libros de texto hemos visto que, en general, el número de actividades es escaso. Ello puede ser comprensible, por el menor énfasis que, a lo largo del período se ha ido dando progresivamente a las estructuras axiomáticas y a la teoría de conjuntos en relación con la probabilidad.

Sin embargo, y a pesar de que actualmente prefiramos un enfoque más intuitivo de la enseñanza del tema, no podemos olvidar que las operaciones con sucesos son las que nos posibilitan el cálculo de probabilidades, más allá de una simple asignación inicial a los sucesos elementales. La simulación proporciona hoy día una herramienta alternativa de asignación de probabilidades a sucesos complejos. No obstante, no hay que olvidar que los valores obtenidos con estas simulaciones son sólo estimaciones y están sujetos a las fluctuaciones aleatorias. Por otro lado, la probabilidad empírica nunca proporciona una justificación a los valores obtenidos, incluso cuando la aproximación fuese suficientemente precisa.

Por ello creemos que es necesaria conservar las actividades relacionadas con los sucesos y sus operaciones, aunque se mantenga un lenguaje no técnico para las mismas. Idénticas consideraciones hacemos para la idea de espacio muestral y para las actividades de enumeración de sus elementos, que permiten establecer un puente entre la combinatoria y probabilidad y desarrollar el razonamiento combinatorio en nuestros alumnos.

3.6. FRECUENCIAS RELATIVAS Y SUS PROPIEDADES

3.6.1. TIPOLOGÍA BÁSICA DE EJEMPLOS Y EJERCICIOS PROPUESTOS Y SU PRESENCIA EN LOS LIBROS DE TEXTO

En esta sección analizamos los ejercicios y ejemplos que se relacionan con la idea de frecuencia relativa, base intuitiva para la comprensión de la probabilidad por parte de los alumnos. Para analizar la forma en que los libros de texto presentan la convergencia estocástica de la frecuencia relativa a la probabilidad, hemos tenido en cuenta los siguientes tipos de actividades (elementos extensionales del significado de la frecuencia relativa) que Malara (1989) diferencia y pueden proponerse a los alumnos, relacionados con el estudio de las frecuencias relativas y el enfoque frecuencial de la probabilidad:

SF1: Calcular la frecuencia relativa de un suceso aplicando la definición.

SF2: Comprobación de propiedades básicas de la frecuencia relativa (que es un número comprendido entre 0 y 1; que la frecuencia relativa del suceso seguro es la unidad).

SF3: Comprobación sobre la frecuencia relativa del suceso contrario de uno dado.

SF4: Comprobación de la frecuencia relativa de la unión de sucesos (incompatibles o compatibles).

SF5: Estudio de la frecuencia relativa de un suceso en una serie de experimentos, cuando se conoce la probabilidad teórica de los mismos.

SF6: Análisis de la variación de la frecuencia relativa al aumentar el numero de experiencias.

SF7: Enunciado de la ley empírica de los grandes números y confrontación con los resultados obtenidos en experimentos realizados por el alumno.

SF8: *Atribución de probabilidades a sucesos, sobre la base de la frecuencia relativa de un gran número de pruebas*.

SF9: Presentación de ejemplos del carácter aproximado de la asignación de probabilidades basada en las frecuencias relativas.

SF10: Presentación de ejemplos de valoraciones experimentales de la probabilidad a partir de series grandes de experimentos.

SF11:*Reflexión sobre la inadecuación de la valoración clásica de la probabilidad de un suceso cuando se puede obtener una mejor valoración a partir del conocimiento de tipo estadístico*.

SF12: Presentación de experimentos sencillos para los cuales no es posible estudiar a priori la probabilidad de los sucesos.

Cada una de estas actividades podrán dar lugar a prácticas significativas en la comprensión de la idea de convergencia estocástica. Indicaremos que hemos considerado todas las actividades propuestas en los capítulos de probabilidad de los textos, y dentro de los capítulos de estadística, solo hemos tenido en cuenta los ejemplos y ejercicios sobre frecuencia relativa pero referidos a experimentos aleatorios, porque los ejercicios y ejemplos sobre variables estadísticas son muy numerosos y no son objeto del presente estudio. A continuación analizamos cada uno de estos apartados:

SF1: Calcular la frecuencia relativa de un suceso aplicando la definición.

Aunque a nivel teórico se estudia en todos los textos las definiciones de frecuencia absoluta y frecuencia relativa, bien sea en el capítulo de probabilidad o de estadística, no ocurre así con las actividades propuestas. En el texto [A] encontramos el siguiente ejemplo:

"Si al realizar el experimento aleatorio
Lanzar una moneda al aire y observar el resultado:
Realizamos cinco pruebas y obtenemos el resultado c, c, f, c, f, la frecuencia absoluta del suceso c es, en esta muestra, 3, y la frecuencia relativa de dicho suceso es:

$$fr(c) = \frac{3}{5}$$

"(Texto [A], p. 45).

En el mismo texto solo aparece otro ejemplo y ningún ejercicio sobre este concepto. En el texto [E], dentro del capítulo de estadística aparece el siguiente ejercicio:

"Al lanzar un dado 30 veces, obtenemos los siguientes resultados:
3, 5, 2, 6, 1, 4, 2, 4, 5, 2, 1, 3, 6, 4, 5, 3, 2, 5, 1, 3, 5, 2, 1, 5, 4, 6, 1, 4, 2, 5
a) Forma la tabla de frecuencias (absolutas y relativas) de los 6 resultados posibles. Calcula la suma de las frecuencias relativas.
b) Dibuja el diagrama de frecuencias" (Texto [E], p. 165).

Ejercicios similares hemos encontrado en los siguientes textos: [C]: 2, p. 77; [E]: 3, 4 y 5 de la p. 176; [F]: 15 y 16 de la p. 226; [H]: e) p. 197; [I]: 10, p. 233; 12, p. 238 y del 17 al 19 de la p. 239.

Ejemplos relacionados con este tipo de actividades aparecen en: [A]: p. 45; [C]: p. 69; [D]: Ejemplos de las pp. 74, 75 y 76; [F]: p. 226; [G]: 12 y 13, p. 200; [I]: Ejemplo, p. 229; [J]: Ejemplo, p. 226: [K]: Ejemplos pp. 409 y 410; 3, p. 427; a) p. 429 y ejemplo p. 432.

SF2: Comprobación de propiedades básicas de la frecuencia relativa (que es un número comprendido entre 0 y 1; que la frecuencia relativa del suceso seguro es la unidad).

En relación a esta actividad sólo hemos encontrado un ejercicio en el texto [E]:

"1. Demuestra que toda frecuencia relativa es un número comprendido entre 0 y 1, y que la suma de las frecuencias relativas vale 1" (Texto [E], p.173).

Ejemplos de este tipo no aparecen en ningún texto.

SF3: Comprobación sobre la frecuencia relativa del suceso contrario de uno dado.

El único ejemplo, sobre el experimento consistente en extraer una carta entre un as, una sota, un caballo y un rey, lo hemos encontrado en el texto [C]:

"Los sucesos {C, R} y {A, S} son complementarios. Sus frecuencias relativas sumarán 1.
fr ({C, R}) = 0,52
fr ({C, R}) + fr ({A, S}) = 0,52 + 0,48 = 1
fr ({A, S}) = 0,48" (Texto [C], p.71).

No aparece ningún ejercicio sobre esta propiedad en ninguno de los textos analizados.

SF4: Comprobación de la propiedad sobre la frecuencia relativa de la unión de *sucesos (incompatibles o compatibles).*

Solo hemos encontrado un ejercicio en el texto [F]:

"17. Se ha lanzado una moneda quince veces y el suceso A: "salir cara" se ha realizado ocho veces. Halla:
a) Frecuencia absoluta del suceso A y del suceso B "salir cruz"
b) Frecuencia relativa del suceso $A \cup B$" (Texto [F], p.227).

En el caso de los ejemplos ocurre lo mismo. Sólo hemos encontrado un ejemplo similar al ejercicio anterior en el texto [F] en la p.227 y otro ejemplo en el texto [C] en la p. 71.

SF5: *Estudio de la frecuencia relativa de un suceso en una serie de experimentos, cuando se conoce la probabilidad teórica de los mismos*.

Se trata de analizar la variación de la frecuencia relativa en una serie de ensayos, en relación con la probabilidad teórica del suceso, asignada por consideraciones de simetría. La frecuencia relativa de un suceso en una serie de experimentos en una variable aleatoria y, como tal, variará de una muestra a otra. Sin embargo, las variaciones dependen del tamaño de la muestra y se van haciendo cada vez más infrecuentes conforme aumenta éste. Esta actividad origina prácticas, como la recogida y análisis de datos, que permitirán confrontar los valores esperados con los observados en un conjunto de datos, mostrando la variabilidad asociada a los experimentos. Este aspecto es recogido en [I] y [K], p. 411. En [I], dedica una sección completa a las frecuencias absoluta y relativa y estudia la convergencia de la frecuencia relativa hacia la probabilidad teórica utilizando para ello la idea de distribución esperada y distribución empírica (pp. 229-236).

En [I], en el apartado dedicado al estudio de la frecuencia absoluta y relativa, que denomina *"distribución esperada y distribución empírica"* está introduciendo implícitamente la idea de variable estadística y variable aleatoria por medio de un ejemplo de experimento aleatorio de lanzar un dado. Introduce explícitamente las frecuencias relativas, la distribución de frecuencias y la representación por diagramas de barras de las distribuciones de probabilidades (teórica y empírica) y las compara. Presenta la probabilidad de un suceso como el valor esperado de la frecuencia relativa correspondiente a dicho suceso en la variable estadística, frecuencia relativa del suceso en una serie de experimentos. Es decir, usa la concepción frecuencial de la probabilidad.

Va mostrando, a través de un ejemplo, la convergencia de la distribución empírica según aumenta el número de experimentos hacia la distribución teórica (o esperada) (pp. 229-236). Señala que en algunos casos (dado sesgado) no poseemos la distribución esperada y procedemos al revés, obteniendo una distribución empírica para un número grande de experimentos y haciendo una estimación de la distribución esperada:

"Hay ocasiones en que la experiencia aleatoria que se va a realizar tiene unas condiciones de regularidad tales que podemos tener, a priori (antes de hacer ninguna experiencia), la distribución esperada.
Esto es lo que ocurre con los lanzamientos de dados o monedas correctas y con las extracciones de cartas en barajas completas. Posteriormente, la experimentación nos lleva a resultados que se parecen mucho a los esperados, tanto más cuanto mayor es el número de lanzamientos o de extracciones.
Pero otras veces no hay ninguna referencia a priori. Salo la experimentación nos permitirá obtener datos sobre el comportamiento de los distintos sucesos. Los datos obtenidos serán tanto mejores (tanto más fiables) cuanto más larga sea la experimentación" (Texto [I], p. 231).

Esta presentación soslaya, sin embargo dos problemas importantes en la estimación empírica de probabilidades, esto es, en la aproximación frecuencial. En primer lugar, no se insiste suficientemente en las características especificas de la convergencia aleatoria. Se señala la aproximación gradual de los resultados empíricos a los observados, pero no se hace mención a las fluctuaciones esporádicas que acompañan a esta convergencia. Por tanto, no es exactamente cierto que los resultados observados sean tanto mas parecidos a los esperados cuanto mayor sea el número de experimentos. Sin embargo, mas adelante diferencia entre distribución esperada y empírica, en donde implícitamente podrá estar recogida esta propiedad.

Además, se obvia el hecho de que la idea de regularidad (el principio de indiferencia) es un postulado teórico, lo mismo que la independencia de sucesos, pensada también para aplicar las leyes de límite (Ríos, 1967). Como señala Steinbring (1986), incluso en los dispositivos aparentemente más perfectos, como el aparato de Galton puede haber una pequeña dependencia en los sucesivos experimentos. El resto de los libros no recoge este aspecto.

SF6: *Análisis de la variación de la frecuencia relativa al aumentar el numero de experiencias*.

La variabilidad asociada a los experimentos aleatorios no puede suprimirse, pero si reducirse al aumentar el tamaño de las muestras. Precisamente uno de los sesgos más insistentemente resaltados por autores como Kahneman y cols. (1982), Pérez Echeverría (1988) o Shaughnessy (1992) es la falta de apreciación del efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad aleatoria. Se ha descrito por estos autores la creencia en una "ley de los pequeños números", por la cual se espera una reproducción de las características de la población, incluso en muestras limitadas. Los "creyentes en la ley de los pequeños números" confían demasiado en la validez de sus estimaciones y en la replicabilidad de sus resultados (Kahneman y cols., 1982).

Incluso se ha dado el caso en investigaciones como la de Serrano (1993), en que se encontraron alumnos que pensaban que al aumentar el tamaño de la muestra, la variabilidad aleatoria aumenta, en lugar de disminuir. Por ello creemos que este tipo de situaciones son muy necesarias en la enseñanza para permitir a los alumnos confrontar sus creencias erróneas y ayudarles a superarlas.

[I], a partir de un ejemplo sobre el lanzamiento de un dado, realiza un estudio sobre la frecuencia relativa y afirma que:

> *"La distribución de frecuencias relativas se parece tanto más a la distribución esperada (distribución teórica) cuanto mayor sea el número de lanzamientos. Y llega a ser casi idéntica si el número de lanzamientos es muy grande"* (Texto [I], p. 230).

También se recoge en [G] (p. 202). El resto de los libros no recoge este estudio.

SF7: *Enunciado de la ley empírica de los grandes números y confrontamiento con los resultados obtenidos en experimentos realizados por el alumno*.

Respecto a la convergencia de la frecuencia relativa de un suceso hacia la correspondiente probabilidad teórica, Heitele (1975) señala que es preciso distinguir entre las leyes empíricas de los grandes números y las correspondientes leyes matemáticas. La primera es observable en la realidad, por ejemplo, al contemplar como cae la lluvia sobre un pavimento. Una regularidad global surge a partir de la aleatoriedad local, o, dicho de otro modo, existe una libertad individual sujeta a una restricción colectiva.

Ello hace que las leyes matemáticas de los grandes números -los teoremas de límite- se acepten como modelos matemáticos adecuados a la descripción de estos hechos empíricos. La pregunta de interés didáctico es si es posible separar el modelo de la realidad en un cierto nivel cognitivo de los alumnos.

Heitele sugiere que las posibilidades didácticas que se deducen de las experiencias empíricas son más limitadas de los que sugieren los textos escolares. Las sucesiones aleatorias obtenidas en clase convergen lentamente. Debido a su carácter aleatorio, puede ocurrir que no se obtenga el resultado deseado cuando se quiere mostrar con una simulación una cierta propiedad. Esta misma opinión es sostenida por Konold (1995), quien, a partir del estudio de un caso muestra cómo los resultados de las simulaciones no fueron suficientes para cambiar sus propias concepciones incorrectas sobre los resultados de un experimento y sólo con la demostración matemática de los mismos, llegó finalmente a comprobar su error.

En [I] se plantean situaciones para que los alumnos realicen experimentos y calculen las frecuencias absolutas y relativas de los distintos sucesos, a partir de los datos recogidos, como el ejemplo de la meta del principio del tema. En este ejemplo habla de proporciones para referirse a las frecuencias relativas (p. 226).

En [K], a partir de un ejemplo consistente en lanzar una moneda cien veces y anotar el resultado, define las frecuencias absoluta y relativa así como las propiedades de ésta última. Explica que, si aumenta el número de lanzamientos, los resultados de las frecuencias relativas "*tenderán a "estabilizarse" hacia el valor 0'50, que, como más tarde veremos es la probabilidad del suceso cara o del suceso cruz"*. Concluye afirmando que:

"*Esta estabilización de las frecuencias relativas de un suceso se conoce con el nombre de regularidad estadística*" (Texto [K], p. 411).

En [G] dedica un apartado a definir las frecuencias absoluta y relativa. Para comentar la estabilidad de la frecuencia relativa, propone dos ejemplos. Uno es el lanzamiento de una moneda (obtener cara) y otro el lanzamiento de un dado (obtener y leer dos puntos). Presentan a continuación dos tablas, una para cada experiencia, donde figuran tres columnas, la primera para el número de pruebas, la segunda para las frecuencias absolutas y la última para las frecuencias relativas. Indica que:

"P*uede observarse que, a medida que se eleva el numero de prueban, las frecuencias, h, "tienden" a estabilizarse alrededor de un valor determinado, que en el caso de las monedas es 0,5, y en el caso de los dados, 1/6*" (Texto [G], p. 202).

[D] concluye con un comentario sobre la importancia del concepto de la frecuencia relativa y sobre el hecho observado de su estabilidad progresiva y después de un ejemplo, encontramos:

"La importancia de la frecuencia relativa se deduce de esta ley del azar:
Al aumentar el número de experiencias, la frecuencia relativa de un determinado suceso tiende a estabilizarse alrededor de un numero que llamaremos probabilidad de dicho suceso" (Texto [D], p. 76).

En [E], dentro del capítulo de la probabilidad no dedica ningún apartado al estudio de las frecuencias absoluta y relativa, aunque se refiere a ésta última en algunos momentos. Por ejemplo, en la segunda propiedad citada anteriormente para los experimentos aleatorios, aparece:

" b) Las frecuencias relativas de los distintos resultados tienden a estabilizarse, es decir, a adquirir un valor determinado, al aumentar el número de experiencias" (Texto [E], p. 174).

También la menciona en algunos ejercicios propuestos (p. 176), y en la introducción de la definición de probabilidad (p. 177). El resto de los libros no recoge este aspecto.

SF8: *Atribución de probabilidades a sucesos, en base a la frecuencia relativa de un gran número de pruebas.*

Se trata de usar la frecuencia relativa recogida a partir de una serie de experimentos suficientemente elevada, para obtener una estimación de la probabilidad de los sucesos de interés. Llegamos a la interpretación frecuencial de la probabilidad que, según Nagel (1968), se halla implícita incluso en Aristóteles, aunque no ha llegado a ser relevante en estadística hasta el siglo pasado, posiblemente por no haber suficientes datos recogidos de una variedad de fenómenos que llegase a hacer patentes las propiedades de las frecuencias relativas que darían paso a los axiomas de probabilidad. La idea central en la aproximación frecuencia es que la probabilidad de un suceso se refiere a la frecuencia relativa del mismo.

La interpretación frecuencial de la probabilidad incorpora la idea de frecuencia relativa, que se omite en las acepciones clásica y subjetiva. Como consecuencia, la probabilidad viene dada por una relación analizable y material, para la que se necesita evidencia empírica. Aunque este método de asignar probabilidades tiene sus dificultades filosóficas, que hemos analizado con más detalle en la sección 2.5, es el único plausible en muchas aplicaciones prácticas, en las que no podemos aplicar el principio de indiferencia.

En [J], no define explícitamente la frecuencia de un suceso, pero la utiliza implícitamente para asignar probabilidades a los sucesos elementales en base a la frecuencia de ocurrencia.

Aunque la definición que da de probabilidad es subjetiva, como grado de confianza, sin embargo, propone una asignación de probabilidad que sugiere una concepción frecuencial implícita como vemos en el siguiente párrafo:

> *"Observa que la zona roja ocupa la cuarta parte del total de la ruleta, y la blanca las tres cuartas partes restantes. Es lógico pensar que si repetimos el juego muchísimas veces, aproximadamente la cuarta parte de ellas saldría Rojo, y las restantes Blanco. Por consiguiente la aplicación frecuencial puede ser la siguiente:*
>
> *Rojo* $\longrightarrow$ *1/4*
> *Blanco* $\longrightarrow$ *3/4"* (Texto [J], pp. 293/294).

Incluso utiliza la palabra aplicación frecuencial para referirse a esta asignación de probabilidades:

> "*Efectuamos un reparto proporcional del número 1 entre todos los resultados posibles; a este reparto le llamaremos aplicación frecuencial*" (Texto [J], p. 293).

En [H], después de la descripción de una partida de ajedrez entre dos personas y el estudio de los posibles resultados, concluye afirmando que hay dos formas de asignar la probabilidad a un suceso: Una en el caso de que todos los resultados sean equiprobables y otro el siguiente:

> *"2. Utilizando la frecuencia relativa del suceso en un número elevado de experiencias. Esta probabilidad requiere la realización del experimento. La denominaremos probabilidad "a posteriori"* (Texto [H], p. 197).

En el texto [A] hemos encontrado un ejercicio que implícitamente se refiere a este tipo de actividad:

> *"64. En un experimento aleatorio efectuado 100 veces, un cierto suceso se ha verificado 45 veces. Calcular una aproximación de la probabilidad de dicho suceso"* (Texto [A], p. 55).

Ejercicios similares aparecen en: [H]:Ejercicios b),c) y d) p. 197; [I]: Ejercicio 17 p. 239.

Ejemplos de este tipo hemos encontrado los siguientes: en [B]: Ejemplos donde implícitamente se asignan probabilidades de esta forma en pp. 29 y 30; [C]: Ejemplo p. 72; [I]: Ejemplo p. 231.

El resto de los libros no recoge este aspecto, a pesar de la importancia que hemos señalado.

SF9: *Presentación de ejemplos del carácter aproximado de la asignación de probabilidades basada en las frecuencias relativas*.

Mediante la frecuencia relativa solo obtenemos una estimación de la probabilidad teórica y nunca el valor exacto de la misma. Por otro lado, esta aproximación presenta fluctuaciones aleatorias, por lo que no podemos tampoco tener una seguridad total de la precisión obtenida al estimar la probabilidad a partir de la frecuencia relativa en una serie de ensayos.

En palabras de Ayer (1968) solo examinamos una muestra de la clase total de acontecimientos que nos interesan. Si encontramos que la propiedad que nos interesa está distribuida en cierta proporción en dicha muestra, inferimos que aproximadamente tendría la misma distribución en la clase total.

> *"En ningún caso se puede hacer una estimación no trivial de la proximidad de la frecuencia a la probabilidad con absoluta certeza, sino solamente con probabilidad menor que uno"* (Kolmogorov, 1973, p. 280).

Este aspecto está recogido en [I] al realizar la distinción entre distribución esperada y distribución empírica, pues ello da la idea de que estas dos distribuciones no deben coincidir exactamente, aunque sí en forma aproximada. También se hace una reflexión explícita sobre el carácter aproximado de estas valoraciones. [C] concluye ya en el siguiente apartado denominado *"Probabilidad"*, comentando la estabilidad de las frecuencias de la siguiente forma:

> *"Según se ha visto, en un experimento aleatorio la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse, a oscilar cada vez menos bruscamente alrededor de un cierto valor. Este valor es posible que lo conozcamos aproximadamente, pero nunca podremos saber su expresión exacta"* (Texto [C], p. 72).

El resto de los libros no recoge este aspecto.

SF10: *Presentación de ejemplos de valoraciones experimentales de la probabilidad a partir de series grandes de experimentos*.

Se trata de mostrar a los alumnos ejemplos de situaciones en los cuales sea útil la estimación frecuencial de la probabilidad de un suceso y en los que se disponga de suficiente información estadística para hacer posible la estimación. Para mayor claridad, [G] incluye una gráfica construida con el número de pruebas y las frecuencias relativas de ambos sucesos (obtener cara en el lanzamiento de una moneda y obtener el dos al lanzar un dado), donde se observa la estabilidad de las frecuencias relativas mencionadas anteriormente. Según los autores:

> "*Esta tendencia constituye la ley del azar, que dice:*
> *En series largas de pruebas, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse alrededor de un número*" (Texto [G], p. 202).

Ejemplos similares hemos encontrado en el texto [I] en la página 231.El resto de los libros no presenta valoraciones experimentales de la probabilidad.

SF11: *Reflexión sobre la inadecuación de la valoración clásica de la probabilidad de un suceso cuando se puede obtener una mejor valoración a partir del conocimiento de tipo estadístico*.

En el texto [H], aparece un ejemplo sobre los posibles resultados al jugar varias partidas de ajedrez dos amigos, y en el que se reflexiona sobre este aspecto:

> *"Así, suponiendo equiprobables los resultados de la partida de ajedrez, la probabilidad de acabar en tablas es 1/3, es decir, cabe esperar que de cada tres partidas una finalice en tablas. Sin embargo, después de 12 partidas la frecuencia relativa con que esto ha ocurrido es 2/12 = 1/6 es decir, sólo en una de cada seis se ha dado ese resultado"* (Texto [H], p. 196).

Otro texto en el que aparecen dos ejemplos sobre esta reflexión es [I] en las páginas 231 y 233. No se hace este tipo de reflexión en el resto de los libros que hemos analizado, a pesar de la importancia para la correcta comprensión de la idea de convergencia y su aplicabilidad.

SF12: *Presentación de experimentos sencillos para los cuales no es posible estudiar a priori la probabilidad de los sucesos*.

Son muchos los casos en que no es posible asignar probabilidades usando la aproximación clásica, como cuando los espacios muestrales son infinitos o cuando no podemos admitir la equiprobabilidad de los sucesos elementales. El único ejemplo de este tipo que hemos encontrado ha sido en el texto [I], donde en un apartado denominado revista matemática, propone una experiencia consistente en lanzar chinchetas, advirtiendo:

> *"Ahora no hay simetría que te ayude. Lo que puedes hacer es dejar caer la chincheta 100 veces (o, con menos trabajo, dejar caer 10 veces 10 de esas chinchetas) y contar las veces que ha caído con la punta hacia arriba. Imagínate que han sido 30 veces. Podrías decir que la probabilidad experimental de que la chincheta quede con la punta hacia arriba es 30/100 = 3/10"* (Texto [I], p. 240).

Como resumen sobre la tipología de ejercicios, presentamos la tabla 3.6.1. En ella se recogen los elementos extensionales del significado de la frecuencia relativa en cada uno de los textos utilizados en esta investigación, indicando "Ejercicio" o "Ejemplo" cuando aparecen en un libro determinado, y en blanco en caso contrario.

Observamos la limitación del tipo de actividades relacionadas con el estudio de las frecuencias relativas en los textos analizados, salvo raras excepciones, como los textos [I] y [G]. En general no se proponen actividades para que los alumnos recojan datos sobre las frecuencias y en base a ello asignen probabilidades a sucesos. Tampoco hay un análisis experimental del fenómeno de la convergencia. Contrasta esta limitación con la presentación teórica de los elementos de significado F_1 a F_6, descrita en la sección 2.4. que es mucho más general. En consecuencia, se presenta teóricamente a los alumnos las propiedades de las frecuencias relativas, pero no hay una contrapartida de situaciones problemáticas a partir de las cuales ellos puedan construir este conocimiento.

Tabla 3.6.1. Tratamiento de las frecuencias en los libros analizados

	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]	[F]	[G]	[H]	[I]	[J]	[K]
SF1	Ejemplos		Ejemplo y ejercicio	Ejemplos	Ejemplo y ejercicios	Ejemplo y ejercicios	Ejemplos	Ejercicio	Ejemplo Y ejercicios	Ejemplo	Ejemplos
SF2					Ejercicio						
SF3			Ejemplo								
SF4			Ejemplo			Ejemplo y Ejercicio					
SF5									Ejemplos y ejercicios		Ejemplo
SF6							Ejemplos		Ejemplos y ejercicios		
SF7				Ejemplo	Ejemplo y ejercicios		Ejemplos		Ejemplo y ejercicios		Ejemplo
SF8	Ejercicio	Ejemplos	Ejemplo					Ejemplo y ejercicios	Ejemplo y ejercicio	Ejemplo	
SF9			Ejemplo						Ejemplo		
SF10							Ejemplos		Ejemplos		
SF11								Ejemplo	Ejemplos		
SF12									Ejemplo		

3.6.2. ESTUDIO COMPARATIVO DE LA DISTRIBUCIÓN DE EJERCICIOS RESPECTO A LAS VARIABLES BÁSICAS

Una vez estudiados los tipos básicos de ejercicios y ejemplos referidos a la frecuencia relativa y sus propiedades, haremos un estudio estadístico en dos de estos libros de texto, para analizar cómo las variables básicas se relacionan con este tipo de ejercicios.

En la tabla 3.6.2 presentamos los tipos de actividad pedidas en cada uno de los libros, relacionados con la idea de frecuencia relativa.

Tabla 3.6.2. Frecuencia y (porcentaje) de ejemplos y ejercicios sobre frecuencia relativa por libro

Tipo de actividad	Libro [I]	Libro [A]	Total
Ejemplo introductorio	7 (18,42)	3 (42,86)	10 (22,22)
Ejemplo posterior	6 (15,79)	2 (28,57)	8 (17,78)
Ejercicio introductorio	5 (13,16)	1 (14,28)	6 (13,33)
Ejercicio posterior	13 (34,21)	1 (14,28)	14 (31,11)
Ejercicio tras ejemplo	7 (18,42)	0 (0,00)	7 (15,56)
Total	38 (84,44)	7 (15,56)	45 (100,00)

En ella observamos que hay un total de 45 ejemplos y ejercicios relacionados con la idea de frecuencia relativa en los libros de texto. Hemos encontrado un número mucho mayor en el texto [I], lo que implica una mayor importancia dada al concepto de frecuencia relativa en este libro. Es mucho mayor sobre todo el número de ejercicios en el texto [I], que en [A], donde sólo aparecen 7.

En la tabla 3.6.3. se encuentran la tipología de ejercicios y ejemplos relacionados con la frecuencia relativa, que aparecen en los dos textos analizados y donde los códigos tienen el siguiente significado:

Tabla 3.6.3. Frecuencia y (porcentaje) según actividad sobre frecuencia relativa en cada libro de texto.

Actividad	Libro [I]	Libro [A]	Total
1. Estudio frecuencia relativa conocida probabilidad teórica	2 (5,26)	0 (0)	2 (4,44)
2. Análisis de la variación de la frecuencia relativa al aumentar el número de experiencias	4 (10,53)	0 (0)	4 (8,89)
3. Ley de los grandes números y confrontación con los resultados	4 (10,53)	0 (0)	4 (8,89)
4. Atribución de probabilidades a sucesos en base a la frecuencia relativa.	3 (7,89)	1 (14,29)	4 (8,89)
5. Ejemplos del carácter aproximado de esta medida	2 (5,26)	0 (0)	2 (4,44)
6. Ejemplos de valoraciones experimentales de probabilidad	1 (2,63)	0 (0)	1 (2,22)
7. Reflexión sobre la inadecuación de la valoración clásica en algunos casos	1 (2,63)	0 (0)	1 (2,22)
8. Experimentos sencillos donde no es posible estudiar a priori la probabilidad	1 (2,63)	0 (0)	1 (2,22)
9. Cálculo de frecuencia relativa a partir de tablas de datos	14 (36,84)	4 (57,14)	18 (40,00)
10. Representación gráfica de frecuencia relativa	2 (5,26)	2 (28,57)	4 (8,89)
11. Otros	4 (10,53)	0 (0)	4 (8,89)
Total	38 (84,44)	7 (15,56)	45 (100,00)

1. Estudio de la frecuencia relativa de un suceso en una serie de experimentos, cuando se conoce la probabilidad teórica de los mismos.
2. Análisis de la variación de la frecuencia relativa al aumentar el número de experiencias.
3. Enunciado de la ley empírica de los grandes números y confrontación con los resultados obtenidos en experimentos realizados por el alumno.
4. Atribución de probabilidades a sucesos, en base a la frecuencia relativa de un gran número de pruebas.
5. Presentación de ejemplos del carácter aproximado de esta medida.
6. Presentación de ejemplos de valoraciones experimentales de la probabilidad a partir de series grandes de experimentos
7. Reflexión sobre la inadecuación de la valoración clásica de la probabilidad de un suceso cuando se puede obtener una mejor valoración a partir del conocimiento de tipo estadístico.
8. Presentación de experimentos sencillos para los cuales no es posible estudiar a priori la

probabilidad de los sucesos.

9. Cálculo de frecuencias relativas y relativas acumuladas a partir de tablas de datos.
10. Representación gráfica de frecuencias relativas.
11. Otros

En ella observamos que hay una gran variación de actividades relacionadas con este concepto en el texto [I], ya que en [A] hay 7 categorías sin ninguna actividad.

Destaca como actividad el cálculo de frecuencias relativas a partir de tablas de datos (categoría 9), que supone el 40, 00% de ejemplos y ejercicios relacionados con el concepto. De ello deducimos un gran énfasis en los aspectos algorítmicos, más que en los aspectos interpretativos de las frecuencias relativas y sus propiedades.

Observamos también una gran diferencia entre los dos libros. Por un lado, en el número de ejercicios, que en el texto [A] es sólo de 7, mientras que en el texto [I] sube a 38. El segundo se limita a ejercicios y problemas de cálculo de frecuencias relativas (categoría 9) o representación gráfica de frecuencias relativas (categoría 10) y a sólo un caso de atribución de probabilidades en base a las frecuencias relativas. En el texto [I], además de estas actividades encontramos otras relacionadas con la variación de la frecuencia relativa al aumentar el número de experiencias (categoría 2), con la ley empírica de los grandes números (categoría 3), atribución de probabilidad a los sucesos en base a la frecuencia relativa de los mismos (categoría 4) y con un menor porcentaje el estudio de la frecuencia relativa de un suceso en una serie de experimentos, cuando se conoce la probabilidad teórica de los mismos (categoría 1), la presentación de ejemplos del carácter aproximado de esta medida (categoría 5) y la representación gráfica de frecuencias relativas (categoría 10). En el resto de las categorías sólo aparece un caso.

En la tabla 3.6.4.presentamos los contextos usados para estos ejercicios y ejemplos. De nuevo el contexto más frecuente son los juegos de azar, seguido por experiencias próximas a la vida del alumno y biología. Encontramos también algunos contextos en el campo de la física.

Tabla 3.6.4. Frecuencia y (porcentaje) según contexto utilizado en las actividades sobre frecuencia relativa en cada texto

Contexto	Libro [I]	Libro [A]	Total
Juego	17 (44,74)	4 (57,14)	21 (46,67)
Biología	9 (23,68)	1 (14,29)	10 (22,22)
Física	1 (2,63)	1 (14,29)	2 (4,44)
Experiencia	11 (28,95)	1 (14,29)	12 (26,67)
Total	38 (84,44)	7 (15,56)	45 (100,00)

En la tabla 3.6.5. presentamos el espacio muestral utilizado en los ejemplos y ejercicios relacionados con este concepto. Los códigos utilizados son: infinito, finito con dos elementos equiprobables, finito con más de dos elementos equiprobables, finito con sucesos no equiprobables e impreciso. En ella observamos que el espacio muestral preferentemente usado en estos ejemplos y ejercicios es aquél cuyos sucesos son no equiprobables (categoría 4), lo que sin duda coincide con la finalidad de estos ejercicios. Observamos también una proporción importante de espacios muestrales infinitos (categoría 5), donde el enfoque frecuencial sería muy adecuado en este nivel de enseñanza.

Tabla 3.6.5. Frecuencia y (porcentaje) según espacio muestral de las actividades sobre frecuencia relativa en cada texto

Espacio muestral	Libro [I]	Libro [A]	Total
Infinito	10 (26,32)	1 (14,29)	11 (24,44)
2 elementos equiprobables	4 (10,53)	1 (14,29)	5 (11,11)
Elementos equiprobables	10 (26,32)	3 (42,86)	13 (28,89)
Elementos no equiprobables	12 (31,58)	2 (28,57)	14 (31,11)
Impreciso	2 (5,26)	0 (0)	2 (4,44)
Total	38 (84,44)	7 (15,56)	45 (100, 00)

Sin embargo, en una proporción importante es finito, con más de dos elementos y sucesos equiprobables (categoría 3), donde realmente no sería necesaria una asignación frecuencial de probabilidades, ya que es posible aplicar el principio de indiferencia a los sucesos. Ello se explica porque, como hemos visto con anterioridad, son pocos los ejemplos y ejercicios en que se pide al alumno una asignación frecuencial de probabilidades. Lo mismo podríamos decir del caso de espacios muestrales con dos elementos equiprobables.

En la tabla 3.6.6. indicamos la forma en que se realiza la presentación de la información en los textos analizados. En este caso los códigos utilizados han sido: Verbal, tabla y fotos y dibujos. En la mayor parte de los casos la información se da en forma de tablas estadísticas, aunque también encontramos una presencia importante de ejemplos y ejercicios en que la información sólo aparece en forma gráfica. No se utilizan, en general, los gráficos estadísticos, aunque serían muy adecuados para este tipo de ejemplos y ejercicios.

Tabla 3.6.6. Frecuencia y (porcentaje) según presentación de información en las actividades sobre frecuencia relativa en cada texto

Información	Libro [I]	Libro [A]	Total
Verbal	9 (23,68)	4 (57,14)	13 (28,89)
Tabla	26 (68,42)	2 (28,57)	28 (62,22)
Fotos y dibujos	3 (7,89)	1 (14,29)	4 (8,89)
Total	38 (84,44)	7 (15,56)	45 (100,00)

Hay una diferencia en los libros en cuanto a la presentación de la información, ya que en el segundo de ellos, la información se presenta casi exclusivamente en forma verbal.

3.6.3. CONCLUSIONES SOBRE LOS EJERCICIOS Y EJEMPLOS RELACIONADOS CON LA FRECUENCIA RELATIVA

En esta sección hemos analizados los ejemplos y ejercicios relacionados con la idea de frecuencia relativa. Aunque desde el punto de vista teórico hemos obtenido una gran variedad de posibles actividades que contribuyen a la comprensión correcta del concepto, su presencia en los libros de texto es más bien escasa.

Hemos visto que la mayoría de los textos tratan este concepto a nivel teórico, pero hemos comprobado en la tabla 3.6.1. cómo los ejercicios y ejemplos relacionados con la frecuencia relativa son poco numerosos. Se da la definición, las propiedades, en algunos casos con gran extensión, pero luego no se refuerza con actividades adecuadas. En las actividades analizadas se insiste mucho en los aspectos algorítmicos, pero muy poco en los aspectos interpretativos de la frecuencia relativa, en la posibilidad de asignar probabilidades a los sucesos a partir de la misma, en la convergencia estocástica de las frecuencias hacia la probabilidad, etc.

Del estudio estadístico de los ejemplos y ejercicios realizado en los textos [I] y [A], podemos indicar las siguientes conclusiones:

El tratamiento realizado sobre este concepto por el texto [I], es mucho más amplio que el realizado por el texto [A], lo que nos permite concluir que el primer libro concede una mayor importancia a este concepto.

El número total de ejemplos y ejercicios en el texto [I] es de 38, muy superior al número de [A] que es sólo de 7. En el primer texto citado hay 13 ejemplos y 25 ejercicios, de los cuales 5 de ellos son introductorios, mientras que en el segundo texto, sólo aparecen 5 ejemplos y 2 ejercicios.

En relación a las actividades que aparecen, indicar que en el texto [I], están cubiertas todas las categorías analizadas, concediéndole gran importancia a los aspectos algorítmicos, como el cálculo de frecuencias relativas y de frecuencias relativas acumuladas a partir de tablas estadísticas (categoría 9), pero sin olvidar los aspectos interpretativos, sobre cómo varía la frecuencia relativa con el aumento del número de experiencias (categoría 2), sobre la ley empírica de los grandes números (categoría 3), sobre la atribución de probabilidades a los sucesos en base a la frecuencia relativa de los mismos (categoría 4). Sin embargo, en el libro [A], aparecen 7 categorías de actividades vacías, tratando 4 ejercicios algorítmicos (categoría 9), 2 ejercicios sobre representaciones gráficas de la frecuencia relativa (categoría 10) y sólo un caso de atribución de probabilidades en base a las frecuencias relativas (categoría 4).

Respecto al contexto, los juegos de azar son los que más aparecen en ambos libros, seguidos de la experiencia personal del alumno (28,95%), de la biología (23,68) y de la física (2,63%) en el texto [I] y de la biología, física y experiencia del alumno todos ellos con un 14,29 %.

El espacio muestral preferentemente usado en estos ejemplos y ejercicios es aquél cuyos sucesos son no equiprobables (categoría 4), lo que sin duda coincide con la finalidad de estos ejercicios. Observamos también una proporción importante de espacios muestrales infinitos (categoría 5), donde el enfoque frecuencial sería muy adecuado en este nivel de enseñanza.

Sin embargo, en una proporción importante es finito, con más de dos elementos y sucesos equiprobables (categoría 3), donde realmente no sería necesaria una asignación frecuencial de probabilidades, ya que es posible aplicar el principio de indiferencia a los sucesos. Ello se explica porque, como hemos visto con anterioridad, son pocos los ejemplos y ejercicios en que se pide al alumno una asignación frecuencial de probabilidades. Lo mismo podríamos decir del caso de espacios muestrales con dos elementos equiprobables.

Con relación a la presentación de la información sobre este concepto, indicar que en la mayoría de los casos la información se da en forma de tablas estadísticas, aunque también encontramos una presencia importante de ejemplos y ejercicios en que la información sólo se da en forma gráfica. No se utilizan, en general, los gráficos estadísticos, aunque serían muy adecuados para este tipo de ejemplos y ejercicios. Hay una diferencia en los libros en cuanto a la presentación de la información ya que en el segundo de ellos, la información se presenta casi exclusivamente en forma verbal.

3.7. NOCIÓN DE PROBABILIDAD

3.7.1. INTRODUCCIÓN

En esta sección presentamos la tipología de situaciones y actividades propuestas a los alumnos, sobre el concepto de probabilidad. Con objeto de simplificar la descripción de estas actividades, en lo sucesivo denotaremos por "probabilidad" siempre que se solicita o propone al alumno la medida, valoración o cuantificación de alguno de los siguientes conceptos:

- La mayor o menor verosimilitud o posibilidad de ocurrencia de uno o varios sucesos. Este tipo de enunciado correspondería a una concepción clásica de probabilidad, ya que la valoración se efectúa antes de realizar el experimento y sin tener en cuenta la información de tipo subjetivo;
- la mayor o menor frecuencia esperada de aparición de ciertos sucesos. En este caso se pone en juego la concepción frecuencial, ya que la valoración se basa en consideraciones de la frecuencia de aparición de los sucesos en otros ensayos;
- el grado personal de confianza en la aparición de los sucesos, que correspondería a una valoración de la probabilidad, desde el punto de vista subjetivo.

A continuación describimos la tipología de situaciones o elementos extensionales del significado del concepto, que hemos tratado de identificar en los libros de texto analizados. Esta tipología se ha clasificado en apartados. Solamente citamos, dentro de cada apartado, los textos donde aparecen estas actividades.

La probabilidad como medida de la incertidumbre sobre un suceso

Este primer apartado se refiere al uso del término probabilidad sin llegar a la cuantificación numérica. Hemos diferenciado las siguientes categorías de actividades:

SP1: Valoración cualitativa de probabilidades.

Cuando se pide al alumno valorar la probabilidad de un suceso asociado a un cierto experimento aleatorio por medio de expresiones verbales, como "imposible", "muy probable", "poco probable" u otros similares. No se pide al alumno un valor numérico para dicha probabilidad, aunque existe una cierta cuantificación latente, ya que en el lenguaje ordinario nos encontramos con la posibilidad de graduación de las probabilidades. El siguiente ejercicio, que corresponde a esta tipología, ha sido tomado del texto [I]:

> *"Califica de casi seguro, probable, poco probable o casi imposible, cada uno de los siguientes sucesos:*
> *a) Que un equipo de primera división gane su encuentro de la semana;*
> *b) Que ese mismo equipo gane algún encuentro de la temporada;*
> *c) Acertar la lotería primitiva haciendo una única apuesta;*
> *d) Obtener doble 6 al lanzar dos dados"* (Texto [I], p. 228).

Así mismo este texto presenta ejercicios de este tipo como el 5 (p. 228) y el 16 (p. 239) y un ejemplo sobre sacar calcetines de un cajón (p. 227). Ejemplos similares aparecen en el texto

[K], (p. 408) y en el texto [A] (p. 39).

SP2: Comparación cualitativa de probabilidades.

Dados dos sucesos, se pide elegir el que parece más probable, sin llegar a tener que asignar valor numérico Este tipo de actividades ha sido ampliamente utilizado en la investigación sobre cuantificación de probabilidades por parte de los niños y adolescentes, como las de Piaget e Inhelder (1951), Fischbein y Gazit (1984), Cañizares (1997), o Cañizares y cols. (1997 a) y b)). Estas investigaciones han mostrado que esta actividad no siempre es sencilla para los alumnos, ya que, además de las dificultades ligadas a fallos en el razonamiento proporcional, los alumnos manifiestan en ocasiones sesgos sistemáticos o se ven afectados por factores de tipo subjetivo. Por ello consideramos de interés que la enseñanza contemple este tipo de situaciones, aunque el único ejemplo de estas actividades ha sido encontrado en el texto [J], y es el siguiente:

> *"Por ejemplo, volvamos al caso del dado y consideremos dos sucesos: {2,3,4,5} y {1,6}. Si nos preguntan cuál de ellos ocurrirá, no podemos decidirnos por ninguno de los dos; pero tenemos más confianza en el primero que en el segundo, porque en el primero hay más resultados posibles"* (Texto [J], p. 293).

SP3: Interpretación de la probabilidad como medida del grado de incertidumbre sobre un suceso.

Cuando se pide o se presenta al alumno una explicación sobre el significado del término de probabilidad en relación con un suceso o cuando, dado el valor de la probabilidad se le pide una interpretación del grado de incertidumbre asociado al suceso. Esta actividad, aparentemente trivial también muestra sus dificultades. Por ejemplo, las investigaciones de Konold (1989, 1991) indican que algunos alumnos interpretan los enunciados de probabilidad en forma no probabilística, sino determinista. Estas dificultades también fueron encontradas en alumnos de 14 y 18 años de nuestro entorno sociocultural en la investigación de Serrano (1996). Sin embargo, solamente en el texto [I] hemos encontrado un ejemplo de interpretación de valores de la probabilidad:

> *"Si el hombre del tiempo nos dijera que la probabilidad de que mañana esté despejado es del 80 por ciento, querría significar que, de 100 días con las circunstancias meteorológicas observadas hoy, el día siguiente, en 80 de los 100 casos, se ha presentado despejado.*
> *Como ves, no te quita las dudas de lo que vaya a pasar mañana, pero no por eso la información deja de serte útil. Puedes preparar tu excursión con bastante confianza de que no será pasada por agua"* (Texto [I], p. 222).

SP4: Reflexión sobre la diferencia/semejanza de la probabilidad como medida y otros tipos de medidas.

La probabilidad, desde un punto de vista matemático formal es una medida, y como tal tiene propiedades como la aditividad (siempre que los sucesos sean disjuntos), y el tomar un valor positivo para cualquier suceso. Sin embargo, tiene unas propiedades que la diferencian de otras medidas. Por ejemplo, es acotada. Además no disponemos de dispositivos físicos de medición. En este apartado incluimos las posibles actividades de reflexión y discusión de estos aspectos. En este apartado podemos citar el ejercicio 65 del texto [A]:

> "*La probabilidad de un suceso, ¿puede ser superior a la unidad? ¿Por qué?*" (Texto [A], p. 55).

Ejercicio similar es el número 4 (p. 178) del texto [E].

3.7.2. TIPOLOGÍA DE EJEMPLOS Y EJERCICIOS RELACIONADOS CON LA CONCEPCION CLÁSICA

Una vez estudiadas las actividades que se refieren a la idea de probabilidad, desde un punto de vista cualitativo, analizaremos las diferentes concepciones, puesto que cada una de ellas implican actividades diferenciadas que la dotan de un significado específico. Comenzamos con la concepción clásica, de la cual hemos determinado las actividades que se describen a continuación.

SC1:Análisis de experimentos simples en los que puede aplicarse esta concepción.

Cuando se solicitan o presentan explícita o implícitamente razones para justificar la aplicación de la regla de Laplace en un caso particular. A veces es posible evitar el acumular un material estadístico innecesario si las probabilidades se pueden determinar convenientemente mediante razonamientos de simetría física de los objetos, como en el caso de dados no sesgados, extracción de bolas en urnas, etc. En otros casos no tenemos motivos para preferir una alternativa frente a otras plausibles, es decir, razonamos en base a la indiferencia. Kolmogorov (1973) da ejemplo de estudios experimentales que apoyan la utilización del principio de simetría para asignar probabilidades en estos casos. En el texto [I] hemos encontrado el siguiente ejemplo:

> *"Un dado es una figura muy simétrica, a no ser que esté preparado (cargado), hay las mismas razones para esperar que, al lanzarlo al aire, salga el 5 que el 4. Si lo tiras 10 veces y sale 10 veces el 4, más vale que lo mires a fondo no vaya a ser que todas sus caras sean cuatros"* (Texto [I], p. 222).

También hay ejemplos en el texto [H], (Ejemplo 6.20, p. 192) y en el texto [K], (ejemplo, p. 415). Ejercicios similares solo hemos encontrado los números 6.25 a) y b) (p. 197) del texto [H].

SC2: Análisis de experimentos simples en los que no puede aplicarse esta concepción.

Cuando se piden razones o se muestran ejemplos para justificar por qué no puede aplicarse la regla de Laplace en una situación particular, por ejemplo, cuando sospechamos que un dado ha sido trucado. En el texto [I] encontramos el siguiente ejemplo:

> *"Supón ahora que tienes una colección de chinchetas iguales de cabeza bien ancha y quieres estudiar la probabilidad de que, al dejar caer una de ellas, se quede con la punta hacia arriba. Ahora no hay simetría que te ayude.*
> *Lo que puedes hacer es dejar caer la chincheta 100 veces (o, con menos trabajo, dejar caer 10 veces 10 de esas chinchetas), y contar las veces que ha caído con la punta hacia arriba.*
> *Imagínate que han sido 30 veces. Podrás decir que la probabilidad experimental de que la chincheta quede con la punta hacia arriba es 30/100 = 3/10"* (Texto [I], p. 241).

Otro ejemplo similar es el 6.24 encontrado en el texto [H], (p. 196). Así mismo aparece el ejercicio 6.25 c) d) (p. 197), también en el texto [H].

SC3: Asignación de probabilidad a sucesos elementales usando la concepción clásica de probabilidad.

En este tipo de actividad el alumno precisa formar el espacio muestral asociado al experimento o al menos calcular el número de sucesos elementales. Puesto que podemos admitir la equiprobabilidad de los sucesos elementales, la probabilidad de cada uno de estos sucesos se calcula dividiendo la unidad por este número de sucesos. En el texto [C] encontramos el siguiente ejemplo:

> *"Según este procedimiento, en el caso del dado P(1)= P(2)= P(3)= P(4)= P(5)= P(6)= 1/6"* (Texto [C], p. 73).

Ejemplos similares encontramos en los textos [A], (p. 48), (p. 55); en [B], p. 27; en [C], (p. 74); en [D], (p. 77); en [H], (p. 193); en [I], (p. 243); y en [K], (p. 415). En el texto [F] la regla de Laplace aparece como una propiedad deducida a partir de la idea de probabilidad definida axiomáticamente. En él hemos encontrado el ejercicio 18 (p. 229) que puede englobarse en esta categoría. Ejercicios similares aparecen en los textos [H], ejercicio 10 a) (p. 199) y en [I], ejercicios 1, 2 ,3 (p. 228).

SC4: Comparación de probabilidad de sucesos compuestos.

La situación consiste en comparar cual de dos sucesos tiene mayor probabilidad, sin llegar a tener que calcular la probabilidad de cada uno de ellos, en el caso en que sea posible asignar probabilidades con un enfoque clásico. Por ejemplo, si el número de casos favorables es diferente y el número de casos desfavorables es el mismo, el alumno podría comparar las probabilidades comparando sólo el número de casos favorables. No sería preciso el cálculo de la probabilidad de los sucesos. No hemos encontrado en ningún texto ejercicios de este tipo.

SC5: Asignación de probabilidad de sucesos compuestos.

Se trataría de asignar un valor numérico a este tipo de probabilidades usando la regla de Laplace, como cociente entre los casos favorables y posibles. Puesto que se trata de sucesos compuestos, el alumno deberá ser capaz de usar un razonamiento combinatorio para enumerar los casos favorables y posibles. En el texto [A] aparece el siguiente ejercicio:

> *"Si se arrojan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener un total de 9 puntos?"* (Texto [A], p. 55).

Este tipo de actividad es uno de los más frecuentes, como veremos a continuación. Ejercicios similares aparecen en el texto [A], del 70 al 80, (p. 55); en [B], del 42 al 49, (p. 30); en [C], ejercicios 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14, (pp. 77-78); en [D], ejercicios 7.1 al 7.30, (pp. 80-82); en [E], ejercicios 2, 3, 5, (p. 178), ejercicios 2 y 4, p. 182, ejercicios 9, 10, 11 y 12, (p. 183); en [F], ejercicio 20, (p. 229), ejercicios y problemas 2, 3 4, 5 y 6, (p. 233); en [G], ejercicios 281 al 296, (pp. 280-281); en [H], ejercicio 6.21 b) c) d) e) f) (p. 193), ejercicios de razonamiento: del 11 al 22 (pp. 199-200); en [I], ejercicios: del 1 al 7 (p. 246), del 10 al 13 (p. 251) y del 14 al 28 (pp. 252-253); [J], ejercicio 7 (p. 295); y por último en [K], ejercicios 26.1 y 26.2 (p. 421) y ejercicios: del 26.5 al 26.6 (pp. 422-423).

En el texto [D] encontramos el siguiente ejemplo:

> "2.*¿Cuál es la probabilidad de que en un lanzamiento de dos dados la suma sea 8?"* (Texto [D], p. 78).

Ejemplos similares aparecen en [A]: Ejemplos (p. 50); en [B]: Ejemplo 1 (p. 27), ejemplo bolsa con bolas (p. 29); en [C]: Ejemplos (pp. 73 y 75); en [E]: Ejemplos a) b) c) (p. 177); en

[G]: Ejemplos 14, 15, 16 y 17 (pp. 205-206); en [H]: Ejemplo extracción de una carta de una baraja (p. 193); en [I]: Ejemplo (p. 244); en [K]: Ejemplo (p. 415), ejemplos 1, 2 (p. 416) y ejemplos 3, 4 (p. 417).

3.7.3. TIPOLOGÍA DE EJEMPLOS Y EJERCICIOS RELACIONADOS CON LA CONCEPCIÓN FRECUENCIAL

Respecto a la concepción frecuencial de la probabilidad, hemos diferenciado los siguientes tipos de actividades:

SF1: Análisis de experimentos simples en los que puede aplicarse esta concepción.

Se trata de mostrar situaciones en la que se dispone de suficiente información de tipo estadístico, para que una asignación frecuencial de probabilidades a los sucesos permita una buena aproximación al valor teórico de la probabilidad. En el texto [E] hemos encontrado el siguiente ejemplo:

> *"En el apartado anterior vimos que, al lanzar al aire una moneda, la frecuencia relativa del suceso "salir cara" se aproxima a 1/2 a medida que aumenta el número de tiradas. Si la moneda se substituye por un dado, la frecuencia relativa del suceso {6} tiende a 1/6.*
> *Los valores 1/2 y 1/6 son estimaciones teóricas de las frecuencias relativas de los sucesos mencionados; esta estimación teórica de la frecuencia relativa de un suceso es su probabilidad"* (Texto [E], p. 177).

Ejemplos similares aparecen en [C]: Ejemplo (p. 68), explicación (p. 72); en [D]: Ejemplo (p. 76); en [F]: habla de las frecuencias relativas y sus propiedades, pero no las utiliza para asignar probabilidades (pp. 226-227); en [G]: Ejemplo (p. 201); en [H]: Ejemplo 6.24 (p. 196); en [I]: Tres ejemplos (pp. 226,.231 y 234); y en [K]: Ejemplo (p. 411). Ejercicios sobre este aspecto hemos encontrado en los textos [H]: Ejercicio 6.25 a) b) (p. 197) e [I]: Ejercicios 11, 12 (p. 238).

SF2: Análisis de experimentos simples en los que no puede aplicarse esta concepción.

Se trataría de mostrar situaciones donde no hay suficiente información estadística disponible sobre los sucesos de interés para permitir la aplicación de la concepción frecuencial de un modo fiable. No aparecen en los textos ejercicios o ejemplos de este tipo a pesar de la importancia que, desde nuestro punto de vista, tienen este tipo de actividades.

SF3: Asignación de probabilidad a sucesos elementales o compuestos mediante experimentación.

Consideramos este tipo de actividad cuando se pide al alumno realizar un experimento un número dado de veces, calcular las frecuencias relativas de ciertos sucesos asociados al experimento y a partir de ellas asignar la probabilidad. También incluimos aquí el caso en que se dé al alumno una tabla con resultados experimentales y se muestre una asignación probabilística a partir de las frecuencias relativas en una larga serie de experimentos. En el texto [H] hemos encontrado el siguiente ejercicio:

> *"6.25 e) Se ha medido el grosor de 1.000 arandelas fabricadas por una máquina, obteniéndose la siguiente tabla:*
> *Grosor en mm 231 232 233 234 235 236 237 238 239*

Nº de piezas   10   20   80 180 280 240 130   40   20
Calcula la frecuencia relativa de los diferentes valores obtenidos.
f) Calcula la probabilidad de que:
- el grosor de la siguiente pieza que fabrique la máquina sea de 234 mm
- el grosor de una pieza esté comprendido entre 234 y 236 mm, ambos incluidos" (Texto [H], p. 197).

Ejercicios similares aparecen en [A]: Ejercicio 64 (p. 55); en [I]: Ejercicio 17 (p. 239), ejercicios 18, 19 (p. 252) y ejercicios 26, 27 (p. 253).

Ejemplos relacionados con este tipo encontramos en los textos [C]: Ejemplo a) (p. 72); en [I]: Ejemplo (p. 231) y ejemplo sobre extracción de bola de una bolsa (p. 245) y en [J]: Ejemplo 1 (p. 293).

SF4: Reflexión sobre el carácter aproximado de esta asignación.

El enfoque frecuencial de la probabilidad es muy atractivo, especialmente porque permite establecer un puente entre la estadística y la probabilidad. Asimismo, permite trabajar con experimentos que son demasiado complejos para que los alumnos puedan asignar probabilidades con un enfoque clásico. Sin embargo, nunca obtenemos el valor teórico de las probabilidades, sino sólo una estimación del mismo. Es importante concienciar al alumno de esta limitación y proponerle actividades de discusión sobre este carácter aproximado o comparación de resultados de otros compañeros. A pesar de esta importancia, solamente en el texto [I] hemos encontrado un ejemplo de discusión de este punto, a partir de una actividad sobre el lanzamiento de un dado (p. 231).

Hemos visto que el tipo de actividades relacionadas con la concepción frecuencial de la probabilidad no es muy abundante en los textos analizados. Sin embargo, sería preciso añadir a las descritas en esta sección la siguiente lista de actividades ya estudiadas para el caso de la frecuencia relativa:

- Realización de experimentos cuya probabilidad se conoce y cálculo de la frecuencia relativa, comparándola con la probabilidad teórica conocida previamente para el suceso.
- Realización de experimentos cuya probabilidad no se conoce y cálculo de la frecuencia relativa del mismo.
- Análisis de la variación de la frecuencia relativa al aumentar el número de pruebas.
- Análisis de la variación de la frecuencia relativa en el mismo número de pruebas y diferentes alumnos (o diferentes ensayos).

Estas actividades ya han sido discutidas en el apartado sobre frecuencia relativa y remitimos al lector al apartado correspondiente para el estudio de nuestras conclusiones al respecto.

3.7.4. TIPOLOGÍA DE EJEMPLOS Y EJERCICIOS RELACIONADOS CON LA CONCEPCIÓN SUBJETIVA

A pesar de que las aproximaciones clásica y frecuencial cubren un amplio campo de aplicaciones del concepto de probabilidad, todavía quedan fenómenos aleatorios de interés en los que no es posible aplicar ninguna de estas concepciones. En otros casos, la información previa de la persona que asigna las probabilidades, puede modificar substancialmente esta afirmación. La concepción subjetiva de la probabilidad cubre estas aplicaciones. Hemos considerado los siguientes tipos de situaciones referidas a esta concepción:

SS1: Análisis de experimentos simples en los que la asignación de probabilidades depende de la información de la persona que la asigna.

Se trataría de mostrar situaciones en que las probabilidades iniciales dependan en gran medida de la información previa o cuando no se disponga de información estadística y no sea posible emplear el principio de indiferencia. No hemos encontrado ejemplos o ejercicios de este tipo en los libros analizados.

SS2: Asignación de probabilidad a sucesos elementales. Comparación de asignaciones hechas por diferentes alumnos.

El carácter subjetivo de este tipo de asignación a la probabilidad implica que distintas personas podrían asignar probabilidades diferentes a los mismos sucesos en las mismas condiciones, debido a su información previa o grado de creencia en el suceso. Esta es la principal crítica que se ha hecho a los seguidores de esta concepción de la probabilidad, por lo que pensamos puede ser de interés mostrar al alumno esta característica. No aparecen en los textos analizados ejercicios o ejemplos de este tipo.

SS3: Comparación de probabilidad de sucesos compuestos.

Se trataría de comparar la probabilidad de dos sucesos en los que la única asignación posible de probabilidades fuese de tipo subjetivo. En el texto [J] aparece el siguiente ejemplo:

> *"Por ejemplo, volvamos al ejemplo del dado y consideremos dos sucesos: {2,3,4,5} y {1,6}. Si nos preguntan cuál de ellos ocurrirá, no podemos decidirnos por ninguno de los dos; pero tenemos más confianza en el primero que en el segundo, porque en el primero hay más resultados posibles"* (Texto [J], p. 293).

SS4: Asignación de probabilidad de sucesos compuestos.

Se trataría de asignar probabilidades a los sucesos compuestos, siguiendo la concepción subjetiva de la probabilidad. No aparecen en los textos analizados ningún ejemplo o ejercicio de este tipo.

3.7.5. TIPOLOGÍA DE EJEMPLOS Y EJERCICIOS RELACIONADOS CON LA CONCEPCIÓN FORMAL

La controversia sobre el significado real de la probabilidad fue resuelta mediante la axiomatización que consiguió una solución satisfactoria, puesto que la probabilidad definida desde un punto de vista formal engloba todas las concepciones anteriores. Desde este punto de vista, la probabilidad es una medida normada definida sobre un espacio medible, lo que implica que deben cumplirse unos axiomas dados. Estos axiomas se aceptan universalmente, puesto que reflejan las probabilidades empíricas observadas en las frecuencias relativas. Las actividades que hemos considerado, respecto a la concepción formal de la probabilidad son las siguientes:

SA1: Reflexión sobre las propiedades que poseen las probabilidades asignadas a los sucesos con alguno de los criterios anteriores.

Se propone a los alumnos la reflexión sobre algunos de los axiomas de la probabilidad y cómo se pueden aplicar a situaciones específicas. En el texto [F], en el apartado ejercicios y problemas sólo aparece uno relacionado con esta concepción, que es el siguiente:

> *"7. Sea el espacio muestral E={1,x,2}. Se define la función p de E del siguiente modo:*
> *a) p({1})=p({x})=p({2})=1/3 b) p({1})=p({x})=1/2; p({2})=-1 c) p({1})=1/2; p({x})=1/4; p({2})=1/4 d)p({1})=1/2; p({x})=1/2; p({2})=1/2 ¿En cuál de estos casos p es una función de probabilidad?"* (Texto [F], p. 233).

Ejercicios similares hemos encontrado en [J]: Ejercicios del 13 al 18 (p. 297) y en [K]: Ejercicios 26.3 y 26.4 (p. 421). Ejemplos relacionados con este tipo hemos encontrado en los textos [A]: Ejemplo, p. 47; en [F]: Ejemplos 1 y 2, (p. 228) y en [K]: Ejemplos 1, 2 (pp. 412-413).

3.7.6. OTROS TIPOS DE EJERCICIOS RELACIONADOS CON LA IDEA DE PROBABILIDAD

Probabilidades geométricas

Hemos analizado separadamente la asignación de probabilidad usando principios geométricos porque reviste características diferenciadas respecto al resto de las actividades. Por un lado, permite aplicar el concepto de fracción en conexión con ideas geométricas previamente adquiridas por los alumnos, por lo que conecta tres tipos de conceptos matemáticos (fracciones, geometría y probabilidad) en un mismo ejercicio o ejemplo. Por otro lado, son uno de los pocos casos en que se presenta al alumno espacios muestrales infinitos, que podrían resultar más difíciles, ya que fueron estos espacios muestrales los que dieron origen a numerosas paradojas dentro de la teoría de la probabilidad. Las situaciones que hemos analizado son las siguientes:

SG1: Análisis de situaciones en las que es posible asignar probabilidades como cociente de medidas geométricas (longitudes, áreas, volúmenes).

Se trataría de proponer al alumno una reflexión sobre las posibilidades de usar consideraciones de tipo geométrico, cuando otro tipo de asignación de probabilidad no es posible o cuando este razonamiento simplifique la resolución del problema. No aparecen en los textos analizados ningún ejemplo o ejercicio de este tipo.

SG2: Comparar probabilidades, basándose en consideraciones geométricas.

Se propondría al alumno comparar entre diferentes probabilidades usando criterios de tipo geométrico. No hemos encontrado ejemplos o ejercicios de este tipo en los libros analizados.

SG3: Asignar probabilidades basándose en consideraciones geométricas.

Son actividades en las que el alumno asigna las probabilidades basándose en las propiedades geométricas latentes en la situación. En el texto [J] hemos encontrado un ejemplo como el que sigue:

> *"Ejemplo 1:Si jugamos con una ruleta como la del gráfico, podemos obtener sólo dos resultados: Rojo o Blanco.El espacio muestral es por consiguiente, 1 = {Rojo, Blanco}. ¿Qué aplicación frecuencial podemos definir?*
> *Observa que la zona roja ocupa la cuarta parte del total de la ruleta, y la blanca las tres cuartas partes restantes. Es lógico pensar que si repetimos el juego muchísimas veces, aproximadamente la cuarta parte de ellas saldrá Rojo, y las restantes Blanco. Por consiguiente la aplicación frecuencial puede ser la siguiente:*
> *Rojo* $\longrightarrow$ *1/4*
> *Blanco* $\longrightarrow$ *3/4 "* (Texto [J], p. 293).

Tabla 3.7.1. Actividades relacionadas con la noción de probabilidad en los textos

ctividad	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]	[F]
SP1	Ejemplo					
SP2						
SP3						
SP4	Ejercicio				Ejercicio	
SC1						
SC2						
SC3 SC4	Ejemplos	Ejemplo	Ejemplos	Ejemplo		Ejercicio
SC5	Ejercicios y ejemplo	Ejercicios y ejemplos	Ejercicios y ejemplos	Ejemplo y ejercicios	Ejercicios y ejemplos	Ejercicios y ejemplos
SF1			Ejemplo	Ejemplo	Ejemplo	Cita f.r.
SF2						
SF3	Ejercicio		Ejemplo			
SF4						
SS1						
SS2						
SS3						
SS4						
SA1	Ejemplo					Ejemplos y ejercicio
SG1						
SG2						
SG3						

Tabla 3.7.2. Actividades relacionadas con la noción de probabilidad en los textos

	[G]	[H]	[I]	[J]	[K]
SP1			Ejemplo y ejercicios		Ejemplo
SP2				Ejemplo	
SP3			Ejemplo		
SP4					
SC1		Ejemplo y ejercicio	Ejemplo		Ejemplo
SC2		Ejemplo y ejercicio	Ejemplo		
SC3		Ejemplo y ejercicio	Ejercicios y ejemplo		Ejemplo
SC4				Ejercicio	
SC5	Ejemplos y ejercicios	Ejemplo y ejercicios	Ejemplo y ejercicios	Ejercicio	Ejemplos y ejercicios
SF1	Ejemplo	Ejemplo y ejercicio	Ejemplos y ejercicios		Ejemplo
SF2					
SF3		Ejercicio	Ejemplos y ejercicios	Ejemplo	
SF4			Ejemplo		
SS1					
SS2					
SS3				Ejemplo	
SS4					
SA1				Ejercicios	Ejemplos y ejercicios
SG1					
SG2					
SG3				Ejemplos y ejercicios	

Ejemplos similares aparecen en el mismo texto: Ejemplos 2,3 (p. 294) y ejemplos 1, 3 (p. 296). También en el mismo texto aparecen ejercicios de este tipo: Ejercicio 6 (p. 295) y ejercicio 15 (p. 297).

Finalmente incluimos las tablas 3.7.1 y 3.7.2. como resumen de la presentación de estas actividades en los textos analizados. En ella se indica el tipo de actividad que aparece en cada uno de los libros analizados, y en blanco cuando no se propone ninguna actividad. En estas tablas podemos ver que muchas de las categorías previstas en nuestro análisis han quedado vacías. También podemos ver la variabilidad existente en cuanto al tipo de actividades en los diferentes libros. Las actividades más frecuentes son las relacionadas con la concepción clásica de la probabilidad.

3.7.7. ESTUDIO COMPARATIVO DE LA DISTRIBUCIÓN DE EJERCICIOS RESPECTO A LAS VARIABLES BÁSICAS

Una vez analizados los tipos de actividades relacionadas con la idea de probabilidad en los diferentes textos, procedemos al estudio de su distribución, según las variables básicas en los dos libros de texto. En primer lugar presentamos los tipos de situaciones.

Tabla 3.7.3. Frecuencia y (porcentaje) de ejemplos y ejercicios sobre probabilidad en cada texto

Tipo de actividad	Libro [I]	Libro [A]	Total
Ejemplo introductorio	6 (11,32)	4 (26,66)	10 (14,71)
Ejemplo después definición	6 (11,32)	5 (33,33)	11 (16,1)8
Problema introductorio	1 (0,01)	0 (0)	1 (1,47)
Problema después definición	39 (73,58)	6 (40,00)	45 (66,18)
Ejercicio dirigido	1 (0,01)	0 (0)	1 (1,47)
Total	53 (77,94)	15 (22,06)	68 (100,00)

Tabla 3.7.4. Frecuencia y (porcentaje) de actividades sobre probabilidad en cada texto

Actividad	Libro [I]	Libro [A]	Total
1. Valoración cualitativa	6 (11,32)	0 (0,00)	6 (8,82)
2. Medida del grado de incertidumbre	2 (3,77)	2 (13,33)	4 (5,88)
3. Puede aplicarse concepción clásica	3 (5,66)	0 (0,00)	3 (4,41)
4. No puede aplicarse concepción clásica	1 (1,89)	0 (0,00)	1 (1,47)
5. Asignación probabilidad sucesos elementales	5 (9,43)	1 (6,67)	6 (8,82)
6. Comparación de probabilidad sucesos compuestos	5 (9,43)	0 (0,00)	5 (7,35)
7. Asignación probabilidad sucesos compuestos incompatibles	4 (7,55)	6 (40,00)	10 (14,71)
8. Puede aplicarse concepción frecuencial	1 (1,89)	0 (0,00)	1 (1,47)
9. Asignación probabilidad mediante experimentación	6 (11,32)	0 (0,00)	6 (8,82)
10. Reflexión sobre el carácter aproximado de esta asignación	3 (5,66)	0 (0,00)	3 (4,41)
11. Asignación probabilidad concepción subjetiva	4 (7,55)	0 (0,00)	4 (5,88)
12. Concepción formal	2 (3,77)	3 (20,00)	5 (7,35)
13. Probabilidad suceso contrario	9 (16,98)	1 (6,67)	10 (14,71)
14. Probabilidad. Sucesos compuestos compatibles	1 (1,89)	1 (6,67)	2 (2,94)
15. Razón de posibilidades	1 (1,89)	0 (0,00)	1 (1,47)
16. Otros	0 (0,00)	1 (6,67)	1 (1,47)
Total	53 (77,94)	15 (22,06)	68 (100,00)

De nuevo vemos que la actividad más frecuente es la de ejercicios después de la definición, lo que indica una orientación teoría-práctica en los libros analizados y aumenta respecto al global de los ejercicios, ya que aquí este tipo de actividades supone el 66.18%. Disminuye en este caso la importancia relativa de ejemplos antes de la definición, para aumentar el peso de los ejemplos después de la definición del concepto.

Respecto al tipo de actividad, las principales categorías encontradas son las siguientes: Valoración cualitativa de probabilidades (8.82% de casos), asignación de probabilidad a sucesos simples usando la regla de Laplace (8.82% de casos), comparación de probabilidad de sucesos compuestos, por medio de la regla de Laplace (7.35% de casos), asignación de probabilidades a sucesos compuestos incompatibles, usando la regla de Laplace (14.71% de casos), asignación de probabilidades a sucesos elementales o compuestos mediante experimentación (8,82 %), reflexión sobre las propiedades que poseen las probabilidades asignadas a los sucesos basadas en la concepción formal, cálculo de la probabilidad del suceso contrario (14,71%).

Observamos un 14.7% de ejemplos y ejercicios referidos a la probabilidad como medida de incertidumbre de un suceso (categoría 1 y 2), un 36,76 % de ejercicios referidos a la concepción clásica (categorías 3 a 7), un 14,7 % respecto a la concepción frecuencial (categorías 8 a 10), un 5,88 % sobre la concepción subjetiva (categoría 11) y un 27,94 % que se refiere a la concepción formal (categorías 12 a 16).

En consecuencia, los ejercicios y ejemplos en su mayoría se refieren a la concepción clásica de la probabilidad, o a la concepción formal y cálculo de probabilidades usando las propiedades de las operaciones de sucesos. En el resto de las concepciones, los ejemplos y ejercicios son muy escasos. Así las aclaraciones sobre cuándo no se puede aplicar la concepción clásica, es decir en el caso de que los sucesos no sean equiprobables, son casi nulas, encontrando una sola afirmación en este sentido en el texto [I], lo que nos hace pensar que los alumnos apliquen indiscriminadamente esta concepción sin pensar en si es posible o no. Lo mismo ocurre con la concepción frecuencial y su carácter aproximado, a lo que solo se hace referencia en el texto [I], cuando su aplicación en problemas reales es muy alta.

Las principales diferencias encontradas entre los dos libros, respecto al tipo de actividades, son que en el texto [I], trabajan más las valoraciones cualitativas, la concepción clásica, la frecuencial y la subjetiva, mientras que el texto [A] destaca más la concepción formal y no aparecen ejercicios sobre concepción frecuencial y subjetiva, lo que nos hace pensar que en este último caso se da un enfoque más formal al estudio de la probabilidad, no adecuado a este nivel.

Tabla 3.7.5. Frecuencia y (porcentaje) de asignación de probabilidades en los ejercicios de probabilidad en cada libro de texto

Asignación probabilidad	Libro [I]	Libro [A]	Total
Regla de Laplace	37 (71,15)	12 (80,00)	49 (73,13)
Información estadística disponible	12 (23,08)	0 (0,00)	12 (17,91)
Realización simulación experimentos	3 (5,77)	3 (20,00)	6 (8,96)
Total	52 (77,61)	15 (22,39)	67 (100,00)

El modo de asignar probabilidades a los sucesos es casi exclusivamente mediante la regla de Laplace, lo que coincide con el gran peso dado a este enfoque, así como al enfoque formal matemático en este tipo de ejercicios. Encontramos también, en algunos casos la asignación a partir de información estadística disponible o a partir de realización o simulación de experimentos donde el alumno deba recoger sus propios datos.

En la tabla 3.7.5. observamos que el tratamiento dado a la asignación de probabilidades en ambos textos es bastante similar, excepto que la asignación de probabilidades a partir de la información estadística sólo aparece en el texto [I].

Los contextos empleados que aparecen en los libros analizados han sido principalmente los juegos de azar, seguidos de la experiencia del alumno y con porcentajes más bajos la biología y física.

Tabla 3.7.6. Frecuencia y (porcentaje) de contextos en los ejercicios de probabilidad utilizados en cada libro de texto

Contexto	Libro [I]	Libro [A]	Total
Juego	41 (78,85)	12 (80,00)	53 (79,10)
Biología	3 (5,77)	0 (0,00)	3 (4,48)
Física	1 (1,92)	2 (13,33)	3 (4,48)
Experiencia alumno	7 (13,46)	1 (6,67)	8 (11,94)
Total	52 (77,61)	15 (22,39)	67 (100,00)

Observamos en la tabla anterior que en el texto [A], no aparece ningún ejercicio relacionado con la biología, y que el texto [I] da mucha más importancia a los ejercicios donde se apela a la experiencia del alumno. Consideramos que el gran número de ejercicios dedicados al juego aunque pueden tener un componente de motivación para los alumnos de este nivel, puede dar una imagen sesgada de la realidad, ya que el alumno puede tener la impresión de que la probabilidad sólo se aplica a los juegos de azar.

Los espacios muestrales de los ejercicios relacionados con la idea de probabilidad más utilizados son los finitos, formado por sucesos equiprobables con más de dos elementos, seguidos de los espacios finitos con sucesos no equiprobables, de los que no se precisan y los finitos formados por sucesos equiprobables con dos elementos. En ninguno de los textos analizados aparece el espacio muestral infinito, lo que parece adecuado a este nivel.

La diferencia más significativa entre los dos textos analizados con relación a los espacios muestrales es que el texto [I], dedica un gran número de ejercicios donde aparecen espacios muestrales formado por sucesos no equiprobables, lo que consideramos de gran interés didáctico debido al gran número de errores que cometen los alumnos al realizar ejercicios de probabilidad, ya que suelen aplicar la Regla de Laplace sin comprobar si los sucesos son equiprobables o no.

Tabla 3.7.7. Frecuencia y (porcentaje) de espacio muestral en los ejercicios de probabilidad en cada libro de texto

Espacio muestral	Libro [I]	Libro [A]	Total
Finito, suceso equiprobable con dos elementos	5 (9,62)	1 (6,67)	6 (8,96)
Finito, suceso equiprobable con más de dos elementos	32 (61,54)	11 (73,33)	43 (64,18)
Finito sucesos no equiprobables	10 (19,23)	1 (6,67)	11 (16,42)
Impreciso	5 (9,62)	2 (13,33)	7 (10,45)
Total	52 (77,61)	15 (22,39)	67 (100,00)

Este hecho está también relacionado con el gran número de ejercicios donde se ha de utilizar la concepción clásica, y la escasa presencia de ejercicios relacionados con otros enfoques.

La información se presenta generalmente a través de información verbal, y en un porcentaje mucho más bajo a través de fotos, dibujos y situaciones, encontrando solo un ejercicio en el texto [I], donde aparece una tabla.

Tabla 3.7.8. Frecuencia y (porcentaje) de la presentación de la información en los ejercicios de probabilidad en cada libro de texto

Presentación información	Libro [I]	Libro [A]	Total
Verbal	43 (82,69)	11 (73,33)	54 (80,60)
Tabla	1 (1,92)	0 (0,00)	1 (1,49)
Diagrama de árbol	0 (0,00)	3 (20,00)	3 (4,48)
Fotos, dibujos, situaciones	8 (15,38)	1 (6,67)	9 (13,43)
Total	52 (77,61)	15 (22,39)	67 (100,00)

En la tabla anterior se observa que en el texto [I], no aparecen los diagramas de árbol, mientras que en el texto [A], no hay ninguna tabla. La principal diferencia entre ambos textos es que en el libro [I], aparecen un gran número de ejercicios ilustrados con fotos o dibujos.

3.7.8. CONCLUSIONES SOBRE LOS EJERCICIOS Y EJEMPLOS RELACIONADOS CON EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Respecto a las actividades propuestas, estas se reducen casi por completo, a las relacionadas con la concepción clásica de probabilidad. Dentro de ellas, son pocos los libros que estudian los casos en que no puede aplicarse la regla de Laplace. Son excepciones los textos [I] y [J]. Este último presenta actividades y ejemplos en todas las concepciones de probabilidad, aunque son escasas y no recogen todos los apartados.

La actividad casi exclusivamente propuesta es la asignación de probabilidades a sucesos simples y compuestos aplicando la regla de Laplace. Esta actividad es más que nada un refuerzo del cálculo combinatorio estudiado en temas anteriores que en el apartado de probabilidad encuentra su justificación.

Respecto a la probabilidad frecuencial, es el elemento extensional SF1, sobre el análisis de experimentos simples en los que puede aplicarse esta concepción, el que aparece más veces en los textos analizados, aunque en algunos casos sólo con un ejemplo.

La presencia de ejercicios relacionados con la concepción subjetiva, así como las situaciones donde aparecen probabilidades geométricas, es más bien una excepción. Sólo aparecen en el texto [J].

El texto [I] es el que presenta mayor rango de actividades, aunque ninguna referida a la concepción subjetiva, ni a la axiomática. Este último enfoque aparece en los textos [A], [F], [J] y [K], y creemos que no es adecuado a este nivel, aunque comprendemos su inclusión, ya que fueron utilizados durante una época donde la influencia de la matemática moderna era muy grande.

Contrasta esta limitación de los ejercicios con la presentación teórica, en la que, la mayor parte de los textos presentan más de una concepción de la probabilidad en el ámbito declarativo y las actividades y ejemplos propuestos, que se refieren casi exclusivamente a la concepción clásica. Consideramos asimismo que es escaso el número de actividades dedicadas a los aspectos interpretativos de la probabilidad, descritos en la sección 2.5.6.1.

Respecto al estudio comparativo de la distribución de ejercicios respecto a las variables consideradas, observamos que en relación con la tipología de las actividades, la actividad más frecuente es la de ejercicios después de la definición, lo que indica una orientación teoría-práctica en los libros analizados, siendo muy escasos los ejemplos o ejercicios introductorios.

En relación con las actividades relacionadas con probabilidad, las principales categorías encontradas son las siguientes: Valoración cualitativa de probabilidades, asignación de probabilidad a sucesos simples usando la regla de Laplace, comparación de probabilidad de sucesos compuestos, por medio de la regla de Laplace, asignación de probabilidades a sucesos compuestos incompatibles, usando la regla de Laplace, asignación de probabilidades a sucesos elementales o compuestos mediante experimentación, reflexión sobre las propiedades que poseen las probabilidades asignadas a los sucesos basadas en la concepción formal, cálculo de la probabilidad del suceso contrario.

El modo de asignar probabilidades a los sucesos es casi exclusivamente mediante la regla de Laplace, lo que coincide con el gran peso dado a esta concepción, así como al enfoque formal matemático en este tipo de ejercicios. Encontramos también, en algunos casos la asignación a partir de información estadística disponible o a partir de la realización o simulación de experimentos donde el alumno deba recoger sus propios datos.

Los contextos que aparecen en los libros analizados han sido principalmente los juegos de azar, seguidos de la experiencia del alumno y con porcentajes más bajos la biología y física.

Los espacios muestrales de los ejercicios relacionados con la idea de probabilidad más utilizados son los finitos, formado por sucesos equiprobables con más de dos elementos, seguidos de los espacios finitos con sucesos no equiprobables, de los que no se precisan y los finitos formados por sucesos equiprobables con dos elementos. En ninguno de los textos analizados aparece el espacio muestral infinito, lo que parece adecuado a este nivel.

Los ejercicios se presentan generalmente a través de información verbal, y en un porcentaje mucho más bajo a través de fotos, dibujos y situaciones.

3.8. PROBABILIDAD CONDICIONAL. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA. EXPERIMENTOS COMPUESTOS

3.8.1. TIPOLOGÍA DE EJEMPLOS Y EJERCICIOS RELACIONADOS CON LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Respecto a los tipos de actividades que podrían dar significado a la probabilidad condicional, hemos considerado las siguientes:

SCO1: Evaluación de probabilidades condicionales a partir de enumeración en experimentos simples. Cuando se pide calcular una probabilidad condicional, mediante enumeración directa, aplicando la definición y no a partir de la fórmula, en experimentos simples. En el texto [E] hemos encontrado el siguiente ejercicio:

> *"1. Se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que salga el 6? Si se sabe que el resultado es par, ¿cuál será ahora la probabilidad del suceso mencionado?* (Texto [E], p. 182).

Un ejercicio y ejemplo similares aparecen en [E]: Ejercicio 2, p. 182; [F]: Ejemplo p. 272; [G]: Ejemplo 19, p. 210. Los demás textos no tratan este tipo de ejercicios.

SCO2: Evaluación de probabilidades condicionales a partir de la fórmula en experimentos simples. Cuando se pide el cálculo de la probabilidad usando la fórmula, a partir de la probabilidad de la intersección de sucesos en experimentos simples. En el texto [A] hemos encontrado el siguiente ejemplo:

"*Hallar la probabilidad de obtener rey, condicionada al suceso obtener figura, al extraer una carta de una baraja de cuarenta*" (Texto [A], p. 52).

Un ejemplo similar aparece en [G]: Ejemplo 20, p. 212. En el resto de los textos no aparecen ni ejemplos ni ejercicios similares.

SCO3: *Evaluación de probabilidades condicionales a partir de enumeración en experimentos compuestos.* Cuando se pide calcular una probabilidad condicional, mediante enumeración directa, aplicando la definición y no a partir de la fórmula, en experimentos compuestos. Hemos diferenciado los experimentos simples y compuestos, porque en el caso de experimentos compuestos la probabilidad condicional depende de sí los experimentos son dependientes o independientes. En el texto [E] hemos encontrado el siguiente problema de recapitulación:

"Antonio tiene guardadas en una caja 13 monedas de 100 ptas., cuyo aspecto exterior es tal que son indistinguibles unas de otras. Sin embargo 8 de las monedas son falsas.

a) *Para saldar una deuda de 100 ptas. que Antonio tiene con Joaquín, convienen en que éste se quedará con 2 de las monedas de las cajas, elegidas al azar. Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: Joaquín no gana ni pierde, Joaquín gana y Joaquín pierde.*

b) *Supón que Joaquín averigua que una de las dos monedas que ha elegido es falsa. ¿cuáles serán entonces las probabilidades de los sucesos anteriores?* (Texto [E], p. 183).

En [A], hay un ejemplo pero referido a frecuencias relativas (p. 50). El resto de los textos no tratan estos ejercicios.

SCO4: *Evaluación de probabilidades condicionales a partir de la fórmula en experimentos compuestos*. Cuando se pide el cálculo de la probabilidad usando la fórmula, a partir de la probabilidad de la intersección de sucesos en experimentos compuestos. En el texto [K], encontramos el siguiente ejemplo:

"1.Se extraen sucesivamente dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos reyes?" (Texto [K], p. 419).

En el mismo texto aparece un ejemplo similar: Ejemplo 2, p. 419; y en [A]: 2. Ejercicio dirigido (p. 53). En el resto de los textos no aparece este concepto.

Como resumen de las actividades sobre probabilidad condicional, presentamos la tabla 3.8.1. en la que aparecen los textos que tratan dichas actividades, indicando si son ejercicios o ejemplos y en el caso de que no lo traten en blanco.

En general son muy escasas las actividades relacionadas con la probabilidad condicional, tanto en el caso de experimentos simples y compuestos. Solamente aparecen en los textos [A], [E], [F], [G] y [K], limitándose en estos casos solamente a algún ejemplo o ejercicio. Consideramos que los autores han tenido en cuenta el nivel de los alumnos a los que van dirigidos los textos, así como la complicación de estos conceptos, lo que nos parece adecuado.

Tabla 3.8.1. Actividades sobre probabilidad condicional.

	SCO1	SCO2	SCO3	SCO4
[A]		Ejemplo	Ejemplo	Ejercicio
[B]				
[C]				
[D]				
[E]	Ejercicios		Problema	
[F]	Ejemplos		Ejemplos	
[G]	Ejemplo	Ejemplo		
[H]				
[I]				
[J]				
[K]				Ejemplos

3.8.2. TIPOLOGÍA DE EJEMPLOS Y EJERCICIOS RELACIONADOS CON LA INDEPENDENCIA

A continuación, para cada uno de los elementos del significado extensionales, relacionados con este concepto, indicamos los ejemplos y ejercicios encontrados en los textos analizados.

SI1: *Analizar situaciones en las que aparezca clara la dependencia entre sucesos o decidir si en la situación dada dos sucesos son o no dependientes.* Aunque no pidan explícitamente que analicen la independencia o dependencia, se trata de situaciones donde se aplican dichos conceptos.

En [A]: 2. Ejercicio, p. 53; [E]: Ejemplo b) p. 180; [F]: Ejemplo 1 y ejercicio 25 en p. 232, ejercicios 3, 4, 5 y 6 p. 233, ejemplo, p. 273, ejercicio, p. 273; [G]: Ejemplo 23, p. 216, ejemplo 26 p. 218, y ejercicios 283, 286, 287 de la p. 280 y ejercicios 292 y 295 de la p. 281; [H]: Ejemplo 6, 23.2 ejercicio c) d) p. 195, ejercicio 11, p. 199, ejercicios 19, 20 y 21 de la p. 200; [I]: Ejemplo 2, p. 247, ejemplo 3, p. 248, ejemplo 2º p. 250, ejercicios 11, 12 de la p. 252 y 21 de la p. 253; [J]: Sin definir independencia ni dependencia, encontramos un ejemplo p. 297, los ejercicios 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 de la p. 299 y ejercicios 51 y 52 de la p. 301.

No tratan este concepto [B], [C], y [K].

SI2: *Analizar situaciones en las que aparezca clara la independencia entre sucesos o decidir si en la situación dada dos sucesos son o no independientes.*

Como en el caso anterior, aparecen los ejemplos y ejercicios de este tipo encontrados en los libros analizados. En [E]: Ejemplo a) p. 180 y ejemplo c) p. 181; [F]: Ejemplos 2 y 3 en p. 232, ejercicios 2 y 9 p. 233, ejemplo, p. 273 y ejercicios, p. 273; [G]: Ejemplo 24, p. 216, ejemplo 25, p. 217, ejemplo 27 p. 218, ejercicios 288, 289, 290 y 291 de la p. 280 y ejercicios 293 y 294 y 296 de la p. 281; [H]: Ejemplo 6.23.1, ejercicio a) d) p. 195, ejercicios 12, 14, 15 y 18 p. 199, y ejercicio 22 de la p. 200; [I]: Ejemplo 1, p. 247, ejemplo 1º p. 250, ejercicios 8, 9, 10, 13 de la p. 251, ejercicios 15, 16, 17 y 19 de la p. 252 y ejercicios 22, 23, 24, 25, 26, 27 y 28 de la p. 253; [J]: Sin definir independencia ni dependencia, encontramos los ejercicios 39, 40, 41, 42 y 43 de la p. 301 y ejercicios 44, 45, 47, 53, 54, 55 y 56 de la p. 301.

No tratan estas actividades [A], [B], [C] y [D].

SI3: *Analizar situaciones en las que aparezca clara la dependencia entre* *experimentos o decidir si en la situación dada dos experimentos son o no dependientes.*

Hemos encontrado en [K]: Ejemplo 1, 2º (p. 420) y ejercicios 26.8, 26.13, 26.17 p. 422 y 26.25 p. 423.

No tratan estas actividades el resto de los textos.

SI4: *Analizar situaciones en las que aparezca clara la independencia entre experimentos o decidir si en la situación dada dos experimentos son o no independientes.*

Hemos hallado en [K]: Ejemplo 1, 1º (p. 420), ejemplos 1,2 p. 421 y ejercicios 26.12 a), 26.14, 26.15 a) b) 26.21 de la p. 422 y 26.22, 26.24 y 26.26 de la p. 423.

No tratan estas actividades el resto de los textos.

SI5: *Cálculo de probabilidades aplicando el teorema de la probabilidad total.*

El único ejercicio ha sido encontrado en el texto [A], página 55. El resto de los libros no tratan estas actividades.

SI6: *Cálculo de probabilidades aplicando el teorema de Bayes.*

En el texto [A]: Hay dos ejemplos en la página 54. No tratan estas actividades el resto de los textos.

Como resumen de las actividades sobre independencia, presentamos la tabla 3.8.2. en la que aparecen los textos que tratan dichas actividades, indicando si son ejercicios o ejemplos y en el caso de que no lo traten en blanco.

Tabla 3.8.2. Actividades sobre independencia

	SI1	SI2	SI3	SI4	SI5	SI6
[A]	Ejercicio				Ejercicio	Ejemplos
[B]						
[C] [D]						
[E]	Ejemplo	Ejemplos				
[F]	Ejemplo y ejercicios	Ejemplos y ejercicios				
[G]	Ejemplos y ejercicios	Ejemplos y ejercicios				
[H]	Ejemplos y ejercicios	Ejemplos y ejercicios				
[I]	Ejemplos y ejercicios	Ejemplos y ejercicios				
[J]	Ejemplo y ejercicios	Ejercicios				
[K]			Ejemplo y ejercicios	Ejemplos y ejercicios		

En ella observamos que el elemento extensional SI5 sobre el teorema de la probabilidad total, no aparece en ningún texto analizado, y los elementos SI3, SI4, sobre el análisis de la dependencia o independencia entre experimentos, salvo unos ejemplos y ejercicios en el texto [K], no aparecen en el resto de los libros analizados. Los elementos SI1 y SI2 sobre el análisis de las situaciones donde aparezca clara la dependencia o independencia entre sucesos, la tratan todos los textos analizados salvo [B], [C] y [D]. Destacan estos tres últimos textos que no presentan ninguna actividad relacionada con la independencia.

3.8.3. TIPOLOGÍA DE EJEMPLOS Y EJERCICIOS RELACIONADOS CON LA PROBABILIDAD EN EXPERIMENTOS COMPUESTOS

SEC1: *Enumerar el espacio muestral en experimentos compuestos.* Consiste en describir todos sus elementos, a partir de los espacios muestrales en los experimentos simples.

En [J], tiene un apartado de experiencias compuestas que se introducen mediante el diagrama en árbol, con el siguiente ejemplo:

> *"Disponemos de dos urnas, con cierto número de bolas blancas y negras en cada una de ellas. Suponemos que en la A hay 2 blancas y 5 negras, y en urna B, 4 blancas y 1 negra. Realizamos la siguiente experiencia aleatoria: Tiramos un dado; si sale múltiplo de 3, sacamos una bola de la urna A y si no sale múltiplo de 3, sacamos una bola de la urna B.*
> *Utiliza el diagrama del árbol para estudiar las posibilidades de combinación"* (Texto [J], p. 297).

Además propone los ejercicios 22, 25, p. 299 y 53 p. 301.

En [A], encontramos ejercicios similares: 57, 58, 59, 60, 61, 62 y 63 de la p. 54.

El resto de los textos no tratan actividades de este tipo.

SEC2: *Calcular el número de elementos de un espacio muestral compuesto.*

Aunque no aparece explícitamente en el apartado de probabilidad, consideramos que este tipo de problemas se trata en todos los libros, ya que en el capítulo de combinatoria se suele incluir problemas relacionados con experimentos aleatorios. Otras veces se enumera un suceso, como en [E], para calcular probabilidades en el caso de experimentos compuestos lo hace a través de ejercicios como el que sigue:

> *"3. Se lanzan dos dados.*
> *a) Halla los sucesos elementales que componen los sucesos siguientes: sumar 3, sumar 8, sumar más de 5, sumar menos de 7"* (Texto [E], p. 178).

SEC3: *Cálculo de probabilidad de un suceso simple (experimento independiente).*

En [K] no dedica ningún apartado a los experimentos compuestos, pero sí que aparecen ejercicios relacionados con ellos, así por ejemplo encontramos:

> *"26.5 Halla la probabilidad de que al lanzar un dado tres veces la suma de las caras visibles sea 18"* (Texto [K], p. 422).

En el mismo texto encontramos ejercicios similares: Ejercicios 26.12 a), 26.14, 26.15 a) 26.15 b) y 26.21 de la p. 422.

En [G] el tratamiento es muy parecido al dado en el texto [K], encontrando ejercicios resueltos relacionados con los experimentos compuestos, así:

> *"Se lanza al aire una moneda trucada, diez veces consecutivas, de modo que la probabilidad de obtener cara cada vez es 3/4. ¿Qué probabilidad hay de obtener, al menos una vez, cruz?"* (Texto [G], p. 217).

Ejercicios y ejemplos similares encontramos en los textos siguientes: [A]: Ejercicio 74,1º, 75, 76,2º y 77 p. 55; [B]: Ejercicio 43 a), 46 de p. 30; [C]: Ejemplo a), p. 75 y ejercicio 8, p. 77; [D]: Ejemplo 1º, p. 77 y ejercicios 71 a), 72, 73, 79 a) d) p. 80; 7.10 a) c) y 7.22 a) p. 81; [F]: Ejemplos 2 y 3 en p. 232, ejercicio 9, p. 233; [H]: Ejercicio a) p. 195.

SEC4: *Cálculo de probabilidad de sucesos simples (experimentos dependientes).*

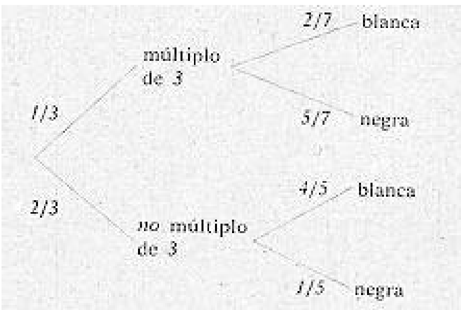
En [A], no dedica ningún apartado específico a los experimentos compuestos, pero sí los trata en los ejercicios propuestos al final del capítulo, así encontramos:

"70. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas nuevas de una urna que contiene 15 bolas blancas y 15 negras, sin reintegrar las bolas extraídas? " (Texto [A], p. 55).

En el mismo texto encontramos un ejercicio similar: 76, 1º, (p. 55).

En [J], tiene un apartado de experiencias compuestas que se introducen mediante el diagrama en árbol, con el siguiente ejemplo:

"Disponemos de dos urnas, con cierto número de bolas blancas y negras en cada una de ellas. Suponemos que en la A hay 2 blancas y 5 negras, y en urna B, 4 blancas y 1 negra. Realizamos la siguiente experiencia aleatoria: Tiramos un dado; si sale múltiplo de 3, sacamos una bola de la urna A y si no sale múltiplo de 3, sacamos una bola de la urna B.
Utiliza el diagrama del árbol para estudiar las posibilidades de combinación; cada experiencia parcial tiene una aplicación frecuencial; escribimos las imágenes en la rama correspondiente al resultado.



La aplicación frecuencial de la experiencia compuesta se obtendrá asignando a cada resultado posible el producto de las dos imágenes que aparecen en la rama completa:
(múltiplo de 3,blanca) -> 1/3.2/7 = 2/21
(múltiplo de 3, negra) -> 1/3.5/7 = 5/21
(no múltiplo de 3,blanca) -> 2/3.4/5 = 8/15
(no múltiplo de 3, negra) -> 2/3.1/5 = 2/15
Comprobemos que la suma de todas las imágenes es 1:
2/21 + 5/21 + 8/15 + 2/15 = 1.
Definida la aplicación frecuencial, podemos ya calcular la probabilidad de cualquier suceso de la experiencia compuesta" (Texto [J], pp. 297/298).

En el mismo texto encontramos: Ejemplo 1, p. 299 y ejercicios 23, 24, 26 a) y 27 p. 300; [B]: Ejercicio 42 a) b) p. 30. Observamos de nuevo el uso del término incorrecto "aplicación frecuencial" para la asignación de probabilidades usando la regla de Laplace. En [C]: Ejemplo b) p. 75; ejercicios 9 y 12 1ª,2ª, p. 78; [D]: Ejercicio 7.22 b) 7.25 de la p. 81; [K]: Ejercicios 26.8 y 26.13 a) de p. 422.

No tratan este tipo de actividades los textos: [E], [F], [G] y [H].

SEC5: *Cálculo de probabilidad de sucesos compuestos (experimentos independientes).*

Es el tipo de ejercicios más numeroso, como vemos a continuación. En [A]: Ejercicios 69, 71, 72, 74,2º y 80 p. 55; [B]: Ejercicios 43 b) c), 44, 47 y 48 p. 30; [C]: Ejemplo 1, p. 76 y ejercicios 4, 1º p. 77 y 10, 11, y 13 de p. 78; [D]: Ejemplo 2º p. 77, ejemplo 2 p. 78 y ejemplo p. 79 y ejercicios: 7.1 b), 7.2 b), 7.4, 7.6, 7.7, 7.8, 7.9 b) c) p. 80; 7.10 b) d), 7.11, 7.12, 7.13, 7.15, 7.16), 7.17, 7.18, 7.20, 7.21, 7.23, 7.24, p. 81; 7.28, 7.30 p. 82. [E]: Ejemplo a) b) c) p. 177; ejercicios 2, 3 y 5, p. 178; ejercicio 3; problemas 1, 2, 3, 4 a) p. 182 y problemas 10 y 11 p. 183; [F]: Ejercicio 2 de p. 233; [G]: Ejemplo 24, p. 216, ejemplo 25, p. 217 y ejemplo 27 p. 218 y ejercicios 288, 289, 290 y 291 de la p. 280 y ejercicio 293 de la p. 281; [H]: Ejercicio b) d) p. 195, ejercicios 12, 14, 15 y 18 p. 199, y ejercicio 22 de la p. 200; [I]: Ejemplo 1, p. 247, ejemplo 1º p. 250 y ejercicios 8, 9, 10, 13 de la p. 251 y ejercicios 15, 16, 17 y 19 de la p. 252 y ejercicios 22, 23, 24, 25, 26, 27 y 28 de la p. 253; [J]: sin definir independencia ni dependencia, encontramos: Ejercicios 39, 40, 41, 42 y 43 de la p. 300 y ejercicios 44, 45, y 55 de la p. 301; [K]: Ejercicios 26.5, 26.6, 26.7, 26.9, 26.12 b), 26.15 c), 26.18 de p. 422 y ejercicios 26.22, 26.24 y 26.26 de p. 423.

SEC6: *Cálculo de probabilidad de sucesos compuestos (experimentos dependientes).*

En [B], sin hacer mención explícita a los experimentos compuestos, sí expone algunos ejercicios resueltos durante el desarrollo del apartado dedicado a probabilidad, y otros propuestos al final del capítulo relacionados con dicho experimento, como el que sigue:

"42. Se saca una carta de una baraja de 40 cartas. Se deja fuera y se saca otra. Probabilidad de que; a) Ambas sean ases. b) Sean las dos del mismo palo. c) Sean de palo distinto" (Texto [B], p. 39).

Ejercicios similares aparecen en [A]: Ejercicio 67, p. 55; [B]: Ejemplo 2 p. 27 y ejercicios 42 c) y 49 de p. 30; [C]: Ejemplo 2, p. 76 y ejercicios 3, 4,2º, 5, 6 de p. 77; 12,3ª, 14 p. 78; [D]: 7.16 a), 7.19, 7.20 2º p. 81; 7.26, 7.29 p. 82; [E]: ejercicio 4 p. 182 y problemas 4 b) p. 182, 7 y 12 p. 183; [F]: Ejemplo 1 en p. 232, ejercicios 3, 4, 5 y 6 p. 233; [G]: Ejemplo 23, p. 216, ejemplo 26 p. 218 y ejercicios 283, 286, 287 de la p. 280 y ejercicios 292 y 295 de la p. 281; [H]: Ejercicio c) d) p. 195, ejercicio11, p. 199, ejercicios 19, 20 y 21 de la p. 200; [I]: Ejemplo 2, p. 247, ejemplo 3, p. 248, ejemplo 2º p. 250, ejercicios 11, 12 de la p. 252 y 21 de la p. 253; [J]: sin definir independencia ni dependencia, encontramos: Ejercicios 26 b) c), 28 de la p. 299 y ejercicios 51 y 52 de la p. 301; [K]: Ejercicios 26.13 b), 26.17 p. 422 y 26.25 p. 423.

Tabla 3.8.3.Actividades sobre experimentos compuestos

	SEC1	SEC2	SEC3	SEC4	SEC5	SEC6
[A]	Ejercicios		Ejercicios	Ejercicios	Ejercicios	Ejercicio
[B]			Ejercicios	Ejercicios	Ejercicios	Ejemplo y ejercicios
[C]			Ejemplo y ejercicio	Ejercicios	Ejemplo y ejercicio	Ejemplo y ejercicios
[D]			Ejemplo y ejercicios	Ejercicios	Ejemplos y ejercicios	Ejercicios
[E]				Ejemplo y ejercicio	Ejemplos y ejercicios	Ejercicio y problemas
[F]			Ejemplos y ejercicios	Ejemplo y ejercicios	Ejercicio	Ejemplo y ejercicios
[G]					Ejemplos y ejercicios	Ejemplos y ejercicios
[H]			Ejercicio	Ejemplos y ejercicios	Ejercicios	Ejercicios
[I]					Ejemplos y ejercicios	Ejemplos y ejercicios
[J]	Ejemplo y ejercicios			Ejercicio	Ejercicios	Ejercicios
[K]			Ejercicios		Ejercicios	Ejercicios

Como resumen de las actividades sobre experimentos compuestos presentamos la tabla 3.8.3. donde se relacionan los textos que tratan dichas actividades indicando si son ejemplos o ejercicios y en blanco si no las trata.

En ella observamos que el elemento de significado extensional SEC2 sobre el cálculo del número de elementos de un espacio muestral compuesto, no aparece explícitamente en ninguno de los textos analizados. El elemento SEC1, sobre la enumeración del espacio muestral en experimentos compuestos solo aparece en los textos [A] y [J]. Puede ser debido a que no se habla en la mayoría de los textos de cómo se forma el espacio muestral de los experimentos compuestos ni de su cálculo. Los elementos SEC5 y SEC6 sobre el cálculo de probabilidad de sucesos compuestos, experimentos independientes y dependientes, respectivamente aparecen en todos los textos analizados. El SEC4 sobre el cálculo de probabilidad de sucesos simples (experimentos dependientes) aparece en todos los textos excepto en [G], [I] y [K]. El SEC3 sobre el cálculo de probabilidad de sucesos simples (experimentos independientes) aparece en todos los textos excepto en [E], [G], [I], [J] y [K].

En general los textos analizados tratan los distintos elementos de significado excepto el texto [I], que solo trata los elementos de significado SEC5 y SEC6 y el texto

3.8.4. ESTUDIO COMPARATIVO DE LA DISTRIBUCIÓN DE EJERCICIOS RESPECTO A LAS VARIABLES BÁSICAS

Los tipos de actividades más usadas en relación con la probabilidad condicional son los ejemplos introductorios, con un 40%, seguidos de los problemas después de la definición y los ejemplos después de la definición con un 17%. Las demás actividades tienen un porcentaje de aparición prácticamente insignificante. Como resumen presentamos la tabla 3.8.4. en la que aparecen los distintos tipos de actividades en cada uno de los libros analizados.

Tabla 3.8.4. Frecuencia y (porcentaje) de ejemplos y ejercicios en cada texto

Tipo de actividad	Libro [I]	Libro [A]	Total
Ejemplo introductorio	2 (10,52)	33 (48,52)	35 (40,23)
Ejemplo después de la definición	2 (10,52)	15 (22,05)	17 (19,54)
Problema después de la definición	13 (68,42)	19 (27,94)	32 (36,78)
Problema después de un ejemplo similar	2 (10,52)	0 (0,00)	2 (2,30)
Ejercicio dirigido	0 (0,00)	1 (1,47)	1 (1,15)
Total	19 (21,84)	68 (78,16)	87 (100,00)

Entre las diferencias más significativas observamos que en el texto [A] son mucho más numerosas las actividades dedicadas a la probabilidad condicional, lo que puede ser debido a que el texto [I] considera que este concepto en este nivel solo se introduce y en cursos posteriores se desarrollará con mayor amplitud.

En el texto [A], dentro de cada uno de los tipos de actividades, excepto en los problemas después de un ejemplo similar, dedica un número mucho mayor de actividades, destacando los ejemplos introductorios, quizás teniendo en cuenta la dificultad de estos conceptos y el nivel de los alumnos a los que va dirigido el texto.

Las actividades más frecuentes son el cálculo de probabilidades de un suceso simple (experimentos repetidos) con un 15,52 %, el cálculo de probabilidad de sucesos compuestos (experimentos repetidos) con un 14,65 %; la evaluación de probabilidades condicionales a partir de enumeración en experimentos simples, con un 9,48 Le siguen el cálculo de la probabilidad de sucesos compuestos (experimentos dependientes) con un 9,48 %; la enumeración del espacio muestral en experimentos compuestos con un 7,75 %; el análisis de situaciones en las que aparece claro la independencia entre experimentos o decidir si en la situación dada dos experimentos son o no independientes, con un 6,03 %; y la evaluación de probabilidades condicionales a partir de la fórmula en experimentos compuestos, con un 5,17 %. El resto de las actividades aparecen con un porcentaje por debajo del 5 %. Como resumen, presentamos la tabla 3.8.5. sobre las actividades de probabilidad condicional que aparecen en los textos analizados. Observamos que igual que en el caso anterior el número de actividades en el texto [A] es mucho mayor que en el texto [I]. En todos los casos los porcentajes son mayores en el caso del manual [A], excepto en el libro [I], que dedica un mayor número de ejercicios al cálculo de probabilidades aplicando el teorema de la probabilidad total.

Tabla 3.8.5. Frecuencia y (porcentaje) de actividades sobre experimentos compuestos y probabilidad condicional en cada texto

Actividad	Libro [I]	Libro [A]	Total
Evaluación probabilidad condicional a partir de enumeración en experimentos simples	0 (0,00)	11 (18,33)	11 (9,48)
Evaluación probabilidad condicional a partir de la fórmula en experimentos simples	0 (0,00)	1 (1,66)	1 (0,86)
Evaluación probabilidad condicional a partir de enumeración en experimentos compuestos	0 (0,00)	5 (8,33)	5 (4,31)
Evaluación probabilidad condicional a partir de la fórmula en experimentos compuestos	2 (3,57)	4 (6,66)	6 (5,17)
Analizar situaciones en las que aparezca clara la dependencia entre sucesos	0 (0,00)	3 (5,00)	3 (2,58)
Analizar situaciones en las que aparezca clara la independencia entre sucesos	0 (0,00)	3 (5,00)	3 (2,58)
Analizar situaciones en las que aparezca clara la dependencia entre experimentos	1 (1,78)	1 (1,66)	2 (1,72)
Analizar situaciones en las que aparezca clara la independencia entre experimentos	0 (0,00)	7 (11,66)	7 (6,03)
Cálculo de la probabilidad aplicando teorema de la probabilidad total	0 (0,00)	1 (1,66)	1 (0,86)
Cálculo de la probabilidad aplicando teorema de Bayes	0 (0,00)	2 (3,33)	2 (1,72)
Enumerar el espacio muestral en experimentos compuestos	2 (3,57)	7 (11,66)	9 (7,75)
Cálculo de la probabilidad de un suceso simple (experimentos repetidos)	14 (25,00)	4 (6,66)	18 (15,52)
Cálculo de la probabilidad de un suceso simple (experimentos independientes)	4 (7,14)	3 (5,00)	7 (6,03)
Cálculo de la probabilidad de un suceso simple (experimentos dependientes)	8 (14,28)	0 (0,00)	8 (6,89)
Cálculo de probabilidad de sucesos compuestos (experimentos repetidos)	12 (21,42)	5 (8,33)	17 (14,65)
Cálculo de probabilidad de sucesos compuestos (experimentos independientes)	2 (3,57)	0 (0,00)	2 (1,72)
Cálculo de probabilidad de sucesos compuestos (experimentos dependientes)	10 (17,85)	1 (1,66)	11 (9,48)
Comparación de probabilidades (experimentos independientes)	1 (1,78)	0 (0,00)	1 (0,86)
Comparación de probabilidades (experimentos compuestos)	0 (0,00)	2 (3,33)	2 (1,72)
Total	56 (48,27)	60 (51,72)	116 (100,00)

Los tipos de espacios muestrales más utilizados son los finitos, con sucesos equiprobables con más de dos elementos, con un 58,62 %. A gran distancia con un 13,79 % están los espacios muestrales finitos con sucesos no equiprobables, y con un 8 % el resto de las categorías. Como resumen de las actividades, presentamos la tabla 3.8.6. sobre los tipos de espacio muestral utilizados en los textos analizados

Tabla 3.8.6. Frecuencia y (porcentaje) del tipo de espacio muestral en actividades sobre experimentos compuestos y probabilidad condicional en cada texto

Tipo de espacio muestral	Libro [I]	Libro [A]	Total
Infinito	8 (42,10)	0 (0,00)	8 (9,20)
Finito, sucesos equiprobables con dos elementos	0 (0,00)	8 (11,76)	8 (9,20)
Finito,sucesos equiprobables, con más de dos elementos	4 (21,05)	47 (69,11)	51 (58,62)
Finito, sucesos no equiprobables	7 (36,84)	5 (7,35)	12 (13,79)
Impreciso	0 (0,00)	8 (11,76)	8 (9,20)
Total	19 (21,84)	68 (78,16)	87 (100,00)

Observamos que el texto [A] dedica un gran número de actividades donde aparece el espacio muestral finito con sucesos equiprobables con más de dos elementos, un 54,02 % frente al 4,60 % del texto [I]. En las categorías 2 y 5, el texto [A] dedica un 8%, mientras que el texto [I] aparece con un 0%. En la categoría 1 ocurre al contrario.

La asignación de probabilidades más utilizada en todas las actividades es la regla de Laplace, con un 67,82 %; seguida de la información estadística disponible con un 25,29 % y por último la realización o simulación de experimentos con un 6,90 %. Estos datos aparecen en la tabla 3.8.7. sobre la asignación de probabilidades en los textos analizados.

Tabla 3.8.7. Frecuencia y (porcentaje) de la asignación de probabilidades en actividades sobre experimentos compuestos y probabilidad condicional en cada texto

Asignación de probabilidades	Libro [I]	Libro [A]	Total
Regla de Laplace	4 (21,05)	55 (80,88)	59 (67,82)
Información estadística disponible	13 (68,42)	9 (13,23)	22 (25,29)
Realización o simulación de experimentos	2 (10,52)	4 (5,88)	6 (6,90)
Ejercicio dirigido	0 (0,00)	1 (1,47)	1 (1,15)
Total	19 (21,84)	68 (78,16)	87 (100,00)

Tabla 3.8.8. Frecuencia y (porcentaje) del contexto utilizado en actividades sobre experimentos compuestos y probabilidad condicional en cada libro

Contexto	Libro [I]	Libro [A]	Total
Juego	6 (31,57)	55 (80,88)	61 (70,11)
Biología	8 (42,10)	0 (0,00)	8 (9,20)
Física	0 (0,00)	4 (5,88)	4 (4,60)
Experiencia alumno	5 (26,31)	9 (13,23)	14 (16,09)
Total	19 (21,84)	68 (78,16)	87 (100,00)

Así mismo en el texto [A], se utiliza ampliamente la regla de Laplace para asignar probabilidades, mientras que en el texto [I], se opta por un enfoque frecuencial.Los contextos más utilizados son los juegos de azar con un 70,11 %, seguidos de aquellos en que se apela a la experiencia del alumno con un 16,09 %.

Otros contextos son la biología con un 9,20 % y la física con un 4,60 %. Aunque puede ser adecuado por la edad de los alumnos el contexto del juego, por su posible motivación, su excesivo uso puede crear en ellos la imagen de que el cálculo de probabilidades solo se utiliza para los juegos. Como resumen presentamos la tabla 3.8.8. sobre los contextos utilizados en las actividades propuestas en los textos analizados.

En el texto [I] se utiliza una mayor diversidad de contextos, haciendo un reparto más equilibrado entre el juego, la biología y la experiencia del alumno. En cambio el libro [A] tiene un mayor número de actividades en las que utiliza el contexto del juego, apareciendo en las restantes, la experiencia del alumno y la física, y ninguna relacionada con la biología que suele ser un contexto cercano al alumno.

La forma de presentación de la información más utilizada por los libros de texto es la verbal con un 58,62 %, seguida de aquella que se presenta a través de tablas con un 26,44 %. Con un porcentaje mucho menor se encuentran los diagramas de árbol con un 10,34 % y aquellas que utilizan las fotos, dibujos y situaciones con un 4,60 %. Como resumen presentamos la tabla 3.8.9. sobre la forma de presentación de la información en los textos analizados.

Tabla 3.8.9. Frecuencia y (porcentaje) de la presentación de la información en actividades sobre experimentos compuestos y probabilidad condicional en cada texto

Presentación información	Libro [I]	Libro [A]	Total
Verbal	2 (10,52)	49 (72,05)	51 (58,62)
Tabla	17 (89,47)	6 (8,82)	23 (26,44)
Diagrama del árbol	0 (0,00)	9 (13,23)	9 (10,34)
Fotos, dibujos, situaciones	0 (0,00)	4 (5,88)	4 (4,60)
Total	19 (21,84)	68 (78,16)	87 (100,00)

En el texto [I] se utiliza ampliamente las tablas, siendo la información verbal menos frecuente, no utilizando en este apartado ni diagramas de árbol ni fotos o dibujos. Por el contrario en el texto [A], destaca sobre las distintas formas, la expresión verbal, apareciendo con un menor porcentaje todas las demás formas.

3.8.5. CONCLUSIONES SOBRE LOS EJEMPLOS Y EJERCICIOS RELACIONADOS CON LA PROBABILIDAD CONDICIONAL, INDEPENDENCIA Y EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Probabilidad condicional

En general son muy escasas las actividades relacionadas con la probabilidad condicional, tanto en el caso de experimentos simples y compuestos. Solamente aparecen en los textos [A], [E], [F], [G] y [K], limitándose en estos casos solamente a algún ejemplo o ejercicio. Consideramos que los autores han tenido en cuenta el nivel de los alumnos a los que van dirigidos los textos, así como la complicación de estos conceptos, lo que nos parece adecuado.

Independencia/Dependencia.

En ella observamos que el elemento extensional SI5 sobre el teorema de la probabilidad total, sólo aparece un ejercicio en el texto [A]. Del teorema de Bayes, elemento extensional SI6 sólo hemos encontrado dos ejemplos también en el texto [A]. El resto de los textos no menciona estos teoremas, posiblemente debido a su complejidad. Los elementos SI3, SI4, sobre el análisis de la dependencia o independencia entre experimentos, salvo unos ejemplos y ejercicios en el texto [K], no aparecen en el resto de los libros analizados. Los elementos SI1 y SI2 sobre el análisis de las situaciones donde aparezca clara la dependencia o independencia entre sucesos, la tratan todos los textos analizados salvo [B], [C] y [D]. Destacan estos tres últimos textos que no presentan ninguna actividad relacionada con la independencia.

Experimentos compuestos.

En ella observamos que el elemento de significado extensional SEC2 sobre el cálculo del número de elementos de un espacio muestral compuesto, no aparece explícitamente en ninguno de los textos analizados. El elemento SEC1, sobre la enumeración del espacio muestral en experimentos compuestos solo aparece en los textos [A] y [J]. Puede ser debido a que no se habla en la mayoría de los textos de cómo se forma el espacio muestral de los experimentos compuestos ni de su cálculo. Los elementos SEC5 y SEC6 sobre el cálculo de probabilidad de sucesos compuestos, experimentos independientes y dependientes, respectivamente aparecen en todos los textos analizados. El SEC4 sobre el cálculo de probabilidad de sucesos simples (experimentos dependientes) aparece en todos los textos excepto en [G], [I] y [K]. El SEC3 sobre el cálculo de probabilidad de sucesos simples (experimentos independientes) aparece en todos los textos excepto en [E], [G], [I], [J] y [K].

En general los textos analizados tratan los distintos elementos de significado excepto el texto [I], que solo trata los elementos de significado SEC5 y SEC6 y el texto [K], que solo trata los elementos de significado SEC3, SEC5 y SEC6.

Estudio comparativo de la distribución de ejercicios respecto de las variables básicas.

Los tipos de actividades más usadas en relación con la probabilidad condicional son los ejemplos introductorios, con un 40%, seguidos de los problemas después de la definición y los ejemplos después de la definición con un 17%. Las demás actividades tienen un porcentaje de aparición prácticamente insignificante.

Las actividades más frecuentes son el cálculo de probabilidades de un suceso simple (experimentos repetidos) con un 15,52 %, el cálculo de probabilidad de sucesos compuestos (experimentos repetidos) con un 14,65 %; la evaluación de probabilidades condicionales a partir de enumeración en experimentos simples, con un 9,48 %; y el cálculo de la probabilidad de sucesos compuestos (experimentos dependientes) con un 9,48 %; la enumeración del espacio muestral en experimentos compuestos con un 7,75 %; el análisis de situaciones en las que aparece claro la independencia entre experimentos o decidir si en la situación dada dos experimentos son o no independientes, con un 6,03 %; y la evaluación de probabilidades condicionales a partir de la fórmula en experimentos compuestos, con un 5,17 %. El resto de las actividades aparecen con un porcentaje por debajo del 5 %.

Los tipos de espacios muestrales más utilizados son los finitos, con sucesos equiprobables con más de dos elementos, con un 58,62 %. A gran distancia con un 13,79 % están los espacios muestrales finitos con sucesos no equiprobables, y con un 8 % el resto de las categorías.

La asignación de probabilidades más utilizada en todas las actividades es la regla de

Laplace, con un 67,82 %; seguida de la información estadística disponible con un 22,59 % y por último la realización o simulación de experimentos con un 6,90 %.

Los contextos más utilizados son los juegos de azar con un 70,11 %, seguidos de aquellos en que se apela a la experiencia del alumno con un 16,09 %. Otros contextos son la biología con un 9,20 % y la física con un 4,60 %. Aunque puede ser adecuado por la edad de los alumnos el contexto del juego, por su posible motivación, su excesivo uso puede crear en ellos la imagen de que el cálculo de probabilidades solo se utiliza para los juegos.

La forma de presentación de la información más utilizada por los libros de texto es la verbal con un 58,62 %, seguida de aquella que se presenta a través de tablas con un 26,44 %. Con un porcentaje mucho menor se encuentran los diagramas de árbol con un 10,34 % y aquellas que utilizan las fotos, dibujos y situaciones con un 4,60 %.

3.9. VARIABLE ALEATORIA

3.9.1. TIPOLOGÍA DE ACTIVIDADES

Una vez estudiados los elementos intensionales de significado que sobre las variables aleatorias presentan los libros de nuestro estudio, hemos analizado los tipos de ejercicios y ejemplos presentados sobre este concepto. Los elementos extensionales del significado que hemos identificado son los siguientes:

SVA1: *Determinar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria.* Se describe al alumno un experimento aleatorio y se define por intensión una variable aleatoria asociada al mismo. Se trataría de determinar el conjunto de valores que toma dicha variable, junto con las probabilidades asociadas.

En [A], p. 59, refiriéndose al experimento de lanzar un dado 10 veces y anotar los resultados, aparece el siguiente ejemplo, en el que se muestra al alumno la distribución de probabilidad de una variable aleatoria:

"Las tablas I y II reciben, respectivamente, el nombre de tablas de distribución de frecuencias (relativas)y de probabilidad.

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
fr(x)	*0,2*	*0,3*	*0,3*	*0,3*	*0,2*

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
p(x)	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*

"(Texto [A], p. 59).

Este ejemplo sirve también para comparar los conceptos de variable aleatoria y variable estadística, así como los de distribución de frecuencias y distribución de probabilidad.

En otros libros, aunque no se habla explícitamente de distribución de probabilidad, aparece implícita esta noción cuando se presentan las distribuciones de frecuencias relativas obtenidas al repetir un número dado de veces ciertos experimentos aleatorios. Por ejemplo, en [D], hay un ejemplo de distribución de frecuencias relativas, cuando se hace referencia a las frecuencias relativas de los valores 2 y 5 en experimento aleatorio consistente en lanzar un dado 1000 veces (p. 76). En [I] encontramos dos ejercicios de distribución de frecuencias relativas: 17, 18 (p. 239). En [J], utilizando el concepto de aplicación frecuencial mencionado otras veces, encontramos una referencia implícita a la variable aleatoria en el ejercicio 7 (p. 295). En [K], ejemplo 2, aparece sin nombrarla una distribución de frecuencias relativas correspondiente a un experimento de lanzar un dado 100 veces y anotar el resultado (p. 410). En [F], aparece en la p. 249 el ejercicio 8, en el capítulo de estadística. No tratan este concepto el resto de los textos analizados.

SVA2. *Determinar la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor determinado.* Se describe al alumno una cierta variable aleatoria, pidiéndole el cálculo de la probabilidad asociada a un cierto valor de dicha variable. El alumno deberá identificar el conjunto de sucesos elementales asociados a dicho valor y calcular la probabilidad del suceso compuesto identificado.

En [G], dentro de los ejercicios correspondientes al capítulo 5.3 aparece el siguiente ejemplo:

> *"En el lanzamiento de un dado, ¿cuál es la probabilidad asociada al resultado 5 de la variable aleatoria puntos conseguidos?"* (Texto [G], p. 286).

No tratan este concepto el resto de los textos analizados, aunque hay ejercicios en que esta actividad aparece implícitamente en [I] (ejercicios 17 p. 257 y 24 de la p. 253).

SVA3. *Dada una lista de variables aleatorias, decidir si son cualitativas o cuantitativas y cuáles son discretas y cuáles continuas.* Se trataría de diferenciar entre los diferentes tipos de variables aleatorias, cuya importancia se debe a que los resúmenes estadísticos y tipos de gráficos varían según esta clasificación, No hemos encontrado este tipo de ejercicio en ninguno de los textos analizados.

SVA4*: Representar gráficamente la distribución de probabilidad de una variable aleatoria.* Se trataría de elaborar un diagrama de barras u otra representación gráfica adecuada, para representar gráficamente la distribución de probabilidad. Además de identificar el tipo de variable aleatoria requeriría por parte del alumno un conocimiento sobre las representaciones gráficas correspondientes.

En el texto [A], hay un ejemplo de representación gráfica mediante un diagrama de barras de la distribución de probabilidad correspondiente a un experimento de lanzar un dado diez veces y anotar los resultados (p. 60).

En [E], a partir de la propuesta a los alumnos de realizar un experimento de lanzar una moneda 100 veces y anotar los resultados, encontramos un ejercicio en que se pide la representación gráfica de la distribución de frecuencias relativas observadas en dicho experimento:

> *"Ahora vas a representar en un gráfico cartesiano los resultados del ejercicio anterior. En abscisas pondrás los respectivos números totales de tiradas (5, 10, 15,....., 100) y en ordenadas las frecuencias relativas. Haz un gráfico para las caras y otro para las cruces"* (Texto [E], p. 176).

Un ejercicio similar, pero referido a un dado, es el 5 (Texto [E], p. 176). En [G], encontramos un ejemplo de gráfica con las distribuciones de frecuencias relativas correspondientes a los experimentos de lanzar una moneda y lanzar un dado (p. 201). En [I], a partir del experimento consistente en lanzar un dado 120 veces, aparece un ejemplo con la gráfica de la distribución esperada y la gráfica de la distribución empírica correspondiente a las frecuencias absolutas de cada uno de los resultados (Texto [I], p. 229).

Más adelante aparece otro gráfico de la distribución de las frecuencias relativas correspondiente al lanzamiento de un dado 240 veces, de la que afirma que *se "separa menos de la distribución esperada*" (p. 229). A partir de una tabla con los resultados del experimento de lanzar 20 veces 10 monedas, se pide lo siguiente:

> *b) Representa sobre papel cuadriculado (mejor, si tienes, sobre papel milimetrado) los resultados anteriores mediante una gráfica. c) Calcula la diferencia entre frecuencia obtenida y frecuencia esperada. Observa si tiende a aumentar"* (Texto [I], p. 238).

Ejercicios similares sobre representaciones mediante diagramas de barras, de distribuciones de frecuencias correspondientes a experimentos de lanzamiento de dados aparecen en este mismo texto con los números 10 y 11 (texto [I], p. 189); 17 y 18 (texto [I], p. 204).

En [K], en el capítulo de estadística descriptiva, sólo se refiere a variables estadísticas, y sólo hemos encontrado un ejemplo en el apartado de representaciones gráficas, en el que realiza un diagrama de barras de una distribución de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas expresadas en una tabla del experimento, consistente en el lanzamiento de un dado 100 veces (Texto [K], p. 432). No tratan este concepto el resto de los textos analizados.

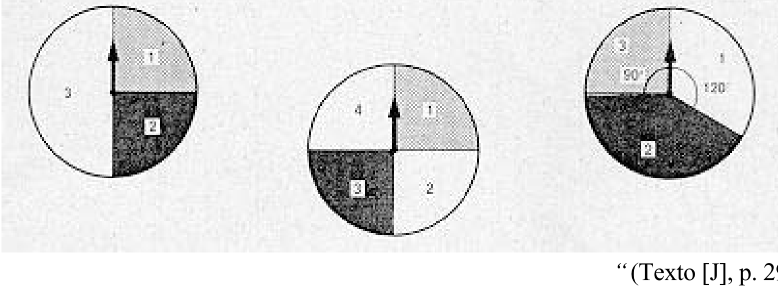
SVA5: *A partir de la representación gráfica, hallar la distribución de probabilidad.* Sería la actividad inversa de la anterior y requiere, por parte del alumno, un conocimiento e interpretación correcta del gráfico.

En [I], hemos encontrado un ejemplo de este tipo de actividad, referido a la distribución de frecuencias relativas, donde intenta explicar que tipo de conclusiones se pueden obtener a partir de las gráficas (Texto [I], p. 229).

En [J], aparece implícitamente. Recordando que en este libro la probabilidad se define a partir del concepto denominado por los autores "aplicación frecuencial", podemos considerar que esta actividad se trata implícitamente en los ejemplos 1 (p. 293), 2 y 3 (p. 294). En ellos, a partir de unos experimentos cuyos posibles resultados se representan en una ruleta, mediante un círculo dividido en sectores, se pide cuál será la aplicación frecuencial más adecuada. Ejemplos similares son el 1 y el 3 (Texto [J], p. 296). Un ejercicio relacionado es el siguiente:

"6. Establece aplicaciones frecuenciales para las siguientes ruletas:

Figura 3.9.1.1.



"(Texto [J], p. 295).

Otros ejercicios similares son: 15 (p. 297), 25 (p. 299). No tratan este concepto el resto de los textos.

SVA6: *Obtener la función de distribución dada la distribución de probabilidad.* A partir de la distribución de probabilidad dada, bien en forma numérica, bien en forma gráfica, obtener la tabla de valores o la representación gráfica de la función de distribución. Esta actividad estaría relacionada con los conceptos de estadístico de orden, mediana, cuartiles y percentiles. No trata este tipo de actividad ninguno de los textos analizados.

SVA7: *Obtener alguno de los valores de posición central, media, mediana o moda o de dispersión.* Dada la distribución de probabilidad de la variable, obtener alguno de los valores centrales. Implicaría la idea de representar la variable aleatoria mediante un resumen numérico. No aparecen ejemplos ni ejercicios ninguno de los textos analizados.

SVA8: *Dada una distribución de probabilidad comprobar si verifica los axiomas de probabilidad.* Una variable aleatoria induce una probabilidad sobre el conjunto de números reales. La probabilidad de que la variable tome un valor particular o un conjunto de valores debe seguir los axiomas de probabilidad. No se hace alusión a esta característica ni se proponen ejercicios relacionados en ninguno de los textos analizados.

SVA9: *Calcular el valor de la variable aleatoria al que corresponde una cierta probabilidad.* Es decir, calcular el valor de la variable al que corresponde un cierto valor de la función de distribución.

En [I], implícitamente, aparece esta actividad en el ejercicio 25:

"¿Cuál es el mínimo número de dados que es necesario lanzar para que la probabilidad de obtener al menos un 3 sea mayor que 0,5? (Texto [I], p. 253).

No hemos encontrado otros ejemplos o ejercicios en el resto de los textos analizados.

Como resumen de las actividades relacionadas con la idea de variable aleatoria, presentamos la tabla 3.9.1. En ella observamos que algunas de las actividades previstas en nuestro estudio no se incluyen en ninguno de los libros analizados. Así ocurre en el caso de los elementos extensionales SVA3, que consiste clasificar la variable en cualitativa o cuantitativa, discreta o continua; SVA6, sobre la obtención de la función de distribución; SVA7 relacionado con los valores centrales y de dispersión de una distribución de probabilidad dada y SVA8, en el que dada una distribución debemos comprobar si verifica los axiomas de probabilidad.

Los elementos SVA1 y SVA4, que consisten en determinar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria y en representar gráficamente dicha distribución, respectivamente, son los que más veces aparecen en los textos analizados, siendo esto lógico ya que son las actividades más básicas y pueden ser consideradas adecuadas al nivel de los alumnos a los que va dirigido.

Tabla 3.9.1. Tipología de actividades sobre variables aleatorias/estadísticas

	SVA1	SVA2	SVA3	SVA4	SVA5	SVA6	SVA7	SVA8	SVA9
[A]	Ejemplo			Ejemplo					
[B]									
[C]									
[D]	Implícito								
[E]				Ejercicio					
[F]	Ejercicio								
[G] [H]		Ejemplo		Ejemplo					
[I]	Ejercicio	Implícito		Ejemplo	Ejemplo				Implícito
[J]	Implícito				Implícito				
[K]	Implícito			Implícito					

En algunos libros tan solo hay un tratamiento implícito del tema. El texto [I] es donde aparece una mayor variedad de ejemplos o ejercicios sobre la variable aleatoria, mientras que los textos [B], [C] y [H] no tienen ninguna actividad relacionada con dicho concepto.

3.9.2. ESTUDIO COMPARATIVO DE LA DISTRIBUCIÓN DE EJERCICIOS RESPECTO A LAS VARIABLES BÁSICAS

Una vez realizado el estudio cualitativo, pasamos al análisis cuantitativo de las variables de tarea de las actividades sobre variable aleatoria en dos libros de texto. En el texto [A] sólo aparecen ejemplos y en el [I] también hay ejercicios, todos ellos introductorios.

En la tabla 3.9.2. observamos que las actividades que más aparecen en los textos analizados relacionados con el concepto de variable aleatoria son aquellas en las que hay que determinar la probabilidad de que una variable aleatoria tome un determinado valor, seguidas de las representaciones gráficas de las distribuciones de probabilidad. Menos frecuentes son las actividades en que se pide determinar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria o calcular las medidas de centralización o de dispersión de dicha distribución de probabilidad.

Tabla 3.9.2. Frecuencia y porcentaje de actividades sobre variable aleatoria en los textos analizados

Actividades	Libro [I]	Libro [A]	Total
Determinar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria	1 (5.88)	1 (16.70)	2 (8.70)
Determinar la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor determinado	9 (52.94)	3 (50.00)	12 (52.10)
Representar gráficamente la distribución de probabilidad de una variable aleatoria	2 (11.80)	2 (3.30)	4 (17.40)
Obtener alguno de los valores de posición central o de dispersión	2 (11.80)	0 (0.00)	2 (8.70)
Determinar la probabilidad de que una variable aleatoria tome uno u otro valor	1 (5.88)	0 (0.00)	1 (4.30)
Calcular un valor de un parámetro de una variable aleatoria para que se dé una cierta probabilidad	1 (5.88)	0 (0.00)	1 (4.30)
Otras	1 (5.88)	0 (0.00)	1 (4.30)
Total	17 (73.91)	6 (26.10)	23 (100.0)

En ella observamos que en el texto [I] son más numerosas las actividades sobre este concepto que en el texto [A]. La actividad más frecuente en ambos textos es calcular probabilidades de valores asilados de la variable. Las actividades sobre la determinación de la probabilidad de que una variable aleatoria tome un determinado valor son más frecuentes en el libro [A], así como las dedicadas a las representaciones gráficas. El resto de las categorías solo aparecen en el texto [I], por lo que consideramos que hace un tratamiento más completo y variado de las posibles actividades a realizar.

En relación con el espacio muestral utilizado en estas actividades, indicaremos que los más utilizados han sido los espacios finitos, con sucesos equiprobables de más de dos elementos con un 91,30%, seguidos a una cierta distancia de los espacios finitos con sucesos no equiprobables con solo un 8,70 %. No aparecen espacios muestrales infinitos, lo que indica que las variables aleatorias presentadas son siempre discretas. Como resumen presentamos la tabla 3.9.3. sobre el tipo de espacio muestral que aparece en las actividades sobre variable aleatoria en los textos analizados.

En ella observamos que los espacios finitos con sucesos equiprobables con más de dos elementos son los únicos utilizados por el texto [A], mientras que el texto [I], es el único que utiliza en estas actividades espacios finitos con sucesos no equiprobables. Por tanto la gama de aplicaciones mostradas sobre la variable aleatoria es mayor en este segundo texto.

Tabla 3.9.3. Frecuencia y (porcentaje) del tipo de espacio muestral utilizado en los ejercicios sobre variable aleatoria en los textos analizados

Tipo de espacio muestral	Libro [I]	Libro [A]	Total
Finito, sucesos equiprobables con más de dos elementos	15 (88.23)	6 (100.00)	21 (91.30)
Finito, sucesos no equiprobables	2 (11.77)	0 (0.00)	2 (8.70)
Total	17 (73.90)	6 (26.10)	23 (100.00)

La asignación de probabilidades se realiza fundamentalmente mediante la regla de Laplace (91,30 % de ejemplos y ejercicios), mientras que en el resto de las actividades, el 8,70 % se hace uso de información estadística. Como resumen presentamos la tabla 3.9.4. sobre la asignación de probabilidades en las actividades relacionadas con el concepto de variable aleatoria.

Tabla 3.9.4. Frecuencia y (porcentaje) de la asignación de probabilidades en los ejercicios sobre variable aleatoria en los textos analizados

Asignación de probabilidad	Libro [I]	Libro[A]	Total
Regla de Laplace	15 (88.20)	6 (100.00)	21 (91.30)
Información estadística	2 (11.80)	0 (0.00)	2 (88.70)
Total	17 (73.90)	6 (26.10)	23 (100.00)

En ella observamos que la regla de Laplace es usada en las actividades del texto [I], en un 88,20 % de ellas, mientras que en el texto [A], aparece en todos los casos los casos. Actividades en las que se asignan probabilidades mediante el uso de información estadística disponible, solo lo hace el texto [I], con el 11,80 % de actividades. No se presentan en estos dos libros, por tanto, actividades sobre variables aleatorias cuya asignación de probabilidad sea de tipo subjetivo.

El único contexto que aparece en este tipo de actividades es el del juego, como puede comprobarse en la tabla 3.9.5. sobre los contextos utilizados en las actividades sobre variable aleatoria. No se hace pues referencia al uso de variables aleatorias en contextos de la actividad cotidiana diferentes al de los juegos de azar.

Tabla 3.9.5. Frecuencia y (porcentaje) de los contextos en los ejercicios sobre variable aleatoria utilizados en los libros analizados

Contexto	Libro [I]	Libro [A]	Total
Juego	17 (100.00)	6 (100.00)	23 (100,00)
Total	17 (73.90)	6 (26.10)	23 (100,00)

La forma más utilizada de presentación de la información es la verbal con un 73,90 % y el resto (26,09 % de actividades), se hace mediante tablas. Como resumen presentamos la tabla 3.9.6. sobre la presentación de la información en las actividades relacionadas con la variable aleatoria.

Tabla 3.9.6. Frecuencia y (porcentaje) de la presentación de la información en los ejercicios sobre variable aleatoria en los textos analizados

Presentación información	Libro [I]	Libro [A]	Total
Verbal	11 (82.60)	6 (100.00)	17 (73.90)
Tabla	6 (17.40)	0 (0,00)	6 (26.10)
Total	17 (73.90)	6 (26.10)	23 (100.00)

En ella observamos que el texto [I], hace un reparto más equilibrado de las distintas formas de presentación de la información. El texto [A] sólo utiliza en las actividades la información verbal.

3.9.3. CONCLUSIONES SOBRE LOS EJEMPLOS Y EJERCICIOS RELACIONADOS CON LA VARIABLE ALEATORIA

Puesto que es escaso el tratamiento de las variables aleatorias en los libros analizados, no es de extrañar que las actividades que hemos encontrado respecto a las mismas sean limitadas. Por ello, algunas de las actividades previstas en nuestro estudio teórico no se incluyen en ninguno de los libros analizados, aunque consideramos que nuestro análisis puede usarse en el diseño de nuevas propuestas curriculares para la enseñanza de la probabilidad.

Así ocurre en el caso de los elementos extensionales SVA3, que consiste en clasificar las variables aleatorias en cualitativas o cuantitativas, discretas o continuas, análisis que consideramos fundamental para el posterior estudio de los resúmenes gráficos y numéricos de las distribuciones de probabilidad. Tampoco hemos encontrado actividades relacionadas con la obtención de la función de distribución (SVA6), que permitirá una comprensión posterior de las ideas de frecuencia acumulada, y estadísticos de orden (percentiles y rangos de percentiles).

Hemos echado en falta las actividades de tipo SVA7 relacionada con los valores centrales y de dispersión de una distribución de probabilidad dada y SVA8, en el que dada una distribución debemos comprobar si verifica los axiomas de probabilidad. La primera de ellas en particular nos parece importante para introducir la idea de esperanza matemática que es una de las ideas estocásticas fundamentales según Heitele (1975).

Los elementos SVA1 y SVA4, que consisten en determinar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria y en representar gráficamente dicha distribución, respectivamente, son los que más veces aparecen en los textos analizados, siendo esto lógico ya que son las actividades más básicas y pueden ser consideradas adecuadas al nivel de los alumnos a los que va dirigido. Señalamos, sin embargo que en algunos libros tan solo hay un tratamiento implícito del tema.

Globalmente, hay una gran variedad en el tipo y cantidad de ejercicios relacionados con las variables aleatorios, siendo el texto [I] es donde aparece una mayor variedad de ejemplos o ejercicios sobre la variable aleatoria, mientras que los textos [B], [C] y [H] no tienen ninguna actividad relacionada con dicho concepto. Creemos que ello influye sobre el significado que de la variable aleatoria se presenta a los alumnos usuarios de estos libros de texto.

Estudio de las variables básicas.

Respecto a las variables de estos ejemplos y ejercicios, hemos encontrado en casi todas ellas una distribución muy limitada a algunas de las categorías posibles.

Las actividades que aparecen con mayor frecuencia en los dos textos analizados relacionados con el concepto de variable aleatoria son que determinar la probabilidad de que una variable aleatoria tome un determinado valor y representaciones gráficas de las distribuciones de probabilidad. Menos frecuentes son las actividades en que se pide determinar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria o calcular las medidas de centralización o de dispersión.

En relación con el espacio muestral utilizado en estas actividades sólo hemos encontrado espacios finitos, la mayor parte de las veces con sucesos equiprobables de más de dos elementos. La asignación de probabilidades se realiza fundamentalmente mediante la regla de Laplace y en algunos casos con uso de información estadística. El único contexto que aparece en este tipo de actividades es el del juego. La forma más utilizada de presentación de la información es la verbal con algunos casos en que aparecen tablas de datos.

En consecuencia, creemos que debería prestarse mayor atención al tema de la variable aleatoria e incluir una mayor variedad de ejemplos y ejercicios que tengan en cuenta las variables básicas de tarea de los mismos. Sólo de esta manera podremos llevar al alumno a construir un significado de la variable aleatoria acorde con el significado institucional en este nivel de enseñanza.

3. 10. CONCLUSIONES SOBRE LOS EJEMPLOS Y EJERCICIOS: ELEMENTOS EXTENSIONALES DE LOS CONCEPTOS PROBABILÍSTICOS ELEMENTALES

En este capítulo hemos realizado un estudio de las actividades (ejemplos y ejercicios) propuestas a los alumnos en los libros analizados. El estudio se ha realizado en dos niveles de profundidad:

a) Un estudio teórico de las actividades que, desde nuestro punto de vista, serían necesarias para que el alumno construyese, a partir de ellas, las propiedades básicas de los conceptos probabilísticos elementales. Es decir, un análisis teórico de los elementos extensionales que, a nuestro juicio, implican los elementos intensionales correspondientes a los conceptos probabilísticos elementales, para el nivel de enseñanza fijado.

El trabajo es complementado con el análisis cualitativo de la presencia de los elementos identificados en el total de los libros de la muestra. Cada una de las actividades identificadas se describe detalladamente, mostrando ejemplos de las mismas presentes en los textos y discutiendo su importancia para la formación del alumno. Como consecuencia se presentan unas tablas resumen de la presencia o ausencia de las diversas actividades en los libros y se deducen las diferencias entre los mismos, respecto al tipo de actividades propuestas.

b) Un análisis de las principales variables de tarea de las actividades previamente descritas, así como un estudio estadístico de su distribución en los ejercicios y ejemplos, en los dos textos analizados. Determinar el tipo de actividad no es suficiente, puesto que los valores posibles de las variables de tarea aportan matices específicos al significado de los conceptos probabilísticos que, a partir de ella podrían construir los alumnos.

Presentamos a continuación un resumen de las conclusiones obtenidas en estos dos tipos de análisis.

Análisis teórico de las actividades

Se muestra en general, una falta de correspondencia entre las actividades propuestas y los conceptos presentados en el ámbito teórico, para mucho de los cuales no hay una cantidad ni variedad suficiente de ejercicios o ejemplos.

En los ejercicios analizados, los conceptos más frecuentes son el experimento compuesto, la probabilidad y las frecuencias relativas, aunque también aparecen las operaciones con sucesos, así como la variable aleatoria. Hay pocos ejercicios sobre espacio muestral, experimento aleatorio, probabilidad condicional, dependencia e independencia, conceptos todos ellos básicos y que merecían mayor atención dentro de los libros.

Creemos, como Hawkins y cols. (1992) que el experimento aleatorio es uno de los conceptos básicos en estadística y que los libros de texto no le dedican la atención que se debiera, lo que se muestra también en nuestro caso. Respecto al concepto de independencia, numerosos autores como Steinbring (1986) y Truran y Truran (1997) han señalado la dificultad de comprensión de este concepto, que es mayor precisamente desde el punto de vista de su aplicación, que desde el punto de vista teórico. Por ello creemos que los libros de texto debieran dedicar mayor proporción de ejercicios a este punto, donde se mostrara al alumno ejemplos de experimentos dependientes e independientes.

El número de actividades relacionadas con el espacio muestral y sucesos es escaso. Ello puede ser comprensible, por el menor énfasis que, a lo largo del período estudiado se ha ido dando progresivamente a las estructuras axiomáticas y a la teoría de conjuntos en relación con la probabilidad. Sin embargo, no podemos olvidar que las operaciones con sucesos son las que nos posibilitan el cálculo de probabilidades, más allá de una simple asignación inicial a los sucesos elementales, usando la simulación. Por otro lado, la probabilidad empírica nunca proporciona una justificación a los valores obtenidos, incluso cuando la aproximación fuese suficientemente precisa. Por ello mismo creemos que es necesaria conservar las actividades relacionadas con los sucesos y sus operaciones, aunque se mantenga un lenguaje no técnico para las mismas.

La mayoría de los textos tratan el concepto de frecuencia relativa en el ámbito teórico, pero los ejercicios y ejemplos relacionados con la frecuencia relativa son poco numerosos. En las actividades analizadas se insiste mucho en los aspectos algorítmicos, pero muy poco en los aspectos interpretativos de la frecuencia relativa, en la posibilidad de asignar probabilidades a los sucesos a partir de la misma, en la convergencia estocástica de las frecuencias hacia la probabilidad, etc.

La mayor parte de las actividades propuestas están relacionadas con la concepción clásica de probabilidad, siendo pocos los libros que estudian los casos en que no puede aplicarse la regla de Laplace. Son excepciones los textos [I] y [J]. Este último presenta actividades y ejemplos en todas las concepciones de probabilidad, aunque son escasas y no recogen todos los apartados.

La actividad casi exclusivamente propuesta es la asignación de probabilidades a sucesos simples y compuestos aplicando la regla de Laplace. Esta actividad es más que nada un refuerzo del cálculo combinatorio estudiado en temas anteriores que en el apartado de probabilidad encuentra su justificación.

Análisis de las variables de tarea

Hemos identificado como variables básicas de las actividades propuestas, el tipo de espacio muestral, la forma en que se asignan probabilidades, el contexto empleado y la presentación de la información

Respecto al espacio muestral, la mayoría de los ejemplos y ejercicios se limitan a espacios muestrales finitos con más de dos elementos, donde se puede aplicar la regla de Laplace, nos indica que la concepción predominante de probabilidad en los ejemplos y ejercicios es la laplaciana. Contrasta ello con la presentación teórica del concepto de probabilidad que, prácticamente en todos los libros incluye la concepción frecuencial de probabilidad, concepción que se presenta en el ámbito teórico, pero no práctico.

La regla de Laplace es la forma más frecuente de asignar probabilidades a los sucesos en las actividades, lo que implica que los alumnos deben manejar adecuadamente el cálculo combinatorio. Este cálculo, no obstante, no siempre es asequible al alumno, como se ha mostrado en las investigaciones de Navarro-Pelayo (1994) y en Batanero y cols. (1997 a) y (1997 b). En un 20 % de casos la asignación de probabilidades se hace a partir de información estadística presentada al alumno lo que puede servir para establecer un puente entre estadística y probabilidad.

Sin embargo, apenas aparecen actividades de experimentación por lo que no hay un verdadero enfoque frecuencial de la probabilidad. Son también casi inexistentes los ejercicios basados en la concepción subjetiva de la probabilidad o probabilidades geométricas.

Los contextos más frecuentes utilizados en los ejemplos y ejercicios son los juegos de azar, la biología así como los relativos a la experiencia del alumno. El gran predominio del contexto relativo a juegos de azar se relaciona, por un lado, con los tipos de espacios muestrales (sucesos equiprobables) y la asignación de probabilidades (laplaciana) y por otro, con el intento de hacer más interesante el tema a los alumnos, quienes, en general, se interesan por los juegos de azar. No obstante, creemos que se aprecia una restricción importante en el dominio de las aplicaciones de la probabilidad mostradas al alumno.

La expresión verbal es la forma más utilizada de presentar la información en los ejercicios y ejemplos analizados. Otra forma de expresión con un peso importante es por medio de tablas estadísticas con o sin gráficos asociados, así como fotos, dibujos o ilustraciones. A pesar de la importancia que se le ha atribuido en la enseñanza de la probabilidad y combinatoria por Fischbein (1975), es prácticamente inexistente el uso del diagrama en árbol.

Análisis estadístico de la distribución de ejercicios en dos libros de texto

Aún a partir del análisis de sólo dos textos podemos destacar la diferencia de orientación y, en consecuencia, del significado presentado en los libros de texto. El número y variedad de ejercicios y ejemplos relacionados con los conceptos probabilísticos elementales, que aparecen en el libro [I], es muy superior a los que aparecen en el texto [A], de donde se deduce, que el primero ha adoptado un enfoque constructivista, basado en la resolución de problemas por parte del alumno y ha concedido mayor importancia a las aplicaciones, frente al aspecto teórico.

El tratamiento dado a la frecuencia relativa por el texto [I], es mucho más amplio y completo que el realizado por el texto [A], lo que nos permite concluir que el primer libro concede una mayor importancia a este concepto, destacando la relación entre estadística y probabilidad. Las actividades que aparecen en el texto [I] cubren todas las categorías analizadas, concediéndole gran importancia a los aspectos algorítmicos, pero sin olvidar los aspectos interpretativos. Sin embargo en el libro [A], aparecen 7 categorías de actividades vacías, y sólo un caso de atribución de probabilidades en base a las frecuencias relativas. En el texto [A], por el contrario, se da más peso a las actividades sobre espacio muestral y sucesos, debido al enfoque formal del tema en el mismo. Son también más numerosos y más variados los ejercicios relacionados con los experimentos compuestos, dependencia e independencia.

CAPÍTULO IV
ELEMENTOS REPRESENTACIONALES DEL SIGNIFICADO DE CONCEPTOS PROBABILÍSTICOS

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo analizamos el lenguaje, notaciones simbólicas, gráficos, dibujos, diagramas, esquemas, fotografías, etc., -en general objetos ostensivos- que se utilizan en el estudio de los conceptos probabilísticos elementales, en dos libros de texto. Estos libros han sido seleccionados de la muestra de manuales escolares objeto de nuestra investigación, según unos criterios que detallaremos en la sección 4.3. en el apartado dedicado a metodología. Los conceptos probabilísticos estudiados han sido los ya fijados en los capítulos 1 y 2: Experimento aleatorio; espacio muestral; sucesos, sus tipos y operaciones; frecuencia relativa; probabilidad en sus diferentes acepciones; probabilidad condicional, dependencia e independencia; experimentos compuestos y variable aleatoria.

Como hemos descrito en el marco teórico, el significado de un objeto matemático es una entidad compleja, una de cuyas componentes son las expresiones utilizadas, las notaciones simbólicas, los gráficos, dibujos, diagramas, esquemas, fotografías, etc. que es lo que denominamos elementos representacionales del objeto matemático estudiado. Este tipo de elementos de significado de un objeto matemático tiene un carácter ostensivo y sirven para representar a los elementos intensionales y extensionales del significado de dicho objeto. Tanto las generalidades (entidades intensionales) como las situaciones-problema (elementos extensionales) vienen dadas por sistemas notacionales que describen sus características y le dan corporeidad. En la terminología que Vergnaud (1982) utiliza para describir un concepto, sería el conjunto de representaciones simbólicas usadas para representar un concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere.

La importancia del lenguaje así como de las notaciones simbólicas y representaciones gráficas en el trabajo matemático ha sido resaltada por numerosos autores como Pimm (1990), Orton (1990), Dickson y cols. (1991), Tall (1993), Sanz (1990), etc. que detallaremos más adelante en los siguientes apartados. Desde el marco teórico de nuestro estudio su importancia se debe a que en el trabajo matemático usamos normalmente unos objetos concretos (las representaciones) en función o representación de los objetos abstractos o de las situaciones en las que intervienen, existiendo una correspondencia semiótica entre el objeto representante y el objeto representado.

Creemos que el estudio realizado en dichos textos nos puede permitir obtener una aproximación de los recursos más utilizados en el estudio de la probabilidad, en relación con los elementos representacionales. El análisis que hacemos de los elementos del significado nos pueden permitir analizar otros libros de texto, así como obtener instrumentos de evaluación del conocimiento probabilístico de los alumnos. Así mismo nos proporciona información sobre cuáles son los recursos del lenguaje matemático que deben ser tenidos en cuenta en una clase de probabilidad, para que los alumnos alcancen realmente la comprensión de dicho concepto.

4.2. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS

Nuestro estudio pone de manifiesto que los libros de texto, en el tema de probabilidad, además de los conceptos teóricos, los ejercicios y ejemplos, generalmente utilizan abundantes recursos verbales, notaciones simbólicas y gráficos. Los objetivos que nos hemos planteado en relación con estos elementos representacionales del significado de los conceptos probabilísticos elementales estudiados son los siguientes:

1) Comprobar experimentalmente si en los textos estudiados aparecen todos los recursos que teóricamente son aconsejables en el estudio del tema.
2) Mostrar la riqueza de lenguaje, notaciones simbólicas, gráficos, diagramas, etc. que puede ser utilizada en el tema de la probabilidad y estudiar las consecuencias posibles sobre el tipo de enseñanza que reciben los lectores de estos libros de texto.
3) Detectar las diferencias que consideremos importantes, desde el punto de vista didáctico, sobre los tipos de expresiones, notaciones, gráficos, diagramas, etc. que utilizan los diferentes manuales escolares.
4) Confeccionar una parrilla de análisis de las expresiones, notaciones, gráficos, dibujos, etc. que oriente la práctica docente y la evaluación del conocimiento de los alumnos sobre probabilidad.

Metodología del análisis

Para realizar el análisis del lenguaje matemático en el tema de probabilidad, sólo hemos analizado dos de los libros de la muestra, los mismos que se eligieron para el análisis de los ejercicios y ejemplos.

Ello ha sido debido a que se ha preferido un estudio más exhaustivo y con detenimiento, aunque se limite el tamaño de la muestra. Se trata de un estudio de casos que es suficiente para nuestro propósito pues los fenómenos que queremos describir y ejemplificar no precisan de una muestra más amplia.

Como en el capítulo anterior, hemos elegido para el análisis con detenimiento los textos [A] e [I], pues estos libros ya habían sido seleccionados para el análisis de ejercicios por los motivos explicados anteriormente. El proceso seguido ha consistido en ir estudiando qué tipo de expresiones, notaciones, gráficos, tablas, dibujos, etc. se utiliza en cada uno de los textos para los conceptos probabilísticos elementales siguientes: Experimento aleatorio; espacio muestral; sucesos, sus tipos y operaciones; frecuencia relativa; probabilidad en sus diferentes acepciones; probabilidad condicional, dependencia e independencia; experimentos compuestos y variable aleatoria. En cada caso hemos elaborado una tabla con la lista de palabras, notaciones, dibujos, tablas, fotografías, etc. utilizadas, (ordenadas alfabéticamente), donde se aprecian claramente las diferencias y se muestra la gran riqueza del vocabulario, de gráficos y diagramas, sobre todo en uno de ellos, referido a la probabilidad. Este estudio ha sido completado con el análisis de los usos dados a estas notaciones en los libros analizados.

Hemos diferenciado tres componentes en nuestro análisis que son los siguientes: lenguaje probabilístico, notaciones simbólicas y otras representaciones.

4.3. EL LENGUAJE PROBABILÍSTICO

4.3.1. INTRODUCCIÓN

El primer componente analizado es el lenguaje, es decir el conjunto de palabras y expresiones empleadas en los libros para denotar los conceptos probabilísticos que se trata de estudiar. Según Orton (1990) hay muchos aspectos del lenguaje que pueden afectar al aprendizaje de las matemáticas. Es fácil hallar ejemplos de chicos que no entienden los términos que empleamos y ello nos plantea el tema del vocabulario matemático. Puede que surjan problemas incluso cuando el vocabulario sea apropiado, porque a veces los alumnos le atribuyen un significado no acorde con el que pretendemos darle en la clase de matemáticas. Lo que reviste un problema no son los términos específicos sino los conceptos y procesos subyacentes que se están comunicando y el significado que transmiten.

Por otro lado, Pimm (1987) también indica que hay problemas adicionales cuando palabras específicas conllevan una significación matemática que es diferente del significado habitual cotidiano, lo cual puede ocurrir en el caso de los términos probabilísticos. Sin embargo, también considera que la analogía (la metáfora) en el uso cotidiano de la palabra, parece muy importante para la construcción del significado matemático.

Dickson y cols (1991) presentan un resumen de diversas teorías que señalan la importancia del lenguaje en el desarrollo del pensamiento matemático, desde la tradición conductista americana que consideraba el pensamiento como "habla no vocalizada" hasta el constructivismo de Piaget quien consideraba el pensamiento como "acciones internalizadas", por lo que para él, el lenguaje solamente podrá reflejar y no determinar el desarrollo cognitivo. Este autor opina que la adquisición del leguaje y los conceptos subyacentes es en modo alguno pasivo. La comprensión del lenguaje y su uso por el niño depende de su implicación en las situaciones en que se utiliza. Por ello considera esencial que el niño y el maestro analicen los diversos significados e interpretaciones de las palabras, de manera que cada uno sepa claramente lo que el otro quiere decir al usar determinadas formas lingüísticas.

Todas estas consideraciones nos han llevado a analizar el lenguaje empleado en los dos libros de texto seleccionados. Los objetivos concretos pretendidos son los siguientes:

a) Mostrar la riqueza de los medios expresivos probabilísticos en los libros de texto, incluso cuando se trata de unidades pensadas para una primera introducción al tema. Tras esta riqueza de medios expresivos subyace una riqueza conceptual que apunta, por un lado, a la complejidad de los significados de los conceptos matemáticos subyacentes, y por otro, a sus múltiples interrelaciones y a la rica fenomenología de lo aleatorio.
b) Mostrar las diferencias de medios expresivos en los textos analizados, para ejemplificar como, para un mismo nivel de enseñanza y unos mismos conceptos, es posible una gama de significados a presentar a los alumnos, en función del lenguaje empleado y al modo en que se usa este lenguaje.

Estos dos puntos sirven de nuevo para mostrar el importante papel de los escritores de libros de texto que marcan un nuevo nivel en la transposición didáctica del tema, al fijar y concretar lo establecido en los diseños curriculares, así como del profesor que, finalmente en el aula decide no sólo el libro de texto que recomienda a sus alumnos sino las partes de éste a usar en la enseñanza y los recursos con que debe ser complementado.

Rotherry (1980) diferencia tres amplias categorías de palabras usadas en la enseñanza de las matemáticas:

a) Palabras que son específicas de las matemáticas y que, normalmente no forman parte del lenguaje cotidiano. Una de las características distintivas del discurso sobre las matemáticas es el uso generalizado del vocabulario técnico. Los matemáticos han desarrollado una serie de términos específicos para comunicarse entre sí, que pueden causar problemas en las clases de matemáticas en caso de que los alumnos no lleguen a dominarlo (Pimm, 1987).
b) Palabras que aparecen en las matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos. Pimm (1987) indica que la mayor parte de las clases de matemáticas se desarrollan en una mezcla de lenguaje corriente y lenguaje matemático (es decir usando términos ordinarios del lenguaje con un sentido matemático). A causa de interpretaciones lingüísticas diferentes se producen innumerables confusiones cuando el profesor emplea términos "del dialecto matemático" y los alumnos lo interpretan de acuerdo al lenguaje ordinario.
c) Palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos.

Como veremos en el caso de la probabilidad la mayoría de los vocablos pertenecen a las dos últimas categorías, aunque, si el niño no está muy familiarizado por el uso, muchas palabras de la categoría c) se convertirán en términos de la categoría b), lo que podrá crear dificultades de comunicación en el aula.

4.3.2. EXPERIMENTO ALEATORIO

En primer lugar hemos analizado el concepto de experimento aleatorio y las palabras y expresiones empleadas para referirse a este concepto, y a la idea de aleatoriedad. En la tabla 4.3.1. recogemos este lenguaje, alfabetizado para cada uno de los dos libros analizados.
Podemos clasificar estas palabras y expresiones en los siguientes grupos diferenciados:
a) Expresiones referidas a la aleatoriedad
b) Expresiones referidas a la idea de experimento aleatorio o sus resultados
c) Vocablos relacionados con los dispositivos generadores de resultados aleatorios

a) Expresiones referidas a la aleatoriedad:

Son las que evocan este concepto, sirven para definirlo o precisar sus características, que fueron analizadas en la sección 2.2. Hemos encontrado entre ellas substantivos como *azar:*
"El azar es considerado como lo más opuesto al orden, cualquier regla, a toda previsión. ¿Cómo poner leyes a algo imprevisible?" (Texto [I], p. 234).

Otros vocablos utilizados para caracterizar estas situaciones aleatorias son *incertidumbre, inseguridad*: *"Estos ejemplos te dan la clave fundamental para empezar a* *poner números a la incertidumbre; para manejarte bien a pesar de la inseguridad"* (Texto [I], p. 223). Asimismo se hace referencia a que "*No se puede predecir el resultado"* (Texto [A], p. 40). Esta es una característica que sirve para discriminar experimentos aleatorios y no aleatorios:

> "*Fíjate en que cada vez que realizas los experimentos a), b) y d) no puedes predecir el resultado, ya que en a) puede ser cara o cruz; en b) puede salir 1,2,3,4,5 o 6, etc. En cambio, en el experimento c) si puedes predecir el resultado: el trozo de plomo no flota en el agua. Por ello decimos que los experimentos a), b) y d) son aleatorios y que el experimento c) no es aleatorio"* (Texto [A], p. 40).

Tabla 4.3.1. Lenguaje utilizado en relación con el experimento aleatorio

Texto [I]	Texto [A]
Aleatoria (experiencia)	Bolas en urnas
Azar	Dado
Azaroso	Experimento aleatorio
Baraja, española, francesa	Fichas numeradas
Bolsa (con bolas)	Impredecible
Cargado, correcto (dado)	Juegos de azar
Carta	Lanzar (dados, moneda)
Chincheta	Moneda
Dado (caras, trucado, irregular	Observar (un resultado)
Extraer (una bola)	Obtener (un resultado)
Extracción	Predecir (un resultado)
Ficha	Proceso (define un)
Función Random	Resultado
Imprevisible	Rifas (con números premiados)
Incertidumbre, incierto	Sacar (una carta, una moneda, Bolas de urnas)
Inseguridad	Sucesión de elementos (permite obtener una)
Juegos de azar: ganar/ perder, Jugada	
Lanzar (un dado, moneda)	
Moneda	
Números aleatorios	
Resultado	
Ruleta	
Sacar (una carta	
Secuencia (de resultados aleatorios)	
simétrica (simetría)	
Sondeo	
Suerte	
Tirar (un dado, moneda)	

A veces encontramos adjetivos que se emplean para calificar este tipo de experiencias, resultados o situaciones y para describir sus características, como en el siguiente ejemplo en las que se atribuye este carácter como *azaroso* o *imprevisible*: *"La palabra azaroso se utiliza como sinónimo de imprevisible"* (Texto [I], p. 234). Otro término más técnico es el de *aleatoria, aleatorio*: *"Los acontecimientos cuya realización depende del azar se llaman sucesos aleatorios"* (Texto [I], p. 227). Sin embargo, en otras ocasiones la palabra *azar* no se emplea como sustantivo, sino como adjetivo para calificar una situación, especialmente, en lo referido a los juegos: *"Se empezó con juegos de azar"* (Texto [I], p. 222). Estos juegos se describen en la siguiente forma en el texto [A], p. 39:

"*Una de las características de los llamados "juegos de azar" consiste en que sus resultados están substancialmente de acuerdo con las probabilidades "a priori"* (Texto [A], p. 39).

Con una connotación de control del azar o bien de resultado inesperado, aparece a veces la idea de *suerte*. De este modo, y coincidiendo con lo expuesto por Hawkins y cols.(1992), se diferencia entre aleatoriedad que es no controlable y la suerte que podría ser controlable o podría favorecer o perjudicar a una persona:

"Tuve una tarde de suerte: tiré el dado 180 veces y salió el 6 en 84 ocasiones" (Texto [I], p. 234).

b) Expresiones referidas a la idea de experimento aleatorios o sus resultados

Ya hemos indicado que son pocos los libros en que se sugiere a los alumnos realizar experimentos aleatorios y observar sus resultados. La introducción de la idea de aleatoriedad se hace preferentemente de un modo descriptivo. Las características atribuidas a los resultados de estos experimentos se describen con palabras como *imprevisible, incierto,* cuyo significado no suele clarificarse. También la palabra *aleatorio* se usa como calificativo, por ejemplo *número aleatorio* (Texto [I], p. 230), a pesar de no haberse dado una definición explícita del mismo.

Algunos verbos evocan tipos característicos de experimentos considerados aleatorios, como *extraer* (una bola), *lanzar* (un dado, moneda), *sacar* (una carta), *tirar* (un dado, moneda). Asimismo encontramos referencias a "*obtener un resultado" y "observar un resultado":*

"a) Lanzar una moneda al aire y observar el resultado" (Texto [A], p. 40).

Estos verbos evocan una serie de acciones familiares a la experiencia del niño con los mismos, a la vez que generalmente unos convenios implícitos. Por ejemplo, tiramos o lanzamos un dado, para estudiar el número que resulta en la cara superior, pero no nos preocupamos de su color y suponemos que no cae de canto. Sacamos o extraemos una carta de la baraja, habiendo barajado esta previamente y sin hacer trampas, etc. Solo hemos encontrado en el texto [A], una mención a la posibilidad de no considerar algunos de los resultados:

"Lanzar al aire el dado de la figura 11 y observar el resultado. Supongamos que hay sólo seis resultados posibles (prescindimos de la posibilidad de que el dado quede apoyado en una arista o en un vértice)" (Texto [A], p. 46).

Otro caso en que aparecen convenios implícitos es la referencia a *sondeo:*

"Hacen un sondeo y averiguan que el 40% de los hombres y el 30% de las mujeres estaría dispuesto a ser trasladado" (Texto [I], p. 251).

Esta palabra implica la idea de una población subyacente de la que se ha tomado una muestra, de modo que esta sea representativa de dicha población, es decir, donde se supone los elementos de la muestra han sido elegidos de alguna forma aleatoria que impide la inclusión de sesgos respecto a los resultados obtenidos. Aunque "sondeo" es un término técnico, su uso se está incorporando progresivamente al lenguaje ordinario, debido al uso creciente de encuestas y *sondeos de opinión*, especialmente por parte de la prensa, por lo que creemos debe resultar familiar a los alumnos a los que van dirigidos los libros.

En el caso de los *juegos de azar* nos referimos a juegos en que interviene un elemento aleatorio que nos impide tener la seguridad de ganar siguiendo una estrategia dada y también encontramos vocablos específicos asociados a este tipo de juegos, como *ganar, perder, jugada.*

Otra expresión característica es la de *secuencia* (de resultados aleatorios) que evoca una serie de resultados obtenidos al repetir en las mismas condiciones un experimento aleatorio un número dado de veces y que potencialmente podemos continuar en las mismas condiciones iniciales:

> "*Con un programa adecuado se pueden obtener en muy pocos minutos los resultados de una supuesta secuencia de miles de tiradas de dado con la misma eficacia que si, realmente, se efectuaran los lanzamientos*" (Texto [I], p. 230).

También hemos encontrado para referirse a los resultados de un experimento aleatorio, la palabra *sucesión,* utilizada en el mismo sentido que la de secuencia:

> *"En el capítulo anterior has estudiado los fenómenos aleatorios. Cada uno de éstos define un proceso que permite obtener una sucesión de elementos"* (Texto [A], p. 58).

c) Vocablos relacionados con los dispositivos generadores de resultados aleatorios.

En el análisis efectuado del concepto de aleatoriedad desde el punto de vista teórico, indicamos que en esta idea podemos separar los resultados o secuencias de resultados, del experimento en sí mismo o bien del dispositivo experimental que produce los resultados aleatorios. En los libros hemos encontrado gran variedad de vocablos que se refieren a los dispositivos que generan resultados aleatorios. La riqueza de este tipo de vocabulario implica la consideración de ejemplos variados de experimentos aleatorios, que no siempre son isomorfos y que según Truran (1994 a) pueden ser considerados como no equivalentes por los niños, incluso en el caso de ser isomorfos.

En primer lugar, nos encontramos con los dispositivos físicos productores de resultados aleatorios, que son suficientemente conocidos por los alumnos a través de sus experiencias con juegos de azar, muy extendidos en nuestra cultura. Entre otros, en los textos se hace referencia a la *baraja (española y francesa), bolsa (con bolas), chincheta, dado, ficha, moneda, ruleta*. Una moneda o un dado pueden ser similares para el alumno, con la diferencia del número de sucesos del espacio muestral implicado, puesto que en ambos casos hay un conjunto discreto de resultados determinados por la posición física del objeto (moneda o dado) al caer después de un lanzamiento. En estos casos, tanto como en la extracción de bolas en urnas es más fácil visualizar la relación parte-parte en el cálculo de probabilidades, lo que hace que en ocasiones los alumnos no lleguen a usar fracciones sino a comparar los valores absolutos de casos favorables y desfavorables para asignar probabilidades.

Una ruleta visualiza mejor la relación parte-todo y por tanto la regla de Laplace y, además, permite al alumno utilizar consideraciones de tipo geométrico. Tanto este caso como la chincheta permite proponer ejemplos de sucesos no equiprobables. La baraja o la bolsa con bolas permite trabajar situaciones de muestreo sin reemplazamiento que no es fácil ejemplificar con los dispositivos anteriores.

Otras veces se usan contextos de tipo cotidiano para ejemplificar experimentos aleatorios como *"sacar una moneda de un bolso que contiene una moneda de 5 pesetas, una moderna de 25 pesetas y una moneda de 50 pesetas"* (Texto [A], p. 54).

O problemas relacionados con el tráfico, como en el ejemplo siguiente:

> "*Los expertos de tráfico, sin conocer las intenciones personales de cada conductor, prevén con mucha precisión qué flujo de coches va a haber en cada carretera a cada hora de la semana. Y lo que es más sorprendente, vaticinan con tino el número de accidentes que se van a producir. Estos no son*

más que algunos de los muchísimos ejemplos que se pueden dar sobre regularidades en situaciones completamente aleatorias" (Texto [I], p. 234).

Incluso se menciona la *función random* de un microordenador, que es un dispositivo determinista que permite obtener resultados que a efectos prácticos pueden ser tomados como aleatorios:

"Los microordenadores tienen una función (RANDOM) con la que se pueden conseguir números aleatorios. Con un programa adecuado se pueden obtener en muy pocos minutos los resultados de una supuesta secuencia de miles de tiradas de un dado"(Texto [I], p. 230).

Otras veces se especifican las condiciones que deben seguir estos generadores para ser considerados como aleatorios, introduciendo, por ejemplo, la idea de *dado correcto o moneda indistinguible* que hace referencia implícita a la equiprobabilidad de sus diferentes resultados, aunque explícitamente no se analizan estas propiedades:

"Hemos calculado y representado en los siguientes diagramas, las frecuencias relativas de los resultados de lanzar un dado correcto" (Texto [I], p. 229).

"3. El espacio muestral asociado al experimento aleatorio "lanzar al aire dos monedas indistinguibles y observar el resultado" es:

E = {(c,c), (c,f), (f,c), (f, f)}" (Texto [A], p. 41).

La equiprobabilidad de los distintos resultados se conceptualiza también mediante el término *simétrico (simetría)*, que implica que es posible aplicar el principio de indiferencia, debido a las propiedades físicas del objeto. o, por el contrario, se introducen adjetivos como *cargado* para indicar los dispositivos que no cumplen estos requisitos. Estas palabras del lenguaje ordinario adquieren así un significado específico dentro del tema de probabilidad.

"Un dado es una figura muy simétrica, a menos que esté preparado (cargado). Hay las mismas razones para esperar que, al lanzarlo al aire, salga el 5 que el 4" (Texto [I], p. 222).

A veces este término es sustituido por *irregular,* como en el siguiente ejemplo:

"Vamos a jugar con un dado, pero sospechamos que es irregular" (Texto [I] p. 252).

Conclusiones

El vocabulario usado con relación a la idea de aleatoriedad sirve para precisar las características atribuidas a este concepto, así como a la idea de experimento aleatorio y para describir diferentes generadores de resultados aleatorios.

Del análisis detallado de la tabla 4.3.1 observamos una mayor riqueza del lenguaje empleado para referirse a la aleatoriedad en el texto [I]. Por un lado, es mucho más variada la gama de adjetivos y expresiones usadas para describir este concepto. Por otro aparecen ejemplos de generadores aleatorios, como la chincheta, para cuyos resultados no puede aplicarse la regla de Laplace y que están, por tanto asociados a una concepción frecuencial de la probabilidad. Aunque en ninguno de los dos libros se introducen tablas de números aleatorios, el texto [I] se hace referencia a este concepto y se habla de la función random de los microordenadores.

Todo ello apunta a un mayor énfasis en este libro del concepto de aleatoriedad y experimento aleatorio, así como por la fenomenología del azar que en el texto [A].

4.3.3. SUCESOS, SUS TIPOS Y OPERACIONES

En segundo lugar hemos analizado el lenguaje específico sobre los sucesos y sus tipos, así como las operaciones entre los mismos, que se analizaron, desde el punto de vista teórico en la sección 2.3. y respecto a las actividades relacionadas con los mismos, en la sección 3.5.

La palabra *suceso*, calificado a veces como *aleatorio* para referirse a resultados posibles en los experimentos aleatorios, se encuentra en los libros de texto, aunque es sustituida a veces por otros sinónimos como *acontecimientos* o *resultados,* que se usan también con el mismo significado:

"La vida cotidiana está plagada de acontecimientos cuya realización es incierta" (Texto [I], p. 227).

Se habla también de *obtener* un suceso o de la *realización* del mismo, para destacar el hecho de que su ocurrencia no siempre es cierta, ya que esta es la principal característica de los sucesos aleatorios:

"¿Cuál es la probabilidad de obtener 5 al lanzar un dado?" (Texto [I], p. 239).

En la sección 2.3. analizamos cómo, para introducir el álgebra de sucesos, se realizan diferentes clasificaciones de los mismos. Para diferenciar los tipos de sucesos encontramos diferentes términos, como *elementales* o *sencillos*, que hace referencia a los sucesos que constan de un único elemento:

"U*na vez que se tienen la probabilidad de sucesos sencillos, elementales*" (Texto [I], p. 223).

Tabla 4.3.2. Lenguaje utilizado en relación con los sucesos aleatorios

Texto [I]	Texto [A]
Acontecimientos	Acaecimiento (de un suceso)
Realización (de un suceso)	Conjunto
Resultados favorables	Conjunto complementario
Resultados posibles	Conjunto universal
Obtener (un resultado)	Elemento de un conjunto
Sucesos	Espacio muestral
Sucesos aleatorios	Espacio de sucesos
Sucesos contrarios	Espacio de sucesos elementales
Sucesos elementales	Intersección de conjuntos
Sucesos equiprobables	Intersección de sucesos
Suceso raro	Pertenecer (o no) a un conjunto
Sucesos sencillos	Presentado (un suceso)
	Resultados (de un juego)
	Subconjunto
	Subconjuntos unitarios
	Suceso
	Sucesos contrarios
	Suceso elemental
	Suceso imposible
	Sucesos incompatibles
	Suceso seguro
	Unión de conjuntos
	Unión de sucesos
	Verificarse (un suceso)

El conjunto de todos los sucesos elementales constituye el *espacio muestral.* Este término es introducido en el texto [A], y equiparado a la idea de *conjunto* que es también otro vocablo asociado al espacio muestral:

> "*De esta forma, a cada experimento aleatorio viene asociado un conjunto básico de sucesos elementales al que se llama su espacio muestral, que se representa por la letra E*" (Texto [A], p. 40).

Considerado el espacio muestral como un conjunto, se emplea la idea de *subconjunto* para designar a los sucesos, como parte del espacio muestral, lo que permitirá después aplicar las operaciones de conjuntos y sus propiedades al álgebra de sucesos:

> "*Si E es el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio todo subconjunto M de E es un suceso*" (Texto [A], p. 41).

Otros términos asociados a los sucesos, con relación al cálculo de probabilidades son los de *"favorables", "posibles"*. Estos términos los encontramos al estudiar la asignación de probabilidades mediante la regla de Laplace y el primero de ellos se refiere a los sucesos elementales que componen el suceso cuya probabilidad queremos calcular, mientras el segundo indica todos los componentes del espacio muestral.

En el caso del texto [A] que corresponde al inicio del período de implantación de la Ley del 70, y donde la influencia de la teoría de conjuntos es manifiesta, se incluye también la terminología conjuntista que es utilizada para la introducción del álgebra de sucesos. Así encontramos al principio del tema la siguiente revisión en que se recuerda esta tema:

> *"Sean dos conjuntos A y B, subconjuntos de un conjunto E universal.*
> *Se llama unión de A y B al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos. Se representa por* $A \cup B$*, y se lee: "A unión B".*
> *Se llama intersección de los conjuntos A y B al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y (simultáneamente) a B. Se representa por* $A \cap B$ *y se lee "A Intersección con B".*
> *Se llama complementario de A respecto a E (universal) al conjunto formado por todos los elementos de E que no pertenecen a A. Se representa por* $C_E A$*, o bien por* $\bar{A}$*."* (Texto [A], p. 40).

Asimismo se introducen las ideas de *suceso seguro, imposible, sucesos incompatibles y contrarios*:

> *"Sea E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio; el suceso definido por E (considerado como subconjunto de sí mismo) se llama suceso seguro.*
> *Sea E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio; y sea M un suceso de E; se llama suceso contrario de M al que está formado por todos los sucesos elementales que no son de M.*
> *Sea E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y A, B dos sucesos; si al realizar una prueba es imposible que se obtengan simultáneamente ambos, se dice que son sucesos incompatibles.*
> *El suceso contrario al suceso seguro E es un suceso imposible o suceso que nunca se verifica al realizar un experimento aleatorio"* (Texto [A], p. 42).

Conclusiones

Como consecuencia del análisis, observamos una mayor riqueza de vocabulario en la referencia a los sucesos sus tipos y operaciones en el texto [A] debido a que en él se introduce la idea de conjunto y sus operaciones y se utiliza esta idea en la definición de espacio muestral, sucesos, sus tipos y operaciones.

Resaltamos el hecho de que el tipo de vocabulario que añade el texto [A] sobre el existente en el libro [I] indica, por un lado, un mayor nivel de abstracción en la presentación del tema, por el énfasis que se hace en la teoría de conjuntos y los aspectos estructurales del cálculo de probabilidades.

Por otro lado, muchos de estos vocablos son también usados en la vida ordinaria aunque con un significado no totalmente acorde al que se le da en el tema de probabilidad, lo que podría significar una dificultad añadida para los alumnos que usan estos libros de texto.

4.3.4. FRECUENCIA RELATIVA. DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Los vocablos relacionados con este concepto son muy numerosos y podemos clasificarlos en varios tipos, según se refieran a su cálculo, los diferentes tipos de frecuencias o la convergencia de la frecuencia a la probabilidad.

En este apartado analizamos las expresiones referidas a la idea de frecuencia, la diferencia entre frecuencia absoluta y relativa y el cálculo de ellas. Se describe la idea de *frecuencia absoluta* comenzando por la de *colectivo o población* de objetos bajo estudio sobre el cual tomamos *datos (observaciones)* sobre la *presencia o ausencia* de una cierta *característica*:

"*Se ha observado la presencia (SÍ) o ausencia (NO) de la característica buscada*" (Texto [I], p. 233).

A partir de la frecuencia absoluta obtenemos las *frecuencias relativas:*

"*Calcula la frecuencia relativa con la que aparece la característica básica buscada, acumulando los datos de las sucesivas cosechas*" (Texto [I], p. 225).

También se sustituye a veces el término frecuencia por el de *proporción:*

"¿Qué proporción de empleados cumple estos dos requisitos?" (Texto [I], p. 225).

Tabla 4.3.3. Lenguaje utilizado en relación con las frecuencias relativas

Texto [I]	Texto [A]
Acumular (las frecuencias)	Distribución de frecuencias relativas
Amortiguación (de las oscilaciones de las frecuencias)	Frecuencia
Aproximar, aproximación	Frecuencia absoluta
Característica (presencia, ausencia)	Frecuencia acumulada
Colectivo	Frecuencia relativa
Dato	
Diagrama (de frecuencias)	
Distribución de frecuencias relativas	
Estadístico (estudio)	
Frecuencia absoluta	
Frecuencia esperada	
Frecuencia obtenida	
Frecuencia relativa	
Frecuente (poco)	
Leyes del azar	
Ley de los grandes números	
Oscilaciones (de la frecuencia)	
Porcentaje	
Proporción	
Regularidad (condiciones de la experiencia, tendencias)	
Representar (las frecuencias)	
Separarse (de la distribución esperada)	
Sucesivas (pruebas)	
Tablas de frecuencias relativas	
Tendencias	

a) Idea de frecuencia, su cálculo y sus tipos:

Otro valor deducido de las frecuencias es el *porcentaje,* aunque ahora se precisan cálculos intermedios:

> *"¿Qué porcentaje hay en el cajón de calcetines de cada color?"* (Texto [I], p. 239).

Hablamos también de *distribución de frecuencias relativas* para el conjunto de valores obtenidos en una variable estadística, junto con sus frecuencias relativas respectivas. Estas distribuciones las *representamos* en *diagramas* o expresamos mediante *tablas:*

> *"Haz una tabla de frecuencias relativas"* (Texto [I], p. 239). *"Haz la distribución de frecuencias relativas"* (Texto [I], p. 239).

En el texto [A], dentro del capítulo de probabilidad, solo aparecen algunos ejemplos y las definiciones de frecuencia absoluta y de frecuencia relativa, así como las propiedades de ésta última. Observamos que aunque en los cálculos utiliza la fórmula de las frecuencias relativas, al enunciar las propiedades solo habla de frecuencias, sin diferenciar entre frecuencia absoluta y relativa. Se preocupa también más por las propiedades formales de la frecuencia que por el método de cálculo en aplicaciones prácticas:

> *"La frecuencia de la unión de dos o más sucesos incompatibles es igual a la suma de las frecuencias de esos sucesos"* (Texto [A], p. 46).

Es en el capítulo siguiente denominado *"Variable estadística. Medidas de posición central. Medidas de dispersión",* donde se menciona la distribución de frecuencias relativas y se define la frecuencia acumulada:

> *"El conjunto de valores que toma una variable estadística, con sus respectivas frecuencias relativas, se llama una distribución de frecuencias"* (Texto [A], p. 59).

b) Convergencia de la frecuencia a la probabilidad

Un segundo grupo de términos se relaciona con la convergencia de la frecuencia a la probabilidad. Así se hace mención a que en la frecuencia relativa se producen *oscilaciones.* A partir de *sucesivas pruebas* y *acumulando* sus resultados se observa una *amortiguación* de estas oscilaciones, como se expresa en el siguiente párrafo:

> *"Las observaciones anteriores (amortiguación progresiva de las oscilaciones en cada curva y su <u>tendencia</u> de todas ellas hacia el valor 1/6) se aprecian ahora con mayor claridad"* (Texto [I], p. 236).

En la repetición de un experimento aleatorio un número suficientemente grande de veces, puede aparecer unas condiciones de *regularidad* de las experiencias: *"regularidades en situaciones completamente aleatorias"* (Texto [I], p. 234), condiciones de regularidad que quedan implícitas sin que lleguen a especificarse:

> *"Hay ocasiones en que la experiencia aleatoria que se va a realizar tiene unas condiciones de regularidad tales que podemos tener a priori (antes de hacer ninguna experiencia) la distribución esperada"* (Texto [I], p. 231).

La *ley del azar* o *ley de los grandes números* establece esta *aproximación.* Diferenciamos las *frecuencias esperadas* y las frecuencias obtenidas, que se *separan*, aunque no excesivamente de las primeras:

> *"La frecuencia relativa de un suceso se va aproximando más y más a la frecuencia relativa esperada (su probabilidad)"* (Texto [I], p. 237).

"Observa que la distribución de 240 lanzamientos se separa menos de la distribución esperada" (Texto [I], p. 229).

Finalmente hemos observado el adjetivo *frecuente* usado en algunas ocasiones para calificar la ocurrencia de un cierto suceso:

"E*s un suceso raro, poco frecuente*" (Texto [I], p. 227).

En el texto [A], en el capítulo de estadística, menciona la posibilidad de repetir indefinidamente un experimento aleatorio, para definir población y muestra, pero no menciona nada sobre la convergencia de las frecuencias relativas:

"Puesto que el experimento aleatorio se puede prolongar indefinidamente, la población, P, es, en este caso, infinita" (Texto [A], p. 58).

Conclusiones

Es notable la diferencia de vocabulario específico sobre las frecuencias relativas en los dos libros de texto analizados, que sugiere un significado muy diferente del concepto presentado al alumno.

La explicación está en que el texto [A] no hace un estudio explícito de la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad, puesto que las únicas concepciones presentadas de la probabilidad explícitamente son la laplaciana y la formal. Hay en este libro una desconexión total entre estadística y probabilidad, a pesar de que se indica en la introducción que los resultados de los juegos de azar están sustancialmente de acuerdo con las probabilidades a priori, es decir, se hace una alusión implícita a la probabilidad como modelo matemático que representa adecuadamente los fenómenos estadísticos.

Es notable también que en este libro de texto se hace un estudio muy detallado, tanto de la frecuencia relativa y sus propiedades (sección 4.5), excluida la convergencia, como de los axiomas de probabilidad y sus consecuencias (secciones 4.6 y 4.7). Vemos que estas secciones son consecutivas. Las propiedades de las frecuencias relativas se demuestran con todo detalle. Sin embargo la probabilidad se introduce de forma axiomática y no se indica la razón por la cual se toman estos axiomas (paralelos a las propiedades de las frecuencias) y no otros.

4.3.5. PROBABILIDAD

Hemos encontrado, asimismo, una gran variedad en el vocabulario usado para referirse a la idea de probabilidad y su asignación a los sucesos, para graduar las probabilidades de distintos sucesos o para referirse a diferentes tipos de probabilidades. Este vocabulario se presenta en la tabla 4.3.4.

a) Concepto, interpretación, tipos de probabilidad, concepciones

Un primer grupo de vocablos y expresiones se refiere al concepto de *probabilidad* y a su interpretación, que reviste diversos matices que indican la concepción de probabilidad subyacente. Hemos encontrado, por ejemplo, una acepción de probabilidad como *confianza* personal en la realización de un suceso, que se ajustaría a la concepción subjetiva de la probabilidad:

"Si el hombre del tiempo nos dijera que la probabilidad de que mañana esté despejado es del 80 por ciento, querría significar que, de 100 días con las circunstancias meteorológicas observadas hoy, el día siguiente, en 80 de los 100 casos, se ha presentado despejado.

Como ves, no te quita las dudas de lo que vaya a pasar mañana, pero no por eso la información deja de serte útil. Puedes preparar tu excursión con bastante confianza de que no será pasada por agua" (Texto[I], p. 222).

Tabla 4.3.4. Lenguaje utilizado en relación con la probabilidad

Texto [I]	Texto [A]
"A priori"	Aplicación
Asignar (probabilidad)	"a priori"
Apuestas (acertar)	Asignamos (probabilidad)
Cálculo (de la probabilidad)	Cálculo matemático (de la probabilidad)
Casi seguro	Ganar (probabilidad de)
Chances	Grado de confianza
Combinatoria, combinatorio	Igualmente posibles
Confianza	Igual probabilidad
Grado de incertidumbre	Juicio de credibilidad
Grado de inseguridad	Juicio de probabilidad
Equiprobable	Número no negativo
Estimar	Posible (resultado)
Igualmente probables	Probabilidad
Imposible (casi imposible)	Probable
Ley de Laplace	
Medir (la probabilidad)	
Odds	
Permutación	
Probable (muy, muy poco, poco, medianamente)	
Probabilidad	
Probabilidad experimental	
Probabilidad teórica	
Probabilístico (conocimiento, estudio)	
Posibilidad (mayor, menor)	
Seguro, asegurarnos	
Simetría	
Suceso raro (muy)	
Triángulo combinatorio	

En otros casos, la probabilidad se interpreta como *grado de incertidumbre o inseguridad,* aunque esta vez no queda claro si este es un grado subjetivo (dependiente de cada persona en particular) u objetivo (asociado al suceso en cuestión):

"El grado de incertidumbre es mayor o menor en cada caso" (Texto [I], p. 227) o *grado de inseguridad*: *"La probabilidad es la parte de las matemáticas que trata de manejar con números la incertidumbre (grado de inseguridad)"* (Texto [I], p. 223).

En la definición anterior se hace referencia al carácter numérico de la probabilidad. El texto [A], al introducir la definición axiomática de la probabilidad, utiliza los *números* para definirla de la siguiente forma:

"1. A cualquier suceso $S \in B$ se le puede asociar un número no negativo p(S) que se llama probabilidad de dicho suceso" (Texto [A], p. 47).

La palabra probabilidad se toma también como sinónimo de *posibilidad (mayor, menor),* aunque matemáticamente estos dos términos no son estrictamente equivalentes:

"¿Cómo se mide la mayor o menor posibilidad de que ocurra algo que no es seguro?" (Texto [I], p. 227).

Por otro lado, se diferencia entre *probabilidad teórica* o *"a priori",* que es la que viene dada por el cálculo matemático de probabilidades y *probabilidad experimental,* que es la obtenida a partir de las frecuencias relativas de resultados experimentales:

> *"Podrás decir que la probabilidad experimental de que la chincheta quede con la punta hacia arriba es 30/100"* (Texto [I], p. 241).

En el texto [A] incluso se menciona explícitamente estas diversas interpretaciones del término "Probabilidad":

> *"Sin embargo, en cada caso nos referimos a un tipo diferente de juicios de "probabilidad". Así, el primero es un ejemplo de lo que podríamos llamar juicio de probabilidades "a priori" y está relacionado con el cálculo matemático de probabilidades; el segundo es un ejemplo de lo que, a falta de mejor expresión, llamaríamos un juicio de credibilidad, y es una medida del grado de confianza que tenemos en la verdad de un cierta afirmación o en el acaecimiento de determinado suceso"* (Texto [A], p. 39).

Otro termino introducido en el texto [I] que guarda relación con el concepto de probabilidad es el de *odds* o *chances,* que no suele ser muy utilizado en los libros de texto, por lo que posiblemente el autor ha preferido no traducir esta palabra al castellano, donde podría usarse "posibilidades" para estos términos:

> *"En el mundo anglosajón, tal vez por la afición de las apuestas, en lugar de hablar de la probabilidad de un suceso A, hablan muy a menudo de las"odss in favour of A", que expresaremos en castellano, para evitar confusiones con probabilidad, aunque tal vez de un modo no muy ortodoxo, las chances a favor de A"* (Texto [I], p. 254).

En el texto [A], hemos encontrado un ejercicio donde se propone un juego y se pregunta cuál es la probabilidad que tiene un jugador de ganar:

> *"81. A y B juegan a cara y cruz con las siguientes condiciones: Si la primera vez sale cara gana A; mas si esto no sucede, se juegan otras dos, y si en las dos sale cara, gana A también. ¿Cuál es la probabilidad que tiene B de ganar?* (Texto [A], p. 54).

Por último, los textos emplean también el adjetivo *probabilístico* para calificar las situaciones en que se emplea el cálculo de probabilidades:

> *"Pero incluso el conocimiento físico de los últimos elementos constituyentes de la materia es también probabilístico"* (Texto [I], p. 224).

b) La probabilidad como función y asignación de sus valores

En el apartado anterior hemos analizado los términos que aluden a la probabilidad como valor numérico, como medida, con diversas variantes. Donde aparece claramente el concepto de probabilidad como función es en el texto [A], que concluye la definición axiomática de la probabilidad así:

> *"El conjunto formado por el espacio muestral E, el conjunto de sucesos y la aplicación p se llama espacio probabilístico y se representa por (E, B, p)"* (Texto [A], p. 47).

Además de los términos que se refieren al concepto, hemos encontrado un vocabulario bastante variado en lo que se refiere a la forma de asignar o calcular probabilidades. Se usan a veces como sinónimos palabras que podrían tener un significado diferenciado, como *asignar* (probabilidad), *calcular o medir*. Por otro lado este último término tiene un carácter ambiguo que podría llevar al alumno a confusión, debido a la diferencia que toma respecto al significado de "medir" en otros contextos, donde implica una acción física empleando instrumentos de medida:

> *"Asigna tú mismo la probabilidad"* (Texto [I], p. 241), *cálculo* (de la probabilidad), *medir* (la probabilidad): *"Vamos a intentar medir la probabilidad de algunos sucesos al lanzar un dado"* (Texto [I], p. 243).

El procedimiento empleado para realizar estos cálculos puede basarse en la c*ombinatoria,* o ser de tipo *combinatorio,* o emplear el *triángulo combinatorio.* Se hace también referencia, como método de cálculo a la *ley de Laplace:*

> *"Esta fórmula de cálculo, llamada "Ley de Laplace" se suele expresar así"* (Texto [I], p. 244).

Para poder aplicar esta fórmula se exigen condiciones de *simetría*:

> "*En el dado, en la moneda, en la ruleta,..., la simetría de la situación nos conduce a un cálculo directo de la probabilidad teórica de los sucesos correspondientes"* (Texto [I], p. 241).

Todos estos vocablos evocan el enfoque clásico de la probabilidad. En otros casos se alude a que los sucesos son *"igualmente posibles":*

> *"Enumerar los casos igualmente posibles del experimento aleatorio que consiste en tirar dos dados a la vez"* (Texto [A], p. 54).

En caso de emplear una aproximación frecuencial, se habla de *estimar* la probabilidad:

> *"Al final estimamos que la probabilidad de cada suceso elemental es*" (Texto [I], p. 252).

Finalmente el término *apuestas* puede evocar una asignación de tipo subjetiva:

> *"Las primeras consideraciones matemáticas profundas a propósito de los juegos de azar y de las apuestas*" (Texto [I], p. 223).

c) Graduación de probabilidades

Los libros de texto emplean diferentes vocablos para expresar de modo cualitativo una graduación de la probabilidad de los diferentes sucesos. De este modo, hemos encontrado los siguientes vocablos, que hemos ordenado según la mayor o menor probabilidad implicada: *Seguro, asegurarnos, casi seguro, probable (muy, muy poco, poco, medianamente), equiprobable, igualmente probables, suceso raro (muy), imposible (casi imposible):*

> *"La probabilidad es el número de resultados favorables m, dividido por el número de resultados posibles n, supuesto que éstos sean equiprobables"* (Texto [I], p. 222).

La única mención que hemos encontrado en el texto [A] sobre este aspecto la realiza en la introducción, donde afirma:

> *"En el lenguaje ordinario se usan palabras como probabilidad, probables, ..., al referirnos a determinados sucesos. Así, por ejemplo, se habla de la probabilidad de obtener dos seises al lanzar sobre una mesa dos dados. De que es probable que determinado país consiga la medalla de oro en la prueba de los 100 metros masculinos, en las próximas Olimpiadas"* (Texto [A], p. 39).

Conclusiones

De nuevo la riqueza de vocabulario es mucho mayor en el texto [I]. En el texto [A] no aparecen gradaciones cualitativas de las probabilidades de los sucesos, sino simplemente valores numéricos de las mismas. Se aísla así el trabajo de probabilidades realizado en el aula del uso del mismo en la vida diaria donde con frecuencias hacemos valoraciones del tipo "muy probable", "bastante posible", etc. para referirnos a la verosimilitud de un cierto suceso aleatorio.

No hay tampoco alusión a modos diferentes de obtener los valores de probabilidad, diferentes del "cálculo matemático", puesto que las concepciones subjetivas y frecuencial de la probabilidad no se presentan en el texto. Por consiguiente, no hay referencia a la "estimación" o "asignación subjetiva" de probabilidades. Tampoco se presenta la distinción entre "probabilidades teóricas" y "experimentales", confirmando la falta de conexión entre este tema y el estudio de la estadística. Finalmente, no hemos encontrado tampoco conexión con el tema de combinatoria, puesto que, a pesar de que la mayor parte de los problemas se deben resolver usando conceptos combinatorios, no hay referencias explícitas ni vocabulario o notación que indique esta conexión.

4.3.6. PROBABILIDAD CONDICIONAL, DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA, EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Debido a la menor profundidad y extensión con que son tratados estos conceptos en los libros de texto, el vocabulario encontrado ha sido mucho más limitado. Presentamos el vocabulario encontrado en la tabla 4.3.5.

a) Experimentos compuestos

En los libros hemos encontrado la expresión de *composición de experimentos* para referirse al experimento compuesto y se habla también de *experiencias compuestas* para referirse al producto de experimentos*:*

> *"En una experiencia compuesta, ¿será más fácil calcular las probabilidades estudiando por separado las distintas experiencias de que se compone?"* (Texto [I], p. 247) *o composición (de experimentos)": Podemos considerar este experimento como la composición de otros dos" (Texto [I], p. 247).*

Para construir estos experimentos compuestos se establecen diferentes condiciones, como *devolver (a la bolsa):*

> *"Sacamos una bola al azar. La miramos y la devolvemos a la bolsa"* (Texto [I], p. 250).

O bien realizar los dos experimentos *simultáneamente:*

> *"Sacamos simultáneamente cuatro naipes de una baraja"* (Texto [I], p. 251).

Sobre estas experiencias calcularemos las *probabilidades compuestas* o probabilidades de los sucesos resultantes en el nuevo espacio muestral del experimento compuesto. El cálculo se simplifica con frecuencia con ayuda del *diagrama en árbol:*

"Los diagramas en árbol, que ya estudiamos en combinatoria, son muy útiles para el cálculo de probabilidades compuestas" (Texto [I], p. 248).

Queremos también indicar que en el texto [A], aunque aparecen ejemplos y ejercicios similares, no se menciona la expresión experimento compuesto.

Tabla 4.3.5. Lenguaje utilizado en relación con la probabilidad condicional, experimentos compuestos, dependencia e independencia

Texto [I]	Texto [A]
Composición (de experimentos) Dependiente (experiencias, sucesos) Devolver (a la bolsa) Diagrama en árbol Experiencias compuestas Independiente (suceso, experiencia) Probabilidades compuestas Simultáneamente	Dependiente (suceso) Frecuencia condicionada Fórmula de Bayes Independiente (suceso) Probabilidad condicionada Probabilidad compuesta (fórmula) Suceso condicionado

Dependencia/independencia

Es muy limitado el vocabulario que hace referencia a la idea de dependencia o independencia, lo que indica el escaso papel que a este concepto se da en los libros analizados. Los textos diferencian entre experiencias, o sucesos *dependientes o independientes:*

> *"También son experiencias dependientes el extraer tres cartas de una baraja"* (Texto [I], p. 250).
> *"Naturalmente la responsabilidad y la competencia son independientes del sexo"* (Texto [I], p. 225).

Probabilidad condicional

Otra parte del vocabulario está relacionado con la idea de *probabilidad condicional,* donde hemos encontrado los términos de *frecuencia condicionada, la fórmula de Bayes* e incluso un término incorrecto que es el de *suceso condicionado* que, como vemos de la definición que se ofrece no se diferencia de la intersección de sucesos:

> *"Entonces, al suceso consistente en que se cumpla B (obtener bola blanca) habiéndose cumplido A, se llama suceso B condicionado a la verificación del suceso A, y se escribe: B/A"* (Texto [A], p. 51).

Conclusiones

El vocabulario referido a estos conceptos es mucho menos rico que en los casos anteriores, y similar en su extensión en los dos libros analizados. A pesar de ello hemos encontrado diferencias entre los dos libros analizados.

En el texto [A] aparecen referencias explícitas a la probabilidad condicionada, la frecuencia relativa condicionada e incluso a una supuesta operación entre sucesos que daría lugar al "suceso condicionado", término inexistente en la teoría matemática formal de probabilidades. También se hace referencia al teorema de Bayes, aunque se pierde la ocasión de hablar de la diferencia entre probabilidades a priori y a posteriori, dentro del marco bayesiano.

Por su parte, en el texto [I] se menciona explícitamente la composición de experimentos o experiencias compuestas. Aunque en ambos libros de habla de probabilidades compuestas sólo el primero indica su conexión con el experimento compuesto.

Vemos por tanto que el conjunto del vocabulario incluido en los dos libros comparados cubre todos los conceptos que hemos incluido en este apartado, excepto el teorema de la probabilidad total. Sin embargo, cada uno de ellos presenta una parte del mismo, que corresponde a un significado parcial de este grupo de conceptos.

4.3.7. VARIABLE ALEATORIA. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Debido a la escasa presencia de este concepto en los libros, el vocabulario encontrado ha sido muy limitado. Presentamos este vocabulario en la Tabla 3.3.6.

Tabla 4.3.6. Lenguaje utilizado en relación con la variable aleatoria

Texto [I]	Texto [A]
Distribución (esperada, empírica) Esperar (un resultado) Reparto equitativo Reparto justo Término medio	Distribución de probabilidad

Hablamos de la *distribución* de la variable como el conjunto de sus valores con sus probabilidades respectivas, diferenciándose entre *distribución esperada y empírica.* La primera hace referencia a la distribución de la variable aleatoria y la segunda a la de la variable estadística asociada.

El texto [A], dentro del capítulo de estadística, es el único que utiliza explícitamente la expresión variable aleatoria, y en un ejemplo consistente en lanzar un dado diez veces y anotar los resultados, concluye generalizando de la siguiente forma:

> *"El conjunto de valores que puede tomar una variable aleatoria, juntamente con sus probabilidades respectivas, se llama una distribución de probabilidad"* (Texto [A], p. 60).

Observamos que dicho texto no distingue entre variable estadística y variable aleatoria, sino que las utiliza indistintamente.

El concepto de media aparece reflejado en palabras como *esperar (un resultado), reparto equitativo,* o *reparto justo:*

> *"¿Cómo repartir de un modo justo y equitativo las 20.000 pts?"* (Texto [I], p. 223).

También hemos encontrado la expresión *término medio:*

> *"Ocurre, por término medio, una de cada seis veces que se intenta"* (Texto [I], p. 227).

Conclusiones

Como hemos explicado anteriormente, en general en todos los textos es escasa la presencia de vocabulario relacionado con este concepto, aunque en el texto [I] de forma implícita, se hace un estudio amplio cuando se refiere a la distribución teórica y empírica. En el texto [A], como hemos indicado es el único que hace una mención explícita a variable aleatoria, pero lo hace en el capítulo de estadística y lo usa indistintamente con el concepto de variable estadística, sin explicar claramente la diferencia existente entre estos dos conceptos.

4.4. NOTACIONES SIMBÓLICAS EMPLEADAS

El segundo tipo de representaciones analizadas en los libros son las notaciones simbólicas empleadas, que revisten gran importancia, desde nuestro punto de vista, por tratarse de un elemento característico del lenguaje matemático. Según Socas y cols. (1984), para algunos autores la matemática es vista como un lenguaje, aunque no para otros. Pero sí está admitido con generalidad que la matemática ha desarrollado una sintaxis y un vocabulario propios, aunque sus símbolos y terminología no sean exclusivos de la matemática.

Las notaciones no sólo se emplean para representar los conceptos sino para realizar operaciones con los mismos o razonamientos empleados para la resolución de los problemas. Rothery (1980) afirma que el rasgo más característico y llamativo del lenguaje matemático son los símbolos, que constituyen una forma abreviada y precisa para denotar conceptos o proposiciones. El simbolismo juega un papel potente, porque permite una comunicación comprimida entre individuos que pueden dar un significado a los símbolos. La necesidad de trabajar a un alto nivel de complejidad sólo puede resolverse mediante una compresión del conocimiento en la que el simbolismo juega un papel central (Tall, 1993). La habilidad de algunos símbolos para trabajar dualmente, evocando bien un proceso de cálculo de un resultado, o un objeto que puede manejarse en un ámbito superior es particularmente adecuado para reducir el esfuerzo cognitivo. Este uso ambiguo del símbolo como proceso y objeto permite al experto saltar de una cognición a otra. Pero puede causar una gran dificultad al estudiante en sus primeras etapas. Así el informe Cockroft (1985), considera que las matemáticas constituyen un poderoso medio de comunicación, para lo cual necesita hacer uso de la notación simbólica, pero *esto "puede también hacer las matemáticas difíciles de entender y usar"* (p. 4).

Skemp (1980) diferencia las siguientes funciones de los símbolos matemáticos: Comunicación, registro del conocimiento, formación de nuevos conceptos, confección de clasificaciones múltiples correctas, explicación, facilitar la actividad reflexiva, mostrar estructuras matemáticas, automatizar las manipulaciones rutinarias, recuperar información de la memoria y actividad creativa.

Puesto que un concepto no puede observarse directamente, usamos medios audibles o visibles -palabras habladas o escritas o símbolos- conectados mentalmente a una idea, que es el significado del símbolo. Una vez que el mismo concepto está conectado al mismo símbolo en la mente de dos personas, la expresión por una de ellas del símbolo, puede evocar en la otra el concepto dado. Sin embargo, a veces el significado de un símbolo no es compartido por las personas, lo que dificulta la comunicación de las ideas.

En el caso de la enseñanza de un concepto matemático, los alumnos pueden desconocer a qué nos referimos cuando usamos determinados símbolos. Por ello, deberíamos elegir nuestros símbolos con cuidado y precisión, a fin de no producir dificultad o errores en la comunicación de las ideas. Esta función de comunicación es enfatizada en los estándares del N.C.T.M. (1989) donde se indica que la comunicación juega un papel fundamental al permitir a los alumnos construir vínculos entre sus nociones intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas. Cumple también una función clave en el establecimiento de conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas.

Otro fin muy importante de los símbolos es automatizar las manipulaciones rutinarias. Si hemos de progresar en matemáticas, los procesos elementales deben automatizarse para poder concentrar la atención en lo que se está aprendiendo. Esto se hace, según Mialaret separando los símbolos de sus conceptos asociados y manipulándolos de acuerdo con hábitos adquiridos, sin atender a sus significados. Aunque, en cualquier momento, podemos volver a reasignar significados a los símbolos.

Sin embargo, el uso apropiado de la notación matemática reviste especial dificultad. Los significados de estos símbolos suelen variar según su disposición espacial, lo que suele representar un problema para los niños porque no son siempre usados consistentemente. Otro problema es que la lectura del simbolismo matemático no siempre procede de izquierda a derecha (Dickson y cols., 1991). Si el lenguaje matemático es un instrumento indispensable y precioso para el adulto, constituye uno de los obstáculos importantes para el razonamiento del principiante y estas dificultades tienen repercusiones tanto en el plano de la inteligencia como en el afectivo, según Mialaret (1977). Las investigaciones didácticas señalan claramente la disociación que existe entre el reconocimiento de la palabra y su utilización correcta. Esta distinción corresponde a lo que Mialaret denomina comprensión pasiva (reconocimiento) y comprensión activa (evocación y utilización) del lenguaje matemático.

A continuación describimos los diferentes tipos de notaciones encontrados en el tema de probabilidad en los dos libros analizados que contribuyen a mostrar la complejidad y riqueza de los elementos notacionales de los conceptos probabilísticos elementales, así como la variabilidad observada en los textos analizados.

Letras

El uso de letras como variables es característico de la actividad algebraica, dentro de las ecuaciones como incógnitas y como parámetros o variables en las funciones matemáticas. Este uso algebraico de las letras permite operar con ellas en un sentido general, en lugar de restringirse a valores particulares de las operaciones que se realizan con estos símbolos.

En nuestro estudio hemos encontrado un uso característico de las letras en el tema de probabilidad para representar sucesos o elementos del espacio muestral, lo que luego permitirá aplicar a las mismas las operaciones conjuntistas, como en el caso siguiente

"*Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, la probabilidad de que ocurra el suceso S_1 en la primera experiencia y S_2 en la segunda y,...y S_n en la n-ésima es:*
$p(S_1$ y S_2 y ... y $S_n)=p(S_1).p(S_2).\, p(S_n)$ " (Texto [I], p. 249).

En el texto [A], suele utilizar letras mayúsculas para designar los sucesos:

"Llamando a dichos sucesos A, B, C, D, … tenemos así el espacio de sucesos, al que denominaremos B (ver figura 18). B= {A, B, C, D, ….}" (Texto [A], p. 45)

En otros casos utiliza letras minúsculas también para designar sucesos:

"El obtener una cara y una cruz o una cruz y una cara es el suceso M formado por los sucesos elementales (c, f), (f, c): M = {(c, f), (f, c)}" (Texto [A], p. 41)

También se usan las letras simplemente para designar abreviadamente palabras, lo que podría inducir a una confusión con los sucesos correspondientes. Sin embargo Pimm (1987) indica que es bastante usual en la notación algebraica elegir la letra que se utiliza como símbolo, de modo que no sólo sirve de enlace con el objeto que representa, sino con la palabra misma que designa el objeto, por lo que suele elegirse la inicial de la palabra. Así, en el siguiente ejemplo, se emplean letras para representar los colores de las bolas contenidos en las bolsas:

"*Un juego: tenemos dos bolsas cada una con 100 bolas entre blancas B, negras N y rojas R*
bolsa 1: 7B y 3N
bolsa 2: 1B, 2N y 7R" (Texto [I], p. 223).

Fracciones

La notación de fracción es ampliamente usada, como fracción numérica para representar valores de probabilidad. Esta representación no sólo indica el valor numérico del resultado, sino que remite a la fórmula de cálculo empleada en su obtención y sirve para reforzar en el alumno esta regla:

"*La probabilidad de que salga cara es 1/2*" (Texto [I], p. 224).

En otros casos se usan fracciones para expresar fórmulas de cálculo de probabilidades genéricas, lo que es muy frecuente al aplicar la regla de Laplace. Dentro de estas fórmulas encontramos dos variantes. En un caso se usa el lenguaje ordinario o abreviado para referirse a los términos de la fracción, como en el ejemplo siguiente:

" *Es decir,*

$$frecuencia\ relativa\ de\ A = \frac{frecuencia\ absoluta\ de\ A}{n^{o}\ total\ de\ pruebas}$$ " (Texto [A], p. 45).

En otros casos los términos de la fracción son indicados mediante expresiones simbólicas:

"$f_r\ (A \cup B) = \frac{n_1 + n_2}{N} = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} = f_r\ (A) + f_r\ (B)$" (Texto [A], p.46).

Notación decimal

Es también muy frecuente la *notación decimal* para expresar valores de las probabilidades, puesto que éstas varían entre 0 y 1. Destaca este uso en especial para denotar los resultados del cálculo de frecuencias relativas diversas o aproximaciones frecuenciales a la probabilidad:

"*f_r (negra)= 0.09= 0.9/10*" (Texto [I], p. 245).

En el texto [A] como hemos comentado en el apartado anterior, se utiliza generalmente las fracciones para expresar el resultado de la probabilidad de un suceso. Solo hemos encontrado un ejemplo en el que utiliza decimales para expresar dicho resultado:

"Sea A_1 el suceso día sin niebla y A_2 el suceso día con niebla y B el suceso ocurrir accidente (Figura 25 c).
Se tiene:

$$p(A_1) = \frac{18}{30} = 0{,}6 \qquad p(A_2) = \frac{12}{30} = 0{,}4$$ "(*Texto* [*A*], *p*. 54).

Otro símbolo habitualmente empleado en los libros es % para referirse al porcentaje

"*En una empresa hay un 65% de hombres y un 35% de mujeres*" (Texto [I], p. 251).

Subíndices y superíndices

En conexión con las tablas estadísticas es generalizado el empleo de *subíndices*, para designar una serie de valores de una variable estadística discreta y sus correspondientes frecuencias absolutas o relativas. El empleo del subíndice está indicando, implícitamente, la existencia de una correspondencia entre cada valor de la variable y su frecuencia, o bien de cada número natural (o un subconjunto de números naturales) y un par de valores (el valor de la variable estadística y su frecuencia), lo que puede resultar difícil al alumno si no está acostumbrado a esta notación que es principalmente usada en el estudio de las sucesiones numéricas. Como ejemplo, mostramos la siguiente tabla del texto [I], p. 229):

x_i	f_i
1	14
2	16
3	18
4	29
5	20
6	23
	120

En el texto [A], son también frecuentes los subíndices acompañando tanto a letras minúsculas como mayúsculas:

"El experimento aleatorio considerado da lugar a seis sucesos elementales incompatibles dos a dos, y tales que:
$E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$" (Texto [A], p. 48).

En el mismo texto en el enunciado de la fórmula de Bayes, también aparecen subíndices:

"Sean A_1, A_2, A_3, tres sucesos incompatibles asociados a un experimento aleatorio, tales que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E$, siendo E el espacio muestral o suceso seguro, y sea B un suceso cualquiera." (Texto [A], p. 53).

Estos subíndices son a veces dobles, en el contexto de las operaciones combinatorias, lo que aumenta la dificultad, pues el alumno debe diferenciar las funciones de cada uno de los subíndices, lo que en general no siempre ocurre, como Navarro-Pelayo (1994) puso de manifiesto en su investigación con alumnos incluso después del estudio de la combinatoria:

$$"C_{40,2} = \frac{40.39}{2}" \quad (\textit{Texto}\,[I],\ p.\,247)$$

Otras veces, se emplean *subíndices* combinados con *superíndices,* para denotar las operaciones combinatorias:

"6. *Calcula la probabilidad de obtener cuatro cruces al lanzar cuatro monedas.(Para el número de casos posibles recuerda, de combinatoria la fórmula de $VR^n{}_m$)"* (Texto [I], p. 246).

En el texto [A], aunque se trata la combinatoria en los primeros capítulos, no aparece ninguna mención en la parte teórica ni en los ejemplos al uso de la combinatoria. Por otro lado, no siempre hay consistencia en este uso de la notación y se emplean también subíndices para distinguir, por ejemplo, entre frecuencia relativa y absoluta:

" Si en 120 tiradas, el 6 ha salido 23 veces, la frecuencia relativa es
$f_r = 23/100 = 0.192$" (Texto [I], p. 229).

Finalmente, hemos encontrado también superíndices para referirse a la operación de exponenciación:

"*Ahora estás en condiciones de calcular la probabilidad de, al tirar 10 dados obtener 6 en los 10. Comprueba, ayudándote de tu calculadora que es del orden de $1,7 \times 10^{-8}$*" (Texto [I], p. 251).

En el texto [A], no aparecen superíndices.

Tabla 4.4.1. Notaciones empleadas en el tema de probabilidad en dos libros de texto

Texto [I]	Texto [A]
Decimales	Aplicación
Desigualdades	Decimales
Fracciones numéricas	Desigualdades
Fracciones (fórmulas)	Fracciones numéricas
Letras (notación algebraica)	Fracciones (fórmulas)
Letra "O", representando unión	Letras (notación algebraica)
Letra "Y", representando intersección	Letra "O", representando unión
Letras (representando sucesos)	Letra "Y", representando intersección
Letras (palabras abreviadas)	Letras (representando sucesos)
Notación funcional	Notación de aplicación
Pares ordenados	Notación conjuntista
Símbolo / como condicional	Notación funcional
Símbolo % como porcentaje	Pares ordenados
Subíndices	Símbolo / como condicional
Subíndices dobles	Subíndices
Subíndices con superíndices	
Superíndices	

Notación funcional

La notación funcional es práctica común para referenciar la probabilidad de un suceso o un valor de una variable aleatoria, puesto que en ambos casos estamos manejando funciones, aunque no funciones de variable real, sino funciones definidas sobre el álgebra de sucesos que toman valores reales. También en este caso encontramos diferentes graduaciones de abstracción en la notación. Así, en el texto [I], p. 243 encontramos *"p(3)", "p(as de bastos)", "p(as)"* e incluso *"p(no as)"* o *"p(no roja)"*, que, en realidad denotaría una función compuesta, puesto que, en primer lugar había que aplicar la operación de complementación a los sucesos considerados y posteriormente calcular su probabilidad:

"Vamos a intentar medir la probabilidad de algunos sucesos al lanzar un dado:

Sacar un 3	*p(3)*
Sacar par	*p(par)*
No sacar 3	*p(no 3)*
Sacar 3 ó 4	*p(3 ó 4)*

O al extrae una carta de una baraja:

p(as de bastos)
p(as)
p(bastos)
p(no as)

O al sacar una bola de una bolsa en la que hay 3 bolas rojas, 2 blancas y 5 negras:

p(roja)
p(no roja)

¿Qué razonamientos podemos hacer para calcular las probabilidades anteriores? ¿Y si el dado fuera incorrecto? ¿Y si a la baraja le faltaran varias cartas (sin saber cuáles)? ¿Y si no conociéramos la composición de la bolsa?" (Texto [I], p. 243).

Notación de aplicación

Esta es también una notación empleada en relación con las funciones, con la particularidad de que incorpora una nueva información que consiste en el conjunto original y final al que se refiere la aplicación. Hemos encontrado esta notación en el texto [A], como se muestra en el ejemplo siguiente:

"Sea el experimento aleatorio considerado en el apartado A de esta pregunta
La aplicación $p:B \rightarrow [0;\ 1]$ *cumple* $p\ (E)=1$*"* (p. 47).

Desigualdades

Pimm (1987) denomina logogramas a los símbolos especiales que no se utilizan fuera del contexto matemático. Además de los símbolos de las operaciones aritméticas hemos encontrado otros logogramas, como las desigualdades y la notación conjuntista. En relación con la comparación de probabilidades hemos encontrado a veces el símbolo >:

La probabilidad de perder es:

"Nuestro objetivo es ahora definir una aplicación del conjunto B en el conjunto de los números

$$p(perder) = 1 - p(ganar) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

$$Como\ \frac{8}{15} \rangle \frac{7}{15}\ resulta\ más\ probable\ perder\ que\ ganar\text{" (Texto [I], pg.249)}$$

comprendidos entre 0 y 1, de forma que a cada elemento de B le asigne un número x $(0 \le x \le 1)$*"* (Texto [A], p. 47).

Condicionamiento

El símbolo "/", se emplea en el contexto probabilístico para denotar el condicionamiento. Adquiere así un significado diferente del habitual en matemáticas, donde suele referirse a la operación de división. Aparece además un problema asociado, puesto que se suele incluir dentro del paréntesis que engloba el símbolo de probabilidad p. De este modo, se produce a veces la confusión de que el condicionamiento se refiere al suceso del cual se calcula la probabilidad (simple) y no a la probabilidad en sí misma:

"*Ahora las extracciones no son independientes, pues cada vez las bolas cambia su composición*
p (1ª B y 2ª R y 3ª V)= p (1ª B). p(2ª R/ siendo la 1ª B). p (3ª V/ siendo las anteriores B y R)" (Texto [I], p. 251).

Este símbolo es utilizado también por el texto [A].

Notación conjuntista

La hemos encontrado en el texto [A] donde es una de las que más aparecen, por el enfoque del tema excesivamente ligado a la teoría de conjuntos. Los siguientes ejemplos muestran esta presencia de la notación conjuntista a lo largo del tema:

"Considera los sucesos: A={2,4,6} (obtener un número par).
B= {3,6} (obtener un múltiplo de 3).
El suceso unión es $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ *(obtener un número par o múltiplo de 3)*
El suceso intersección es $A \cap B = \{6\}$ *(obtener un número par y múltiplo de 3"* (Texto [A], p. 44).

"Todos los posibles subconjuntos de E constituyen el espacio de sucesos al que designamos por B ; B ={A, B, C,..}" (Texto [A], p. 46).

La intersección de sucesos se suele indicar mediante la letra "Y"

"*Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, la probabilidad de que ocurra el suceso* S_1 *en la primera experiencia y* S_2 *en la segunda y,...,.y* S_n en la n-sima es:

p(S_1 y S_2 y ...y S_n) = p(S_1).p(S_2) ...p(S_n)" (Texto [I], p. 249).

Para la unión de sucesos se emplea la palabra "O", como se muestra en el siguiente ejemplo:

> *"En el experimento aleatorio:*
> *Sacar una carta de una baraja española y observar el resultado, considera los sucesos:*
> *A: obtener una carta de oros; B: obtener un caballo*
> *El suceso "obtener una carta de oros o una carta de caballo" es, por definición, el suceso unión de los sucesos A y B; se representa por $A \cup B$"* (Texto [A], p. 43).

Conclusiones

La breve muestra de ejemplos mostrados señala la variedad de notaciones empleadas dentro del tema de probabilidad, con frecuencia mezcladas en un mismo enunciado. El alumno deberá dominar estas diferentes notaciones para poder comprender a qué se refiere el profesor cuando enuncia una propiedad, plantea o resuelve un problema usando esta notación.

El aprendizaje de los conceptos implica el aprendizaje de los símbolos que usamos para representarlos, pues estos son objetos ostensivos y sólo con ellos podemos evocar los conceptos en las mentes de los alumnos.

Ahora bien, vemos que la notación es muy compleja, por su variedad, porque con frecuencia remite a otros conceptos que podrían no ser totalmente dominados por los alumnos y, sobre todo, porque la notación no siempre se usa consistente y adecuadamente.

La ambigüedad de la notación se suma a la ambigüedad del lenguaje, como hemos visto en el caso del condicionamiento.

Asimismo, se observa la diversidad de la notación entre los dos libros analizados, que podría contribuir a presentar a los alumnos un significado diferenciado para un mismo concepto y unos mismos objetivos educativos fijados en las directrices curriculares.

4.5. REPRESENTACIONES TABULARES, GRÁFICAS E ICÓNICAS

Además del lenguaje y los símbolos, aparecen con frecuencia representaciones de tipo diverso, que analizamos en este apartado. Sanz (1990) denomina con el término "expresiones gráficas" los pictogramas, fotografías, esquemas o diagramas usados en los libros de texto, es decir todo lo que no sea expresión verbal o expresión simbólica específica del lenguaje matemático. Señala, sin embargo que a veces es difícil trazar los límites entre "expresión gráfica" y "expresión simbólica específica".

Para Fischbein (1975) la visualización es el principal factor que contribuye a la producción del efecto de inmediatez, característico de las intuiciones. Este papel es tan importante que, con frecuencia, se identifica el conocimiento intuitivo con representación visual. Al considerar el papel de las imágenes en la estructuración de las intuiciones, hay que tener en cuenta que las representaciones visuales no son en sí mismas conocimiento intuitivo. Sólo la percepción del esquema de un dispositivo físico no implica que se comprenda su funcionamiento. Mas aún, las imágenes y modelos pueden imbuir propiedades inexistentes en la estructura conceptual que se trata de mostrar. Sin embargo, la visualización, incluida en una actividad cognitiva adecuada, supone un factor esencial para la comprensión intuitiva según Fischbein.

Otte (1983) enfatiza el equilibrio entre texto e imágenes en el texto matemático y el contraste entre la proporción de texto y material visual en los libros de texto escolares y los escritos para el nivel universitario. La diversidad de imágenes en estos últimos es muy grande: tablas y gráficos, diagramas y fotografías. En esta diversidad de imágenes hay latente una variedad de intenciones y formas de trabajo implícitas y explícitas, convenciones y claves. Por ejemplo se pueden codificar secuencias temporales y causales.

Tabla 4.4.2. Otras representaciones de los conceptos probabilísticos en dos libros de texto

Texto [I]	Texto [A]
Diagrama de árbol	Diagrama de árbol
Diagramas de barras	Diagramas de flechas
Fotografías	Diagramas de Venn
Gráficos de líneas	Ilustraciones
Gráficos cartesianos	Tablas cruzadas (no estadísticas)
Ilustraciones	
Tablas estadísticas de una variable	
Tablas estadísticas cruzadas	
Otros tipos de disposiciones tabulares	

Diagramas de Venn

Según Fischbein (1975) los diagramas son representaciones de fenómenos y relaciones entre los mismos. Cita los diagramas de Venn, los diagramas en árbol y los histogramas u otros gráficos estadísticos como ejemplos de diagramas. El diagrama se construye artificialmente para representar o modelar un sistema original existente en la realidad. Un diagrama puede funcionar como modelo heurístico, es decir, como instrumento de resolución de problemas, debido a la correspondencia isomórfica con el fenómeno original y su autonomía respecto al mismo. Uno traduce la situación A planteada en el problema al diagrama B, resuelve el problema por medio de B y traduce la solución a la situación original. Los diagramas son modelos simbólicos, en la terminología de Bruner, pero poseen la extraordinaria cualidad de transmitir un mensaje en forma icónica estructurada y ello les confiere una gran potencialidad intuitiva (Fischbein, 1975).

Los diagramas son frecuentes en los libros de texto de matemáticas y se usan con frecuencia como elemento heurístico en la resolución de problemas (Love y Pimm, 1996). Uno de los fines del diagrama es estabilizar el pensamiento y enfocar la atención del lector. Sin embargo, y debido a su naturaleza icónica, se olvida con frecuencia que es preciso saber "leer" el diagrama.

Un diagrama puede expresar directamente ciertas relaciones de la situación que son en ésta directamente perceptibles. Pero ello no implica que la imagen respectiva produzca intuitivamente la imagen de la realidad que se supone debe reflejar.

Un diagrama posee importantes características intuitivas. Primero, ofrece una representación global, sinóptica de una estructura o un proceso y ello contribuye a la globalidad de su comprensión. Segundo, un diagrama es un punto ideal entre la interpretación conceptual y la expresión práctica de una cierta realidad. Sin embargo, es preciso establecer ciertas convenciones que no se deducen de una simple inspección de las imágenes, como el hecho de que si A es un subconjunto de B, todos los elementos de A comparten las propiedades de los elementos de B. Esto podría no ser claro para los niños que podrían pensar, por ejemplo, que el conjunto A está compuesto de dos clases mutuamente excluyentes A y no A. Ciertamente él no asumirá espontáneamente que, en algunos casos A puede coincidir con B (un conjunto está incluido en sí mismo): Por ejemplo, el uso de diagramas de Venn, si no es convenientemente preparado, puede complicar la comprensión activa de los conceptos sobre conjuntos y sus relaciones, según Fischbein (1975).

En los diagramas de Venn relaciones como la inclusión e igualdad, operaciones como la unión e intersección y sus propiedades básicas reciben representaciones visuales que directamente sugieren estas relaciones y propiedades.

Como estudiamos en el apartado anterior, es el texto [A] el que hace un gran uso de este recurso didáctico. Mostramos en la siguiente figura del citado texto, página 43, un ejemplo:

Figura 4.4.1

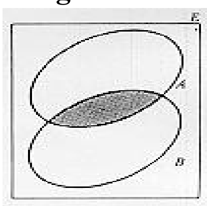


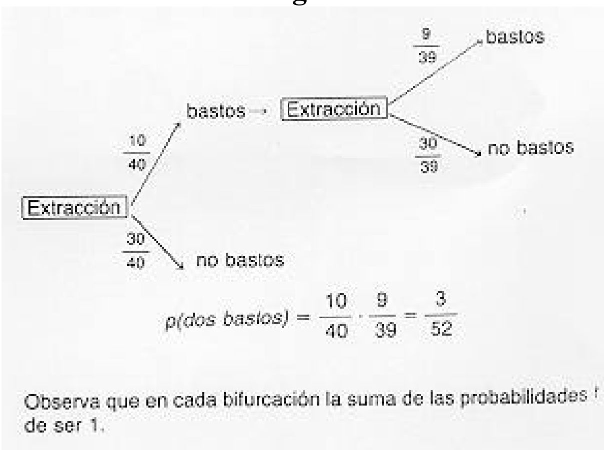
Diagrama en árbol

Fischbein (1975) subraya el papel que los modelos intuitivos tienen en el proceso de razonamiento matemático y en el aprendizaje y la resolución de problemas. Por ello analiza la influencia que los modelos figurativos, como el diagrama en árbol, pueden tener en la aceleración del desarrollo hacia niveles cognitivos superiores. Comparte los supuestos de Bruner de que una estructura matemática puede ser concretizada en tres modos de representación -enactiva, icónica y simbólica- sin cambiar sus características esenciales. Sólo usando medios adecuados de representación es posible preparar el desarrollo hacia el nuevo estadio.

El diagrama en árbol es presentado por Fischbein como un modelo generativo que permite sugerir e inculcar la generalización iterativa (extensión de una cierta propiedad a cualquier número de elementos en modo iterativo), que es la base de la inducción matemática. También posibilita la generalización constructiva, es decir la adaptación de un problema a otros derivados de él: *"Un estudiante que comprende el propósito del diagrama en árbol para resolver problemas combinatorios, es capaz de adaptar el modelo adecuadamente, cuando se cambia de un problema combinatorio a otro"* (Fischbein y cols., 1990). A partir del diagrama en árbol los alumnos pueden asimilar el principio constructivo de las configuraciones combinatorias, captando su significado intuitivo global, lo que es la base para la comprensión de estos conceptos. Por medio del diagrama, es posible encontrar las fórmulas pertinentes, por lo que no supone un algoritmo ciego de construcción. Siendo la construcción del diagrama en árbol el producto de una actividad consciente, la fórmula obtenida mantiene una relación productiva, por una parte con la adquisición intuitiva y por otra con la definición formal de las operaciones combinatorias (Fischbein y Gazit, 1988).

Hemos encontrado el uso del diagrama en árbol con relación a los experimentos compuestos, donde sirven, por un lado, para representar esquemáticamente las posibilidades a favor y en contra del suceso de interés en cada paso o en cada componente de un experimento, como se muestra en el siguiente ejemplo del texto [I], página 248, donde se recuerda al alumno que el diagrama en árbol ya se había estudiado en el tema de combinatoria:

Figura 4.4.2.



En este ejemplo se emplea además el color, para diferenciar entre los sucesos favorables y desfavorables al enunciado del problema y se hacen ver al alumno las siguientes propiedades:

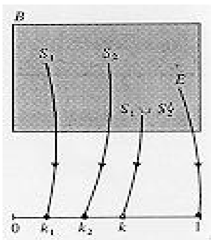
"a) En cada bifurcación, la suma de las probabilidades ha de ser 1
b) Las probabilidades finales se obtienen multiplicando las probabilidades de cada bifurcación que conducen a ellas" (Texto [I], p. 248).

En el texto [A], solo aparece un diagrama de este tipo, que se utiliza para ilustrar un ejemplo. (p. 41)

Diagramas de flechas

Este tipo de diagrama se usa abundantemente en el texto [A], especialmente para visualizar aplicaciones, como se muestra en el siguiente ejemplo del citado texto, página 47:

Figura 4.4.3.



Tablas

Las tablas estadísticas son un soporte usado con frecuencia en el tema de probabilidad para presentar a los alumnos datos empíricos obtenidos de los experimentos aleatorios. Las tablas matemáticas ofrecen una estructuración particular del espacio, una estructura soporte de relaciones, presentando una parrilla no de números en sí mismos, sino de las relaciones entre las diferentes entradas en la tabla. Por otro lado las tablas tienen características tanto numéricas como geométricas y algebraicas (Love y Pimm, 1996). En unos casos la tabla se da completa al alumno. En otros, como el siguiente ejemplo del texto [I] se presentan al alumno los datos básicos (valores de la variable y frecuencias absolutas) y es el alumno el que debe completar las frecuencias relativas y obtener alguna conclusión de los datos:

"Tiramos dos dados cien veces y anotamos la suma de los puntos. Obtenemos los siguientes resultados:

X_I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	6	8	11	14	17	13	10	9	7	2

a) Haz la distribución de frecuencias relativas;
b) A la vista de estos resultados, ¿qué suma te parece más probable?" (Texto [I], p. 239).

Además de las tablas de frecuencia, hemos encontrado diferente tipos de representaciones tabulares. En el siguiente ejemplo, tomado del texto [I], página 225, se usa una disposición tabular de doble entrada para representar la variación de datos estadísticos a lo largo de una serie de experimentos (sucesivas cosechas de un cierto producto). Podemos considerar este ejemplo un caso especial de tabla de contingencia, donde una de las variables es dicotómica (presencia o ausencia de una cierta característica) y la otra representa un eje temporal.

"2. Estamos estudiando una nueva variedad de planta tomatera con la que pretendemos conseguir tomates con una cierta característica. Se han analizado ejemplares de sucesivas cosechas y se ha observado la presencia (SÍ) o ausencia (NO) de la característica buscada:

	1ªCOSECHA	2ª COSECHA	3ª COSECHA	4ª COSECHA	5ª COSECHA
SÍ	99	133	181	246	473
NO	228	278	354	495	907
TOTAL	327	411	535	741	1380

Calcula la frecuencia relativa con la que aparece la característica buscada acumulando los datos de las sucesivas cosechas" (Texto [I], p. 225).

En otros ejercicios el objeto de las disposiciones tabulares es suministrar un soporte para la realización de cálculos en diferentes ejercicios, como es el caso del siguiente ejemplo del texto [I]:

"Resuelve ahora en tu cuaderno los siguientes casos:

META	NÚMERO DE TIRADAS	NÚMERO DE CARAS	NÚMERO DE CRUCES	PROPORCIÓN CARAS	PROPORCIÓN CRUCES
Norte	23				
Sur	49				
Norte	105				
Sur	197				

Observa que, cuánto más se tarda en alcanzar una de las metas, más se aproximan a 0,5 las proporciones.¿Qué pasaría si las metas estuvieran a 10 pasos en vez de a 7?¿Y si estuvieran a 20 pasos? ¿Y a 50? ¿No crees que tarde o temprano se acabaría llegando a una de ellas?" (Texto [I], p. 226).

Es frecuente también el uso de *tablas de doble entrada* para representar los elementos del espacio muestral en el experimento compuesto, como en el siguiente ejemplo, del texto [I], página 247:

"Al lanzar dos dados, los sucesos elementales son los 36 que aparecen en la tabla adjunta. Sólo hay un caso favorable al suceso dos unos, por tanto la probabilidad es:
p(dos unos) = 1/36

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

" (Texto [I] p. 247*).*

En el texto [A], como sustitución del diagrama de Venn, dentro del capítulo de probabilidad, hemos encontrado tres tablas, una en el apartado de las propiedades de las frecuencias y otras dos en el apartado de probabilidad condicional, como se ve en el siguiente ejemplo, de la página 46:

Figura 4.4.4.

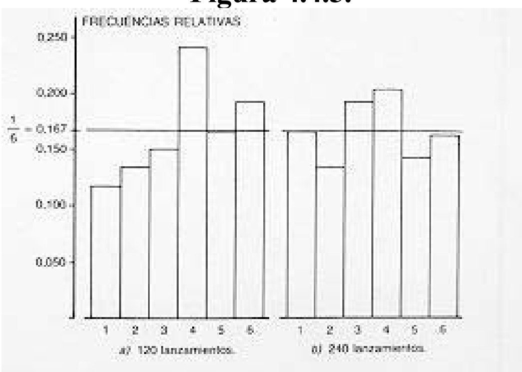
	A	$\bar{A}$
B	n_1	n_3
$\bar{B}$	n_2	n_4

Gráficos estadísticos

Al analizar los gráficos estadísticos nos hemos limitado a los que aparecen concretamente en el tema de probabilidad o bien se usan para describir la distribución de una variable aleatoria en el tema de estadística. No hemos considerado la variedad de gráficos que se presentan en el tema de estadística con relación a las variables estadísticas que es mucho mayor.

Un primer tipo de gráfico encontrado es el *diagrama de barras*. Este tipo de gráficos es usado tanto en relación con las frecuencias relativas o con las probabilidades, como en el caso siguiente del texto [I], página 229:

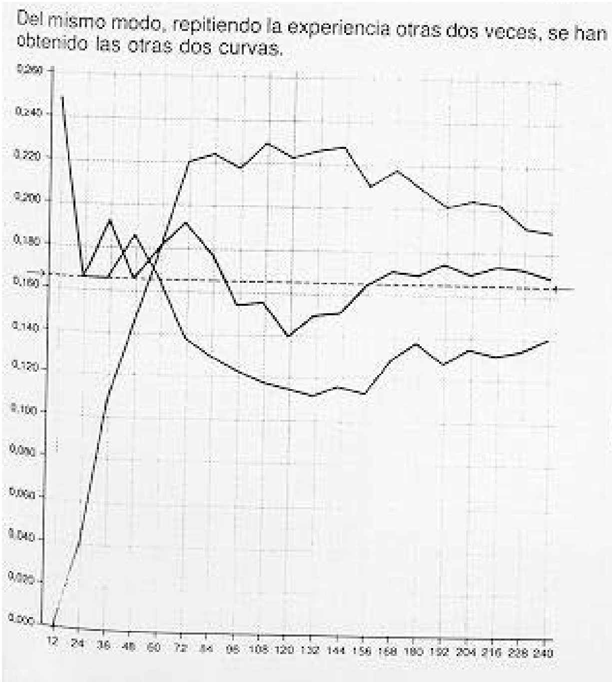
Figura 4.4.5.



Vemos en este ejemplo que, sin embargo, los gráficos presentados podrían inducir a confusión al alumno. En este ejemplo no está claro si se trata de un gráfico de barras o un histograma, puesto que las barras no guardan separación. Puesto que la variable es discreta, los valores intermedios entre las diferentes puntuaciones del dado no pueden aparecer, mientras que la gráfica podría inducir a pensar en tal posibilidad.

También hemos encontrado *gráficos de líneas* en conexión con la representación de la frecuencia relativa y su variabilidad en una serie acumulada de experimentos, como se muestra en el siguiente ejemplo del texto [I], página 235, en el que este gráfico se emplea para destacar la idea de convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica, así como las oscilaciones de esta frecuencia alrededor de este valor teórico de la probabilidad.

Figura 4.4.6.



En el texto [A], dentro del capítulo de estadística, pero relacionado con la variable aleatoria, aparecen dos diagramas de barras, uno para representar la distribución de frecuencias relativas y otro para representar la distribución de probabilidad, como se muestra en el siguiente ejemplo:

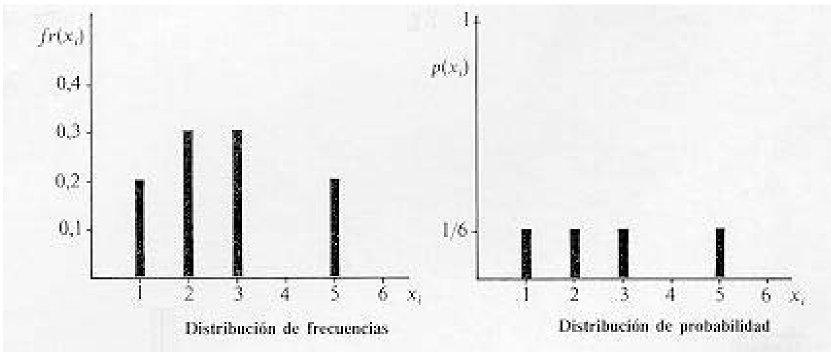


Figura 4.4.7.

Fotografías e ilustraciones

Los libros de texto incorporan con frecuencia fotografías e ilustraciones que hagan más atractivo su contenido a los alumnos. Love y Pimm (1996) indican que el énfasis creciente en el material fotográfico en los libros puede ser debido a razones comerciales. La fotografía se refiere siempre a un objeto real, que ha tenido existencia, lo que a veces hace que no se distinga la fotografía de su referente. Podemos clasificarlos en diferentes tipos:

Las fotografías de matemáticos o estadísticos relacionados con el cálculo de probabilidades o bien de retratos de los mismos, generalmente acompañando a una breve reseña histórica en que se indique la contribución de dicha persona al tema que se está trabajando. Por ejemplo en el texto [I], página 223, encontramos la siguiente referencia al trabajo de Pascal, junto con la ilustración que reproducimos a continuación:

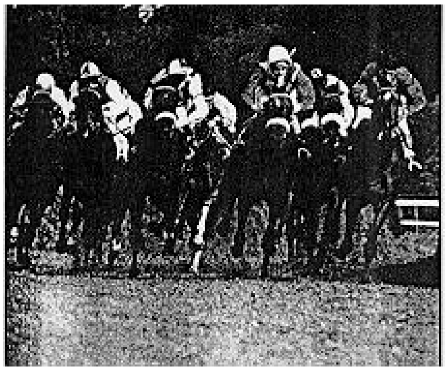
> *"En 1654 Blas Pascal, un matemático francés sobre cuya vida puedes leer algo en la página siguiente, hacía un viaje en compañía de un jugador más o menos profesional: el caballero de Meré. Este propuso entonces un problema que a Pascal le interesó mucho. Sin que ninguno e los dos lo supiera era esencialmente el mismo problema que había interesado tanto a Pacioli, Tartaglia y Cardano un siglo antes.*

Figura 4.4.8.

Sigue a continuación una versión simplificada del problema, junto con la referencia a Fermat y a la contribución de ambos al nacimiento del cálculo de probabilidades.

Otras fotografías se usan para contextualizar los enunciados de problemas, o descripción de propiedades de conceptos matemáticos o de sus aplicaciones, aunque no son estrictamente necesarias, pero sin duda pretende evocar la situación en la imaginación del alumno, como en el siguiente ejemplo del texto [I], página 255, que se incluye cuando se describen las "chances" (posibilidades) de un suceso, y se sitúa su utilidad especialmente en el mundo de las apuestas.

Figura 4.4.9.



Las ilustraciones presentadas suelen usarse para evocar una situación propuesta en un ejemplo o ejercicio, como en el caso siguiente en el texto [I], página 227:

Figura 4.4.10.

O bien sirve para proponer una actividad práctica, como en el tablero presentado para un juego en el texto [I], página 242:

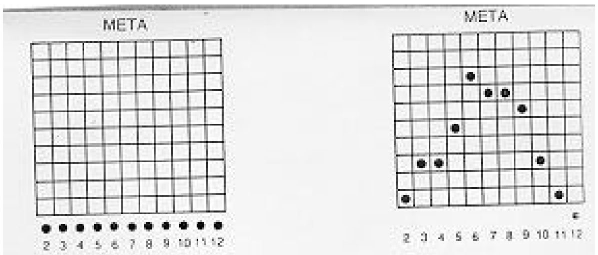


Figura 4.4.11.

En el texto [A], no aparece ninguna fotografía ni ilustración.

Conclusiones

De la comparación del contenido de la tabla 4.4.2 observamos, en primer lugar, una variedad de representaciones empleadas en los libros de texto con diversas finalidades: Representar conceptos, proporcionar o registrar datos; herramienta heurística o de cálculo para resolver problemas o herramienta didáctica para mostrar propiedades de los conceptos.

Estas representaciones tienen, sin embargo, convenios implícitos de construcción e interpretación que el alumno debe conocer. Por un lado, esto podría llevar a un "deslizamiento metadidáctico", si el estudio de tales representaciones (especialmente las que no tienen un uso inmediato en la práctica matemática) constituye un fin en sí mismo, quitando tiempo al estudio de los mismos conceptos y de sus aplicaciones. Por otro lado, no hay que olvidar que las investigaciones de Curcio (1987) muestran la dificultad generalizada de los estudiantes para interpretar los gráficos estadísticos a un nivel más allá de la pura lectura literal de los datos.

Las diferencias entre los dos textos son de nuevo visibles. Es notable como el texto [A] no presenta gráficos o tablas estadísticas dentro del tema de la probabilidad. Sin embargo, no es sorprendente, pues ya hemos analizado la separación que hace de estos dos temas y la no presencia de la concepción frecuencial de la probabilidad en este libro de texto.

Es muy escaso también el uso que se hace del diagrama en árbol (aunque sí está presente) en ambos libros. En el caso del texto [A] además se pierde la ocasión del conectar el diagrama en árbol con el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos, aunque si se hace con el espacio muestral de dicho experimento. Ahora bien, pensamos que es una pena no aprovechar esta herramienta didáctica que permite visualizar la estructura del experimento compuesto y dota al alumno de una herramienta heurística de resolución de problemas de probabilidad compuesta, a la vez que contribuye a reforzar su razonamiento combinatorio.

4.6. CONCLUSIONES SOBRE LOS ELEMENTOS DE SIGNIFICADO REPRESENTACIONALES EN LOS DOS LIBROS DE TEXTO ANALIZADOS

En este capítulo hemos analizado los recursos notacionales empleados en dos de los libros de texto para evocar en el alumno los conceptos y la fenomenología asociada a los mismos, o como instrumento de cálculo. Hemos dividido el análisis en tres apartados. A continuación destacamos las principales conclusiones en cada uno de ellos.

Vocabulario empleado

Hemos analizado las palabras y expresiones usadas en los libros para denotar cada uno de los conceptos estudiados, así como las situaciones problemáticas asociadas.

Una primera consecuencia es la riqueza de este vocabulario, que se pone de manifiesto en las tablas incluidas en la sección 4.3. Así mismo se aprecia una clara diferencia en la variedad de vocabulario en ambos libros, siendo mucho mayor en el texto [I] en todos los conceptos, salvo en el de espacio muestral y sucesos. Observamos también una mayor presencia de términos formales en el texto [A]. Estos son palabras o expresiones que no suelen utilizarse en el lenguaje ordinario y que son introducidos con la finalidad específica de referenciar conceptos abstractos. Como ejemplos citamos los términos, "aleatorio", "espacio de sucesos", "subconjunto", o "distribución de probabilidad".

Sin embargo, estas palabras y expresiones específicas son minoría siendo lo más frecuente que se use el vocabulario ya conocido por el alumno, dotándole ahora de nuevo significado. Este significado específico, no obstante queda implícito la mayoría de las veces, pudiendo dar lugar a interpretaciones inadecuadas por parte de los alumnos.

Notación simbólica

La notación simbólica empleada en el tema de probabilidad es muy variada e incluso compleja con relación al nivel de enseñanza. Hemos identificado entre otros el uso de fracciones y decimales, notación algebraica y funcional, notación conjuntista, pares ordenados, subíndices y superíndices.

Esta notación se mezcla con frecuencia en un mismo enunciado o se usa en forma inconsistente. En otro caso la notación simbólica sirve para recordar procedimientos de cálculo, tal como la regla de Laplace. El alumno deberá dominar estas diferentes notaciones para poder comprender a qué se refiere el profesor cuando enuncia una propiedad, plantea o resuelve un problema usando esta notación.

El aprendizaje de los conceptos implica el aprendizaje de los símbolos que usamos para representarlos, pues estos son objetos ostensivos y sólo con ellos podemos evocar los conceptos en las mentes de los alumnos.

Ahora bien, vemos que la notación es muy compleja, por su variedad, porque con frecuencia remite a otros conceptos que podrían no ser totalmente dominados por los alumnos y, sobre todo, porque la notación no siempre se usa consistente y adecuadamente.

La ambigüedad de la notación se suma a la ambigüedad del lenguaje, como hemos visto en el caso del condicionamiento.

Asimismo se observa la diversidad de la notación entre los dos libros analizados, que podría contribuir a presentar a los alumnos un significado diferenciado para un mismo concepto y unos mismos objetivos educativos fijados en las directrices curriculares.

Otras representaciones

Además del vocabulario y la notación simbólica aparecen en los libros representaciones tabulares, gráficas e icónicas, así como fotografías e ilustraciones que se emplean para evocar conceptos abstractos o situaciones problemáticas. También sirven para mostrar los pasos necesarios en la resolución de un problema y realizarlos efectivamente.

De la comparación del contenido de la tabla 4.4.2 observamos en primer lugar, una variedad de representaciones empleadas en los libros de texto con diversas finalidades: Representar conceptos, proporcionar o registrar datos; herramienta heurística y operatoria para resolver problemas o herramienta didáctica para mostrar propiedades de los conceptos.

Estas representaciones tienen, sin embargo, convenios implícitos de construcción e interpretación que el alumno debe conocer. Por un lado, esto podría llevar a un "deslizamiento metadidáctico", si el estudio de tales representaciones (especialmente las que no tienen un uso inmediato en la práctica matemática) constituye un fin en sí mismo, quitando tiempo al estudio de los mismos conceptos y de sus aplicaciones. Por otro lado, no hay que olvidar que las investigaciones de Curcio (1987) muestran la dificultad generalizada de los estudiantes para interpretar los gráficos estadísticos a un nivel más allá de la pura lectura literal de los datos.

Las diferencias entre los dos textos son de nuevo visibles. Es notable como el texto [A] no presenta gráficos o tablas estadísticas dentro del tema de la probabilidad. Sin embargo, no es sorprendente, pues ya hemos comentado la separación que hace de estos dos temas y la no presencia de la concepción frecuencial de la probabilidad en este libro de texto.

Es muy escaso también el uso que se hace del diagrama en árbol (aunque sí está presente) en ambos libros. En el caso del texto [A] además se pierde la ocasión del conectar el diagrama en árbol con el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos, aunque si se hace con el espacio muestral de dicho experimento. Ahora bien, pensamos que es una pena no aprovechar esta herramienta didáctica que permite visualizar la estructura del experimento compuesto y dota al alumno de una herramienta heurística de resolución de problemas de probabilidad compuesta, a la vez que contribuye a reforzar su razonamiento combinatorio.

CONCLUSIONES GENERALES

En esta investigación hemos abordado el estudio de la presentación de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de bachillerato, desde un doble punto de vista teórico y experimental.

Desde el punto de vista teórico, nuestro trabajo pretende contribuir a mostrar un ejemplo de aplicación de la teorización de Godino y Batanero (1994; 1997) sobre el carácter sistémico del significado de los conceptos matemáticos, y los tipos de elementos que lo componen, así como sobre las dimensiones institucional y personal del conocimiento. El análisis de las tipologías de elementos de significado para cada uno de los conceptos analizados, la comparación de su presencia o ausencia en los libros de texto o de los matices específicos con que se presentan permite mostrar la diversidad de significados que, sobre un mismo concepto, presentan diferentes libros de texto, incluso en un mismo nivel de enseñanza.

Desde el punto de vista experimental, hemos llevado a cabo un análisis detallado de la presentación del tema de probabilidad en una muestra de libros de texto que consideramos representativa de los textos de bachillerato publicados en el periodo 1975-1991. El estudio se ha llevado a cabo a dos niveles: Un primer análisis de tipo cualitativo se ha realizado en el total de libros en la muestra sobre los elementos intensionales y extensionales del significado identificados en el estudio teórico. Posteriormente se complementa con un estudio cuantitativo de las variables de tarea en los ejercicios y ejemplos en dos de los libros de texto, así como un estudio cualitativo de los elementos de significado representacionales incluidos en estos dos libros de texto.

En lo que sigue presentamos una síntesis de las principales conclusiones, que han sido discutidas con detalle a lo largo de los capítulos, así como las principales aportaciones de nuestro estudio y sus implicaciones educativas, así como líneas de investigación abiertas.

Aportaciones del estudio

Como hemos indicado una primera finalidad del estudio era analizar los conceptos teóricos presentados por Godino y Batanero (1994; 1997) y estudiar su posible aplicabilidad al análisis de libros de textos. Una primera aportación del estudio es precisamente este estudio de tipo teórico, así como la lista de elementos de significado, en sus diversas tipologías que se han identificado para cada uno de los conceptos probabilísticos elementales.

Esta categorización de los elementos de significado ha sido la base para la categorización de las unidades de análisis de los textos, base del método de análisis empleado en la tesis doctoral. Por otra parte creemos que puede tener una aplicación directa como guía en el análisis de otros libros de texto, en la construcción de instrumentos de evaluación del razonamiento probabilístico y en el diseño de unidades didácticas para la enseñanza de los mencionados conceptos.

También el estudio empírico realizado de los libros de texto proporciona datos sobre el significado institucional presentado en el nivel dado de enseñanza y su variabilidad. En este sentido contribuye a caracterizar el resultado de la transposición didáctica de los conceptos probabilísticos para la enseñanza secundaria. Nuestro estudio pone de relieve los puntos que han sido tratados en forma más completa, así como aquellos otros en los que se ponen de manifiesto sesgos y limitaciones en su presentación.

La caracterización de las variables de tarea en los problemas probabilísticos elementales, así como de sus posibles valores puede ser la base para la iniciación de trabajos de investigación sobre resolución de problemas en el campo de la probabilidad. El estudio empírico de la distribución de estas variables en los diversos tipos de problemas y su comparación en dos libros de texto es un nuevo elemento que permite comparar el significado del tema presentado a los alumnos con el que, a nuestro juicio, sería deseable para este nivel de enseñanza y edades de los alumnos.

El estudio realizado sobre los libros de texto es el principal foco de interés de nuestro trabajo, por la importancia que a los libros de texto se ha dado dentro de la enseñanza, en general, y de la enseñanza de la matemática en particular. En este sentido, nuestro estado de la cuestión sobre investigaciones en torno al libro de texto es otro resultado del trabajo que puede contribuir a interesar a otros investigadores por la problemática del análisis de los libros de texto.

Asimismo el análisis del marco curricular en el que se desarrolla la enseñanza secundaria en el periodo estudiado, así como de las corrientes de reforma previas en las que se apoya y las que aparecen a lo largo del periodo y producen su paso a una nueva etapa en la historia educativa de nuestro país, pueden ser de utilidad para futuras investigaciones. Finalmente resaltamos la aportación metodológica que suponen las variables utilizadas y el proceso seguido en el análisis de los libros de texto.

Discusión de las hipótesis de investigación

En la Sección 1.5, dedicada a la presentación de la metodología discutíamos las hipótesis de investigación (Sección 1.5.5.), entendiendo como tales las expectativas iniciales de nuestro trabajo. Un segundo punto de reflexión lo constituye las conclusiones obtenidas respecto a las citadas hipótesis. La primera de ellas hacía referencia a la complejidad del significado de los conceptos presentados a los alumnos de bachillerato, incluso aunque los textos se dirigen a alumnos que inician su aprendizaje de la probabilidad.

H1: El significado de los conceptos probabilísticos elementales mostrado en los libros de texto tiene un carácter complejo, debido a la interrelación entre los diferentes conceptos, lo que hace difícil la secuenciación de su enseñanza.

Creemos que nuestro estudio aporta datos suficientes para avalar esta expectativa. Por un lado, las listas de elementos de significado intensionales, extensionales y representacionales producidas en nuestro trabajo ponen de manifiesto la complejidad que implica la comprensión o captación de cada uno de estos elementos, así como de sus relaciones mutuas. Es difícil, por otro lado, seleccionar cuáles de estos elementos deben ser introducidos en primer lugar, así como diseñar actividades adecuadas para la (re) construcción de los mismos por parte de los alumnos y secuenciarlas adecuadamente.

En consecuencia, nuestro análisis pone de manifiesto la dificultad de la tarea de desarrollo curricular y planificación de la acción didáctica en este campo específico. Creemos necesaria una mayor labor de investigación y de cooperación con los equipos de profesores por parte de los investigadores en educación estadística.

A continuación discutimos el resto de las hipótesis que tienen un carácter más específico.

H2: Hay una gran variabilidad en el significado que, para los diferentes conceptos probabilísticos, presentan los libros de texto de un mismo nivel de enseñanza.

Esta hipótesis se ha visto apoyada por los resultados de cada uno de los capítulos y el análisis de cada uno de los conceptos elementales. A lo largo de la tesis hemos venido presentando datos detallados, tanto cuantitativos como cualitativos, que indican la diferencia en la presentación teórica, práctica, e incluso en los sistemas de representación empleados para los diversos conceptos. Puesto que sería muy detallado volver a enumerar aquí todas las diferencias encontradas, remitimos al lector a las conclusiones parciales de las diferentes secciones de los capítulos 2, 3 y 4.

H3: Aunque las diversas concepciones de la probabilidad se presentan desde un punto de vista intensional, las actividades propuestas a los alumnos se orientan casi exclusivamente a la concepción laplaciana y formal de este concepto.

Esta hipótesis se ha visto confirmada sólo parcialmente. En el análisis de la presentación teórica del concepto de probabilidad han sido dos las concepciones de probabilidad que se presentan con generalidad en todos los libros de texto. Son la concepción clásica (regla de Laplace) y la concepción frecuencial (la probabilidad como límite de las frecuencias relativas). Tan sólo en algunos casos se presenta la concepción subjetiva de la probabilidad y también en una parte importante de los libros de texto incluye la definición axiomática o concepción formal de la probabilidad.

Desde el punto de vista práctico, sin embargo, la única concepción presentada, salvo muy raros ejemplos en algún libro, es la concepción laplaciana. Se propone como actividad casi exclusiva el cálculo en experimentos aleatorios donde sea aplicable el principio de indiferencia y en donde deba emplearse un razonamiento combinatorio. En los pocos casos en que propone a los alumnos la recogida de datos experimentales para obtener una estimación frecuencial de la probabilidad, sería posible aplicar la regla de Laplace. No constituyen estas actividades, por tanto, verdaderas situaciones que hagan necesaria la concepción frecuencial de la probabilidad. Lo mismo ocurre con la concepción subjetiva y tampoco hay un análisis de los casos en que se pueda o no se pueda aplicar las diferentes concepciones.

H4: La fenomenología de la probabilidad presentada al alumno en los textos está sesgada hacia el campo de los juegos de azar, sin mostrar la relevancia y aplicabilidad real del tema.

Esta hipótesis se ve especialmente confirmada en el análisis de los ejemplos y ejercicios. El principal contexto empleado es el de juegos de azar, y sólo aparecen escasos ejemplos de aplicación en biología, física y otros contextos. Asimismo los espacios muestrales usados se restringen a experimentos aleatorios con un número finito e sucesos equiprobables, que son prototípicos de los juegos de azar.

H5: Existen convenios implícitos en el vocabulario usado en la presentación del tema de probabilidad a los alumnos

En el capítulo 4 hemos analizado el vocabulario específico asociado a los diversos conceptos probabilísticos en los libros de texto, así como los matices específicos dados a términos del lenguaje cotidiano, cuando se emplean en el estudio de la probabilidad. Hemos mostrado también la existencia de convenios implícitos para su interpretación, lo que podría constituir una dificultad para la comprensión de los conceptos por parte del alumno.

H6: La notación empleada en el trabajo con conceptos probabilísticos no siempre es consistente con la notación empleada por los alumnos en otras ramas de las matemáticas

En el capítulo 4 hemos encontrado una notación muy variada en el tema de probabilidad, que incluye la notación decimal, desigualdades, fracciones numéricas y algebraicas, letras, simbología conjuntista, notación cartesiana, subíndices y superíndices, parámetros y notación funcional. Sin embargo la notación no siempre se usa consistentemente con la empleada en otros temas, y ni siquiera dentro de la misma unidad didáctica. Consideramos que ello amplia la dificultad del tema para el alumno.

H7: En el tema de probabilidad se incluye una variedad de representaciones tabulares gráficas e icónicas cuya interpretación requiere con frecuencia de conocimientos no específicos del tema, por parte de los alumnos.

Finalmente, en el mismo capítulo hemos mostrado la variedad de representaciones gráficas, tabulares e icónicas de los libros en el tema de probabilidad. Algunos de los gráficos o tablas requieren un conocimiento, por parte del alumno de los convenios de construcción o de conceptos asociados que no son explicitados. Por otro lado, se emplean representaciones aparentemente similares para fines diferentes. Por ejemplo una tabla de formato parecido puede servir como tabla de frecuencias, tabla de datos o tabla auxiliar de cálculo. En consecuencia se muestra de nuevo la complejidad del significado de los conceptos probabilísticos para el nivel de enseñanza dado.

Implicaciones didácticas

Las principales implicaciones para la enseñanza se derivan de las conclusiones obtenidas respecto a las hipótesis de investigación. Los conceptos probabilísticos presentan una gran complejidad incluso para un nivel introductorio. Para cada uno de ellos hemos identificado diferentes propiedades intensionales que el alumno debiera adquirir gradualmente, así como una serie de actividades que posibilitarían dicha construcción. Es necesaria una gran labor de diseño curricular para planificar una secuencia graduada de tales actividades que lleven progresivamente a la construcción de los conceptos. Asimismo será necesario presentar escalonadamente el lenguaje, notación y representaciones diversas de estos conceptos.

En consecuencia, la principal conclusión didáctica es la necesidad de graduar a lo largo del tiempo la introducción y aprendizaje de la probabilidad. Sería preciso comenzar la enseñanza desde una edad temprana y prolongarla a lo largo de toda la etapa secundaria, para poder estudiar los diversos conceptos sucesivamente, con niveles crecientes de complejidad, siguiendo la idea de curriculum en espiral.

Otro aspecto puesto de manifiesto es la dificultad de la tarea de evaluación, que debería tener en cuenta los diversos elementos del significado de los conceptos. Es importante también que la investigación didáctica contribuya a facilitar esta tarea del profesor, proporcionándoles instrumentos adecuados o al menos criterios para su construcción.

Algunas líneas de investigación abiertas

Nuestro trabajo muestra el interés de continuar la investigación sobre los libros de texto de matemáticas. El análisis del significado presentado en los libros de texto para diferentes niveles educativos y distintos conceptos puede ser continuado, siguiendo el modelo metodológico y teórico usado en nuestra investigación.

En primer lugar, nuestro estudio se centra únicamente en un tema (la probabilidad), un nivel escolar (primer curso de bachillerato), y un período de tiempo (1975-91). Es claro que cada uno de estos parámetros puede ser cambiado y dar lugar a un estudio complementario del nuestro. Además, sobre los mismos libros y contenido, podría ampliarse el estudio incluyendo aspectos tales, como la estructura del texto, la estructura del tema, la relación que guarda con otros temas, extensión que se dedica al mismo, etc.

Podríamos completar el estudio estadístico comparativo de los dos textos, con el de otros del mismo nivel y plan de estudio o bien realizar una comparación entre niveles o entre periodos históricos. En particular la lista de elementos de significado elaborada puede servir de base para la evaluación de los libros de texto producidos para la nueva reforma educativa y para la comparación del cambio realmente producido con los objetivos pretendidos por la reforma. Por supuesto es de esperar que otras investigaciones amplien la lista de dichos elementos, teniendo en cuenta la presencia en los nuevos libros de texto de actividades basadas en las nuevas tecnologías.

ANEXO I: TEXTOS EMPLEADOS EN EL ESTUDIO

[A]:Valdés, J. y Marsinyach, S. (1975). Matemáticas Bachillerato 1º Ed.Bruño. Madrid

[B]: Pérez, J. M. (1977). Matemáticas BUP 1. Ed. Everest. León.

[C]: Etayo, J. y Colera, J. (1978). Matemáticas 1º. Ed. Anaya. Salamanca.

[D]: Lazcano, I. y Barolo, P. (1980). Matemáticas 1º BUP. Ed. Edelvives. Zaragoza

[E]: Peña, J. y Taniguchi, P. (1981). Matemáticas Bachillerato 1º. Ed. Magisterio Español. Coslada, Madrid.

[F]: Caruncho, J.; Gutiérrez, M. y Gil, J. (1985). Matemáticas . BUP 1º. Ed. Santillana. Madrid.

[G]: Negro, A. y Pérez, S. (1986). Matemáticas, 1º BUP. Ed. Alhambra. Madrid. Reimpresión 1986.

[H]: Compostela, B.; González, A. y otros. (1987). Matemáticas 1º BUP. Ed. AKAL. Madrid.

[I]: Guzmán, M.; Colera, J. y Salvador, A. (1988). Matemáticas, Bachillerato 1º, Ed. Anaya. Madrid.

[J]: Alvarez, F.y García, C. (1990, 1º Ed.). FACTOR- 1. BUP 1º. Ed. Vicens- Vives. Barcelona.

[K]: Vizmanos, J. R.; Anzola, M. y Primo, A. (1991): FUNCIONES 1. MATEMATICAS 1º BUP. Ed. SM. Madrid.

REFERENCIAS

Agar, M. (1986*). Speaking of ethnography*. Newbury Park, Ca: Sage.

Alford, L. E. (1986). Alignment of textbook and test content. *Arithmetic teacher*, 4 (3), 25.

Ahlgren, A. y Garfield, J. B. (1991). Analysis of the probability curriculum. En R. Kapadia y M. Boronick (Eds.), *Chance Encounters: Probability in education* (pp. 107-134). Dordrecht: Kluwer.

Alonso, F. y otros (1987). *Aportaciones al debate sobre las matemáticas en los 90. Simposio de Valencia.* Valencia: Mestral.

Apple, M. (1989). *Maestros y textos. Una economía política de las relaciones de clase y de sexo en educación.* Barcelona: Paidós-MEC.

Ayer, A. J. (1968). Posibilidad, probabilidad y casualidad. En R. Carnap y otros (Eds.), *Matemáticas en las ciencias del comportamiento.* Madrid: Alianza Editorial.

Azorín, F. (1972). *Curso de muestreo y aplicaciones*. Madrid: Aguilar.

Batanero, C, Godino, J. D. y Navarro–Pelayo (1997 a). Combinatorial reasoning and its assessment. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.)*, The assessment challenge in statistics education,* (pp. 239-252). Amsterdam: IOS Press e International Statistical Institute.

Batanero, C, Navarro–Pelayo y Godino, J. D. (1997 b). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181-199.

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO*, 15-28.

Batanero, C. y Serrano, L. (1997). The meaning of randomness for secondary school students and implications for teaching probability. *Bulletin of the International Statistical Institute. Proceedings of the51st Session of the ISI,* 1, 415-418.

Batanero, C., Serrano, L. y Garfield, J. (1996). Heuristics and biases in secondary students' reasoning about probabiliy. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.*), Proceedings of the XX PME Conference*, (v.2, pp. 43-50). Universidad de Valencia.

Batanero, C., Serrano, L. y Green, D. R. (1998). Randomness, its meanings and implications for teaching probability. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* 29 (1), 113-123.

Begle, E. G. (1973). Some lessons learned from SMSG. *Mathematics Teacher*, 66, 207-214.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa.* Barcelona: P.P.U.

Borovnick, M., Bentz, H. J. y Kapadia, R. (1991). A Probabilistic perspective. En R. Kapadia y M. Borovnick (Eds), *Chance encounters: Probability in education*. (pp. 27-72). Dordrecht: Kluwer.

Borovnick, M. y Peard, R. (1996). Probability. En A. Bishop et al. (Eds.), *International*

Handbook of Mathematics Education, I, 56, chapt07, pp. 1-54. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Brewer, J. K. (1986). Behavioral statistics textbooks: Source of miyths and misconceptions?. En R. Davidson y J. Swift (Ed), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 127-131). University of Victoria.

Brousseau, G. (1986). *Theorisations des phènoménes d'enseignement des mathématiques.* Tesis de estado. IREM de Burdeos.

Bruni, J. V. y Silverman, H. J. (1986). Developing concepts in probability and statistics and much more. *Arithmetic Teacher*, 34-37.

Bunge, M. (1985). *Epistemología*. Barcelona: Ariel.

Buxton, R. (1970). Probability and its measurement. *Mathematics teaching*, 49, 4-12 y 50, 56-51.

Canavos, G. C. (1987). *Probabilidad y estadística.* México: Mc. Graw Hill.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilisticas primarias.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L., y Ortiz, J. J. (1997 a). Subjective elements in children's comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 49-56). Lahti. Research and Training Center.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. (1997 b). Evaluación del razonamiento probabilístico en alumnos de 10 a 14 años. En H. Salmerón (Ed.), *Actas de las VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 297-300). Universidad de Granada.

Carpenter, T. B., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M. y Reys, R. E. (1980). Solving verbal problems: Results and implications from the national assessment. *Arithmetic Teacher*, 28(2), 8-12.

Carpenter,T. B., Hiebert, J. y Moser, J. M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution.

Cerdán. F. y Puig, L. (1983). Los problemas de matemáticas en el curriculum de EGB (ciclo medio): Un estudio cuantitativo-descriptivo desde el punto de vista de su potencial heurístico. *Enseñanza de las Ciencias*, 1 (3), 169-185.

Chandler, D. G. (1992). *A content analysis of mathematics textbooks for grades one throughout eigth to determine the match to the Ohio ninth grade proficiency.* Ph. D. The Ohio State University.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grénoble: La Pensée sauvage.

Chevallard (1991*). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grénoble: La Pensée sauvage

Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, N. W., Rieman, P. y Glaser, R. (1989). Self-explanations: How students study and use examples in learning to solve problems, *Cognitive Sciences*, 13, 145-182.

Cobb, G. W. (1987). Introductory textbooks: A framework for evaluation. *Journal of the American Statistical Association*, 82, 321-339.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Cohen, S. A. y Stover, G. (1981). Effects of teaching sith grade students to modify format variables of math word problems. *Reading Research Quarterly*, 16, 175-199.

Curcio, F.R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education,* 18 (5), 382-393.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, B.O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Labor.

Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen

Eisenhart, M. A. (1988). The etnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (2), 99-114.

Erickson, F. (1989). Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. En M.C.

Wittrock (Ed.), *La investigación en la enseñanza,* (pp.195-301). Madrid: Paidós.

Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Falk, R. (1981). The perception of randomness. En C. Laborde (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 222-229). University of Grénoble.

Falk, R. (1988). Conditional probabilities: Insights and dificulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297). University of Victoria.

Feller, W. (1973). *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones.* Vol. I. México: Limusa-Wiley.

Fey, J. T. (1980). Mathematics education research on curriculum and instruction. En R. J. Shumway (Ed), *Research in Mathematics Education* (pp. 388-432). Reston: NCTM.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probability thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistics intuitions?. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 15, 1-24.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5, 193-198.

Fischbein, E., Tirosh, D., Stavy, R. y Oster, A. (1990). The autonomy of mental models. *For the Learning of Mathematics*, 10 (1), 23-30.

Fine, T. L. (1973). *Theories of probability. An examination of foundations.* London: Academic Press.

Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en la educación*. Pamplona: Eunsa.

Freudenthal, H. (1973). The “empirical law of large numbers” or “the stability of frequencies”. *Educational Studies in Mathematics*, 4, 484-490.

Ghiglione, R. y Matalón, B. (1989). *Las encuestas sociológicas*. México: Trillas.

Gil Flores, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos.* Barcelona. P.P.U.

Gimeno, J. (1995). Materiales y textos: Contradicciones de la democracia cultural. En J. García y M. Beas (Compiladores), *Libro de texto y construcción de materiales curriculares* (pp. 75-130). Granada: Proyecto Sur de Ediciones.

Gingerenzer, G., Swijtinz, Z., Porter, T., Daston, L., Beatly, J. y Krüger, L. (1989). *The empire of chance*. Cambridge: University Press.

Glayman, M. y Varga, T. (1975). *Las probabilidades en la escuela*. Barcelona: Teide.
Godino, J.D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.
Godino, J.D. (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. En: A. Gutiérrez (Ed.), *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática* (pp.105-148). Madrid: Síntesis.
Godino, J.D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante*, 2 (2), 69-79.
Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 417-424. Valencia.
Godino, J. D. (1997). Reflexiones semióticas con los maestros sobre la división y las fracciones, En I. Berenguer, B. Cobo y F. Fernández (Eds.), *Investigación en el Aula de Matemáticas. La tarea docente* (pp. 179-188). Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemáticas.
Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3), 325-355.
Godino, J. D. y Batanero, C. (1997). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), M*athematics Education as a research domain: A search for identity,* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.
Godino, J. D. y Batanero, C. (1998 a). Building and experimenting a model for a meaningful instrucion on data analysis. En L. Pereira et al. (Eds.), *Proceedings of the V International Conference on Teaching Statistics*, V. 12, (pp. 905-912). Voorburg: International Statistical Institute.
Godino, J. D. y Batanero, C. (1998 b). Meanings of mathematical objects as analysis units in didactics of mathematics. Presentado en la *First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.* Osnabrueck, Alemania.
Godino, J. D. y Batanero, C. (En prensa). A semiotic and antropological approach to research in mathematics education. *Journal of Philosophy of Mathematics Education.*
Goetz, J. P. y Lecompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.
Goldin, G. A. y Mc Clintock, C.E. (Eds.) (1980). *Task Variables in Mathematical Problem Solving.* Philadelphia, Pennsylvania: The Franklin Institute Press.
González, R. M. (1993). *A descriptive study of verbal problems in selected mathematics text books at the high school*. Ph. D. UMI: 9404811.
Goodson, I. (1995). Materiales escolares y la construcción del curriculum: Texto y contexto. En J. García y M. Beas (Compiladores), *Libro de texto y construcción de materiales curriculares* (pp.183-202). Granada: Proyecto Sur de Ediciones
Green, D. R. (1982). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey y cols (Ed.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 766-783). University of Sheffield.
Green, D. R. (1989). School pupils' understanding of randomness. En R. Morris (Ed.), *Studies in Mathematics Education, v. 7,* (pp. 27-39). París: Unesco.
Green (1991). A longitudinal study of children’s probability concepts. En D. Vere Jones (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics (pp. 320-*

328). International Statistical Institute.

Grupo Cero (1984). *De 12 a 16: Un proyecto de curriculum de matemáticas*. Valencia: Mestral.

Gutiérrez, A. (1991). La investigación en Didáctica de las Matemáticas. En A. Gutiérrez (Ed.), *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática* (pp. 149-194). Madrid: Síntesis.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. Cambridge University Press. Cambridge.

Harten, G. y Steinbring, H. (1983). Randommess and stochastic independence. On the relationship between intuitive and mathematical definition. En R. W. Scholz (Ed*), Decision making under uncertainty* (pp. 363-373). Amsterdam: Reidel.

Harwell, M. R. (1994). Evaluating statistics texts used in education and psychology. Presentado en la *American Educational Research Association*, New Orleans.

Harwell, M. R., Herrick, M. L., Curtis, D., Mundfrom, D. y Gold, K. (1996). Evaluating statistics texts used in education. *Journal of Educational and Behavioral Statistics,* 21, 3-34.

Hawkins, A. y Kapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability. A psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematic*s, 15, 349-377.

Hawkins, A., Jolliffe, F. y Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts.* London: Longman.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.

Herman J. (1990). *Analyse de données qualitatives. V. 2*: *Traitement d'enquêtes, modèles multivariés*. Paris: Masson.

Huberman, A. M. y Miles, M. (1994). Data management and analysis methods. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 428-444*)*. London: Sage Publications.

Huberty, C. J. y Barton R. M. (1990). Applied multivariate statistics textbbooks. *Applied Psychological Measurement,* 14, 95-101.

Huberty, C. J. (1993). Historical origins of statistical testing practices. *Journal of Experimental Education.*

Junta de Andalucía (1989). *Diseño Curricular de Matemáticas. Enseñanza Secundaria 12-16.* Sevilla: Consejería de Educación y Ciencia.

Junta de Andalucía (1992 a). *Decreto por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Primaria en Andalucía*. Decreto 105/1992. Boja nº 56 de 20 de junio.

Junta de Andalucía (1992 b). *Decreto por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía*. Decreto 106/1992. Boja nº 56 de 20 de junio.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases.* Cambridge: University Press.

Kang, W. (1990). *Didactic transposition of mathematical knowledge in textbooks*. Ph. D. University of Georgia.

Kang, W. y Kilpatrick, J. (1992). Didactic transposition in mathematics textbooks. *For the Learning of Mathematics,* 12 (1), 2-7.

Kaputt, J. J. (1987). Representation Systems and Mathematics. *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. LEA. Hillsdale, 19-26.

Kempthorne, O. K. (1980). The teaching of statistics: content versus form. *The American Statiscian*, 34, 11-16.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hartfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving. Papers from a research workshop.* Columbus. Ohio: ERIC/SMEAC.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching Mathematical Problem Solving. En E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp.1-16). Hillsdale, N. Jersey: Lawrence Erlbaum.

Kirk, J y Miller, M. L. (1986). *Reliability and validity in qualitative research.* London: Sage.

Kish, L. (1972). *Muestreo de encuestas*. México: Trillas.

Kolmogorov, A. N. (1973). La teoría de probabilidades. En A. D. Aleksandrov y otros (Eds.), *La matemática: Su contenido, métodos y significado* (V. 2, pp.269-309). Madrid: Alianza Editorial.

Konior, J. (1993). Research into the costruction of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics,* 24, 251-256.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education*, (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.

Konold, C. (1995). Gonfessions of a coin flipper and would-be instructor. *The American Statistician*, 49 (2), 203-209.

Konold, C., Lohmeier, J., Pollatsek, A. y Well, A. (1991). Novices views on randomness. *Comunicación presentada en la XIII Conference on the Psychology of Mathematics.*

Koroliuk, V. S. (1981). *Manual de la teoría de probabilidades y estadística matemática*. Moscú: Mir.

Kyburg, H. (1974). *Probability and inductive logic.* London: Mac Millan.

Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). Judgements probabilistes et modèles cognitifs: Étude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 357- 368.

Lecoutre, M. P. y Cordier, J. (1990). Effet du mode de présentation d'un problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves. *Bulletin de l'APMEP*, 372, 9-22.

Lester, F. K. (1978). Mathematical Problem Solving in the elementary school: Some educational and psychological considerations. En L. L. Hartfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical Problem Solving. Papers from a research workshop.* ERIC/SMEAC. Ohio: Columbus.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las Matemáticas. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds), *Teoría y Práctica en Educación Matemática,* (pp. 63-116). Sevilla: Alfar.

Love, E. y Pimm, D. (1996). 'This is so': A text on texts. En A. J. Bishon y cols. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp.371-409). Dordrecht:Kluwer.

McGinty, R. L., Van Beyneb, J. y Zalewski, D. (1986). Do our mathematics textbooks reflect what we preach? *School Science and Mathematics*, 86, 591-596.

Malara, N. (1989). *Probabilità e statistica nella scuola media. Analisi di alcuni libri di testo.* Progetto strategico del C.N.R. Università di Modena.

Martínez Bonafé, J. (1995). Interrogando al material curricular (Guión para el análisis y la elaboración de materiales para el desarrollo del curriculum). En J. García y M. Beas (Compiladores), *Libro de Texto y construcción de materiales curriculares* (pp.221-240). Granada: Proyecto Sur de Ediciones.

Matalón, B.(1979). Epistemología de las probabilidades. En J. Piaget (Ed.), *Epistemología de la Matemática* (pp. 121-145). Buenos Aires: Paidós.

M.E.C. (1989 a). *Diseño Curricular Base para la educación secundaria obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

M.E.C. (1989 b). *Diseño Curricular Base para la educación primaria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

M.E.C. (1992). *Matemática secundaria obligatoria.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Mialaret, G. (1977). *Las matemáticas: Cómo se aprenden, cómo se enseñan.* Madrid: Ediciones del Río.

Miles, M. B. y Huberman A. M. (1984). *Qualitative data analysis.* Beverly Hills: Sage.

Moliner, M. (1983). *Diccionario del uso del español.* Madrid: Gredos.

Morgan, C. (1996). The language of mathematics: Towards a critical analysis of mathematics texts. *For the Learning of Mathematics*, 16, 2-10.

Murray, J. (1988). *Children Reading Mathematics.* Londres: Oxford.

Nagel, E. (1968). Significado de la probabilidad. En J. R. Newnam (Ed.), *Sigma. El mundo de las matemáticas* (pp.186-198). Barcelona: Grijalbo (Edición original inglesa de 1956).

Navarro-Pelayo, V. (1991). *La enseñanza de la Combinatoria en Bachillerato.* Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Navarro-Pelayo, V. (1994): *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

N. C. T. M. (1980). *An agenda for action*. Reston, Virginia: NCTM.

N. C. T. M. (1989). *Curriculum and evaluation standars for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nemetz, T. (1997). State of the art of teaching probability at secondary level. En B. Phillips (Ed.), *Papers on statistical education presented at ICME-8* (pp. 75-86). Hawthorn: Swiburne University of Technology.

Newell A. y Simon, H.A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Nolen (1987). Effects of a visible author in statistical texts. *Journal of Educational Psychology,* 87, 47-65.

Ortiz, J. J. (1996 a). *Significado de conceptos probabilísticos en los textos de Bachillerato.* Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J. (1996 b). Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato. *Uno*. Barcelona, 10, 140-141.

Ortiz, J. J. (1999). Investigaciones sobre los libros de texto en Didáctica de la Matemática. *Publicaciones. Escuela Universitaria del Profesorado de EGB, 29,* 177-191. Melilla.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (1995). La aleatoriedad en los libros de texto de Bachillerato. En L. Berenguer, P. Flores y J. M. Sánchez (Eds.), *Investigación en el Aula* *de Matemáticas* (pp.203-210). Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (1996a). Relative frequencies in secondary school textbooks. *ECER 96. European Conference on Educational Research* (pp. 211). Sevilla.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (1996b). Las frecuencias relativas en los textos de Bachillerato. *EMA,* 2 (1), 29-48.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (1997). Un estudio experimental de la presentación del concepto de la aleatoriedad en los textos de bachillerato. *Publicaciones. Escuela Universitaria del Profesorado de EGB, 25-26-27,* 569-582. Melilla.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L.(2001). Un estudio experimental del lenguaje probabilístico en los libros de texto de bachillerato. En: L. Berenguer, B. Cobo y J.M. Navas (Eds.), *Investigación en el Aula de Matemáticas* (pp.181-185). Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Granada.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma, 38*.

Ortiz, J. J., Batanero, C. Serrano, L. y Cañizares, M. (2000). Variables de tarea en los problemas elementales de probabilidad. *Ensino e Aprendizagem da Estatística*, 138-146. Lisboa.

Ortiz, J. J. y Serrano, L. (1996). Randomness in secondary school textbooks. Universidad de Sevilla. *ICME 8, Comunicaciones breves* (pp. 328). Sevilla.

Ortiz, J. J., Serrano, L., Batanero, C. y Cañizares, M. (1999). Variables de tarea en los ejercicios de probabilidad en los textos de bachillerato. *Actas de las 9as JAEM Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, 355-357. Lugo.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid: M.E.C. y Morata.

Otte (1983). Textual strategies. *For the learning of Mathematics*, 3 (3), 15-28.

Pérez Echeverría, M. (1988). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: I.C.E. Universidad Autónoma.

Perrin-Glorian, M. J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème.* Tesis doctoral. Université Paris VII.

Piaget, J. e Inhelder, B.(1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically*. New York: Routledge and Kegan Paul.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata-MEC.

Poincaré (1936). El azar. Artículo publicado originalmente en lengua inglesa en *Journal of the American Statistical Association*, v. 31, pp. 10-30. Recogido en J. Newman (Ed.), *Sigma. El Mundo de las Matemáticas*, (v.3, pp.68-82).

Polya (1957). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid. Síntesis.

Quesada, V. y García, A. (1988). *Lecciones del cálculo de probabilidades.* Madrid: Díaz de Santos.

Rade, (1985). Statistics. En R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education, V. 4: The education of secondary school teachers of mathematics* (pp. 97-107). París: Unesco.

Rao, C. R. (1989). *Statistics and truth*. Calcuta. Council of scientific & industrial research.
Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds), *Teoría y Práctica en Educación Matemática,* (pp. 17-62). Sevilla: Alfar.
Rico, L. y Sierra, M. (1997). Antecedentes del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en Educación Secundaria*, (pp. 17-76). Madrid: Síntesis.
Rios, S. (1967). *Métodos estadísticos*. Madrid: Ediciones del Castillo.
Robert, A y Robinet, J. (1989). *Enoncés d'exercices de manuels de seconde et representations des auteurs de manuels*. (IREM). Universidad de París.
Romberg, T. A. y Carpenter, T. P. (1986). Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*, (pp. 850-869). New York: Mac Millan.
Rothery, A. (1980). *Children reading mathematics.* Worcester: College of Higher Education.
Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
Sánchez, A. (1995). La nueva cultura de la escuela: La innovación. En J. García y M. Beas (Compiladores), *Libro de texto y construcción de materiales curriculares* (pp.203-219). Granada: Proyecto Sur de Ediciones.
Sánchez, F. T. (1996). *Regresión y correlación en los textos de bachillerato*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
Sanz, I. (1990). Comunicación, lenguaje y matemáticas, en S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática,* (pp.173-235). Sevilla: Alfar.
Sanz, I. (1994). *La construcción del lenguaje matemático a través de libros escolares de matemáticas. Las configuraciones gráficas de datos.* Tesis Doctoral. Universidad del País Vasco.
Scholz, R. W. y Waller, A. M. (1983). Conceptual and theoretical issues in developmental research on the adquisition of the probability concept. En R.W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertanity,* (pp. 291-312). Amsterdam: North Holland.
Selander, S. (1990). Análisis del texto pedagógico. En J. García y M Beas (Compiladores), *Libro de texto y construcción de materiales curriculares,* (pp. 131-161). Granada: Proyecto Sur de Ediciones.
Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.
Serrano, L., Batanero, C. y Godino, J. D. (1991). Sucesiones de ensayos de Bernoulli y procesos estocásticos asociados. *Actas de las V Jornadas Andaluzas de profesores de matemáticas,* (pp. 233-247). Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.
Serrano, L., Batanero, C. y Ortiz, J. (1996*).* A componential study of secondary school students` reasoning about probability. *ICME 8, Comunicaciones breves* (pp. 225). Sevilla.
Serrano, L., Batanero, C. y Ortiz, J. J. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de Bachillerato. *SUMA*, 22, 43- 50.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Cañizares, M. J. (1998). Un estudio componencial de heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos de secundaria. *Educación Matemática,* 10 (1), 7-26.

Shaughnessy, J. M. (1983). The psychology of inference and the teaching of probability and statistics: Two sides of the same coin? En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertanity,* (pp. 363-374). Amsterdam: North Holland.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* (pp. 465-494). New York: Mac Millan.

Sierpinska, A. (1993). Curriculum materials for integrated teaching: The case of application sections in a linear algebra textbook. En L. Bazzini (Ed.), *Proceedings of the V Conference on systematic cooperation between theory and practice*, (pp. 221-230). Grado: Italia.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Morata.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1984). *Iniciación al álgebra.* Madrid: Síntesis.

Stanic, G. M. y Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on Problem Solving in the Mathematical Curriculum. En R. I. Charles y E. A. Silver (Eds.*), The teaching and assesing of mathematical problem solving*. Lawrence Erlbaum Associate Publishers. New Jersey: Hillsdale.

Steinbring, H. y Von Harten, G. (1982). Learning from experience Bayes theorem, a model for stochastic learning situations ?. En D. Grey (Ed), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statitics,* V. 2, (pp. 701-713). University of Sheffield.

Steinbring, H. (1986). L'independence stochastique. *Recherches en didactique des Mathematiques*, 7, (3), 5-49.

Steinbring, H. (1991): The concept of chance in everyday teaching: a study of a social epistemology of mathematical knowledge. *Educational Studies of Mathematics*, 22, 503-522.

Stenhouse, L. (1987). *La investigación como base de la enseñanza*. Madrid: Morata.

Suydam, M. y Weaver, J. F. (1977). Research on problem solving: Implications for elementary school classroom. *Journal of Experimental Psychology General, 112, 634-656.*

Székely, G. J. (1986). *Paradoxes in probability theory and mathematical ststistics*. Dordrecht: Reidel

Tall, D. (1993). Constructions of objects through definition and proof. Presentado en el Advanced Mathematics Group. *XVII International Conference on the Psychology of Mathematics Education.* Brasil.

Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1986). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* Buenos Aires: Paidós.

Toohey, P. G. (1995). *Adolescent perceptions of the concept of randomness.* Unpublished Master Thesis. University of Adelaide.

Torres J. (1992). *El curriculum oculto*. Madrid: Morata.3ª edición.

Truran, K. (1994 a). Children's understanding of random generators. Short oral communication. *Proceeding of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. University of Lisbon.

Truran, J. (1994 b). Children's understanding of random generators. En J. Garfield (Eds.), *Research Papers from the Fourth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS IV).* The International Study Group for Research on Learning Probability and Statistics.University of Minnesota.

Truran, J. y Truran, K. (1997). Statistical Independence - One concept or two? Implications for research and for clasroom practice. En B. Philips (Ed.), *Papers on statistical education presented ay ICME-8* (pp. 87-100). Swinburne University of Technology.

Van Dalen, D.B. y Meyer, W. J. (1984). *Manual de técnica de la investigación educacional.* Barcelona: Paidós.

Vallecillos, A. (1994). *Un estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Vergnaud, G.(1982). Cognitive and developpemental psychology and research in mathematics education: Some theoretical and methodological issues. *For the learning of Mathematics*. 3(2), 31-41.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques* 10 (2-3), 133-170.

Webb, N. (1984). Content and context variables in problem tasks. En G. A. Goldin y E. Mc. Cintock (Eds.), *Task variables in pproblem solving*, (pp. 69-102). Philadelphia: The Franklin Institute Press.

Wickelgren, R. (1981). *How to solve problems*. San Francisco: Freeman.

Zabell, S. L. (1992). Randomness and statistical applications. En F. Gordon and S. Gordon (Eds.), *Statistics for the XXI Century.* The Mathematical Association of America, (pp. 139-166).