1. Tópicos y raíces cuadradas. E.R. Aznar

En lo que sigue comentaremos tres métodos de calcular, como se decía antaño, o de aproximar, como decimos hoy, la raíz cuadrada de un número real positivo N. Normalmente, *calculamos una aproximación* en base diez de la raíz cuadrada, ya que la mayor parte de las veces $\sqrt{N}$ tiene un número infinito de decimales (no periódicos). En ese caso, sólo se puede aproximar la raíz hasta un cierto número de decimales.

En algunos otros casos, la representación decimal de $\sqrt{N}$ tiene periodo cero, o sea desde alguna posición después del punto decimal tiene un número infinito de ceros a la derecha. En este caso, decimos que N es un cuadrado perfecto. Ya que, aunque N no sea entero, existe una potencia de diez tal que $N10^r$ es un número natural cuadrado perfecto. En cualquier caso, desde el punto de vista algebraico y matemático, el número real $\sqrt{N}$ es *exacto* ya que nos referimos a la *única* raíz real positiva que tiene el polinomio $x^2 - N$.

La intención didáctica de estas notas es aclarar algunos tópicos extendidos sobre este tema normalmente entendido como elemental. En primer tópico es cual método es más moderno, otro cual es más eficaz y otro cual deberíamos aprender tanto individual como colectivamente en la escuela.

i) **Método de Herón.** Comenzaremos por el más antiguo, el atribuido a Herón de Alejandría (126 a.c.–50 a.c.). Este método se basa en suponer que conocemos una aproximación x de la raíz cuadrada $\sqrt{n}$ y calcular otra aproximación y a partir de la primera por la fórmula

$$y = \frac{1}{2}\big(x + \frac{n}{x}\big)$$

Si $1 < n$, se verifica para cualquier $0 < x$ que

$$0 < (x-1)^2 + n - 1 = x^2 - 2x + n \iff 2x < x^2 + n \iff 1 < \frac{x^2+n}{2x} = \frac{1}{2}\big(x + \frac{n}{x}\big) = y$$

por tanto a partir de la segunda todas las aproximaciones de $1 < n$ son también $1 < y$.

Ahora, como se verifica que

$$y^2 - n = \frac{1}{4}\big(x^2 + \frac{n^2}{x^2} + 2n\big) - n = \frac{1}{4}\big(x^2 + \frac{n^2}{x^2} - 2n\big) = \frac{1}{4}\big(x - \frac{n}{x}\big)^2 = \frac{(x^2-n)^2}{4x^2}$$

podemos suponer que empezamos con alguna aproximación tal que también $1 < x$, y entonces si $|x^2 - n| < \epsilon$ se tendrá

$$|y^2 - n| = \frac{(x^2-n)^2}{4x^2} < \frac{(x^2-n)^2}{4} < \frac{\epsilon^2}{4}$$

decimos entonces que la convergencia es cuadrática.

Como $\mathbb{R}$ es arquimediano. Si $0 < x < 1$ podemos cambiar n por un múltiplo de una potencia de 10 conveniente de tal forma que $1 < n' = n10^{2r}$. Así, la relación entre las raíces cuadradas es $\sqrt{n'} = 10^r\sqrt{n}$ y existe una correspondencia biyectiva entre los números x' tal que $x'^2 < n'$ y los x tales que $x^2 < n$, dada por $x' = x10^r$. En consecuencia, no hay pérdida de generalidad en calcular la mejor aproximación a n' y después multiplicar por 10^{-r}. O sea, siempre podemos suponer que el radicando es mayor que uno.

En la práctica el método de Herón converge muy rápidamente. Esto es, se obtienen bastantes decimales exactos en relativamente pocas iteraciones. La razón está en que en muchas iteraciones se dobla el número de decimales exactos obtenidos. Además, este método es fácilmente programable (i.e., tiene pocas líneas de código) en cualquier lenguaje de alto nivel.

Por lo anterior, es creencia popular que este método es *muy moderno* y *eficaz*. Claramente no es moderno. Veremos más adelante que no es tan eficaz y que depende muy fuertemente de los instrumentos de cálculo de que dispongamos. En el s. XXI, esto significa del hardware, esto es, de las instrucciones de código máquina de que dispongamos. Así como del tamaño de palabra de nuestro ordenador. En definitiva, del tamaño del input N.

ii) **Método de las convergentes.** El segundo método que comentaremos es el de las convergentes de la descomposición en fracciones continuas de la raíz cuadrada $\sqrt{n}$. Es conocido que esa descomposición es periódica con periodo simétrico

$$\sqrt{n} = [q_0, q_1, \dots, q_m, \dots] = [q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, 2q_0}]$$

y que las sucesivas fracciones llamadas *convergentes*

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{q_0}{1}, \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}, \ \dots\ , \ \frac{A_m}{B_m} = \frac{q_m A_{m-1} + A_{m-2}}{q_m B_{m-1} + B_{m-2}}, \ \dots$$

verifican que

$$\frac{A_m}{B_m} - \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{B_{m-1}B_m}$$

y que alternativamente

$$\frac{A_m}{B_m} < \sqrt{n} < \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}, \quad o \quad \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} < \sqrt{n} < \frac{A_m}{B_m}$$

por tanto el valor de cada convergente es una buena aproximación racional a la raíz cuadrada $\sqrt{n}$. Como los denominadores $q_m B_{m-1} + B_{m-2}$ forman una sucesión doblemente recursiva de números naturales (parecida a la de Fibonacci). Crecen muy rápidamente.

Más rápidamente crecerá el denominador $B_{m-1}B_m$ (que verifica que $B_{m-1}^2 < B_{m-1}B_m$). Siendo la convergencia de las fracciones $\frac{A_m}{B_m}$ hacia el valor real de $\sqrt{n}$ también rápida. De nuevo, en el sentido, de que se obtienen bastantes decimales exactos en relativamente pocas iteraciones.

Este método es fácil de programar una vez que se conoce el periodo $\overline{q_1, q_2, \ldots, q_2, q_1, 2q_0}$ de $\sqrt{n}$. Aunque claramente tiene un coste superior al anterior de Herón. Es parecido en cuanto a convergencia y antigüedad.

iii) **Método de Al-Banna.** El tercer método es conocido como el de Al Banna (1256–1321). Ha sido enseñado en las escuelas de casi todo el mundo desde hace siglos. Se basa en la conocida fórmula del cuadrado de un binomio $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

En efecto, supongamos que el número $1 < N$ (como antes, no hay pérdida de generalidad en suponer esta hipótesis) está escrito en base diez como

$$N = b_{2n+1}10^{2n+1} + b_{2n}10^{2n} + \cdots$$

donde $n \geq 0$ y b_{2n+1} puede ser cero, pero no su siguiente cifra decimal que será $b_{2n} \neq 0$. Supongamos ahora que tiene como aproximación de su raíz cuadrada $\sqrt{N}$ un número, x_k, escrito en base diez como

$$x_k = a_n 10^n + \cdots + a_{n-k}10^{n-k}$$

donde $k \in \mathbb{N}$ es tan grande como queramos. Esto es, cuando $n < k$ la aproximación será

$$x_k = a_n 10^n + \cdots + a_0 + a_{-1}10^{-1} + \cdots + a_{n-k}10^{n-k}$$

o sea tendrá lo que llamamos un *punto decimal* y dígitos decimales a continuación.

Este método halla los dígitos sucesivamente, de uno en uno, de forma exacta. En el sentido de que la aproximación x_k^2 a N verifica que es el mayor cuadrado que es menor que

$$N_k = b_{2n+1}10^{2n+1} + b_{2n}10^{2n} + \cdots + b_{2n-2k}10^{2n-2k}$$

que es el número N truncado con ceros por la derecha y que tiene $2k+2$ o $2k+1$ cifras en base diez. Por un razonamiento previo, podemos dividir convenientemente, tanto N_k como x_k, por potencias de diez para tratar sólo con números enteros. Esto lo haremos preciso, más adelante en cada iteración.

Suponiendo por inducción que x_k verifica lo anterior calculamos la siguiente cifra de la aproximación a_{n-k-1} y por tanto x_{k+1}

$$x_{k+1} = a_n 10^n + \cdots + a_{n-k}10^{n-k} + a_{n-k-1}10^{n-k-1}$$

de la siguiente forma. Como

$$x_{k+1}^2 = (a_n 10^n + \cdots + a_{n-k}10^{n-k} + a_{n-k-1}10^{n-k-1})^2 = (a_n 10^{k+1} + \cdots + a_{n-k}10 + a_{n-k-1})^2 10^{2n-2k-2}$$

es múltiplo de $10^{2n-2k-2}$. Como también la siguiente truncación del número N es

$$N_{k+1} = b_{2n+1}10^{2n+1} + b_{2n}10^{2n} + \cdots + b_{2n-2k}10^{2n-2k} + b_{2n-2k-2}10^{2n-2k-2} =$$
$$= [b_{2n+1}10^{2k+3} + b_{2n}10^{2k+2} + \cdots + b_{2n-2k}10 + b_{2n-2k-2}]10^{2n-2k-2}$$

podemos dividir por $10^{2n-2k-2}$ en ambas expresiones.

Ahora, tratamos con números enteros, y se obtiene

$$(a_n 10^{k-1} + \cdots + a_{n-k}10 + a_{n-k-1})^2 = (a_n 10^k + \cdots + a_{n-k})^2 10^2 + 2(a_n 10^k + \cdots + a_{n-k})10 a_{n-k-1} + a_{n-k-1}^2 =$$
$$= (a_n 10^k + \cdots + a_{n-k})^2 10^2 + [2(a_n 10^k + \cdots + a_{n-k})10 + a_{n-k-1}]a_{n-k-1}$$

y por hipótesis de inducción, la diferencia

$$M_k = (b_{2n+1}10^{2k+1} + b_{2n}10^{2k} + \cdots + b_{2n-2k})10^2 - (a_n 10^k + \cdots + a_{n-k})^2 10^2$$

es lo menor posible y ya está calculada. Basta por tanto calcular el dígito $0 \leq a_{n-k-1} \leq 9$ de tal manera que la diferencia

$$M_{k+1} = M_k - [20(a_n 10^k + \cdots + a_{n-k}) + a_{n-k-1}]a_{n-k-1}$$

sea lo menor posible. Y esto es lo que se hace en cada iteración salvo en la primera en la que calculamos el primer dígito a_n de tal manera que su cuadrado sea menor o igual que el entero $b_{2n+1}10 + b_{2n}$ (este es el primer caso de la inducción).

Como consecuencia, este método es lineal en el número de cifras de $\sqrt{N}$. O sea, realiza tantas iteraciones como cifras queremos calcular de la raíz cuadrada y en cada iteración se realizan como mucho 9 multiplicaciones y 9 restas (en la práctica muchas menos). Como el número de cifras en base diez de $\sqrt{N}$ es $\frac{\log_{10} N}{2}$, el número total de operaciones está acotado por $9 \log_{10} N$. O sea, es un algoritmo de crecimiento logarítmico. Además, lo que es importante, las operaciones efectuadas en el curso del algoritmo son sólo multiplicaciones por un dígito y restas, sin ninguna división. □

Sobre la complejidad algorítmica.

Después de esta exposición podemos empezar a hacer una comparación entre los tres métodos. En una primera aproximación, diremos que los dos primeros son parecidos entre sí y son del tipo que se estudian en cálculo numérico. El primero de Herón es mejor que el de las convergentes. En este se hacen más operaciones al inicio y durante el algoritmo. Pero se obtiene otra información adicional interesante.

El inconveniente del de Herón es que depende de la primera aproximación elegida. Además, en cada iteración se hace al menos una división, una multiplicación y una suma de precisión como mínimo la del número inicial. O sea, hace falta aritmética de punto flotante y si N supera el tamaño de palabra del ordenador hace falta una aritmética de precisión múltiple completa (incluyendo una división arbitraria). En contrapartida, en muchas iteraciones se dobla el número de decimales exactos calculados.

Antes de sacar más conclusiones. Analicemos algunos ejemplos:

Ejercicio 1. *Calcular $\sqrt{2}$ con 5 decimales exactos con cada uno de los tres métodos anteriores.*

i) **Método de Herón.** Comenzamos con $x_0 = 1$. Así

$$x_1 = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{2}{1}\big) = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\big(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\big) = \frac{9+8}{2 \cdot 6} = \frac{17}{12} = 1.45$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\big(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\big) = \frac{17^2 + 2 \cdot 12}{2 \cdot 12 \cdot 17} = \frac{577}{408} = 1.414215$$

donde en tres iteraciones y después de como mínimo tres sumas, tres multiplicaciones y 6 divisiones (o bién tres sumas, tres divisiones y seis multiplicaciones) hemos obtenido 5 cifras decimales exactas. Después del punto, la sexta cifra es incorrecta.

Observamos que aunque se hacen sólo 3 iteraciones se hacen 12 operaciones aritméticas, de las cuales como mínimo hay tres divisiones, alguna de precisión bastante mayor que el input N.

ii) **Método de las convergentes.** Después de un cálculo previo, La descomposición periódica correspondiente es $\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$. Por tanto, la sucesión de convergentes comienza con

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = \frac{3}{2} = 1.5, \ \frac{17}{12} = 1.45, \ \frac{41}{29} = 1.413, \ \frac{99}{70} = 1.4142, \ \frac{577}{408} = 1.41421$$

donde hemos necesitado seis iteraciones, el doble del método anterior, y más operaciones. Obsérvese que las aproximaciones racionales del método de Herón coinciden con algunas de las convergentes. Esto es casual y debido a la descomposición periódica de $\sqrt{2}$.

iii) **Método de Al-Banna.**

2.0000000000	1.414221
1	$24 \cdot 4 = 96$
100	$281 \cdot 1 = 281$
096	$2824 \cdot 4 = 11296$
00400	$28282 \cdot 2 = 56564$
00281	$282841 \cdot 1 = 282841$
00281	
0011900	
0011296	
000060400	
000056564	
00005383600	
0000282841	

donde se han realizado seis restas y 5 multiplicaciones para obtener el mismo número de dígitos. Donde las multiplicaciones siempre son por un dígito independientemente de la precisión obtenida.

En este ejemplo elemental gana el método de Al-Banna.

Ejercicio 2. *Calcular $\sqrt{125}$ con 5 decimales exactos con cada uno de los tres métodos anteriores.*

i) **Método de Herón.** Comenzamos con $x_0 = 10$. Así

$$x_1 = \frac{1}{2}\big(10 + \frac{125}{10}\big) = \frac{225}{20} = 11.25$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\big(\frac{225}{20} + \frac{125 \cdot 20}{225}\big) = \frac{225^2 + 125 \cdot 20^2}{2 \cdot 20 \cdot 225} = \frac{50625 + 50000}{9000} = \frac{100625}{9000} = 11.1805$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\big(11.1805 + \frac{225}{11.1805}\big) = 11.180339$$

donde en tres iteraciones y después de como mínimo tres sumas y 6 divisiones (o bién tres sumas, tres divisiones y seis multiplicaciones) hemos obtenido 5 cifras decimales exactas. Después del punto, la sexta cifra es incorrecta.

ii) **Método de las convergentes.** Después de un cálculo previo, La descomposición periódica correspondiente es $\sqrt{125} = [11, \overline{5, 1, 1, 5, 22}]$. Por tanto, la sucesión de convergentes comienza con

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{11}{1} = 11, \quad \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = \frac{56}{5} = 11.2, \quad \frac{67}{6} = 11.16, \quad \frac{123}{11} = 11.1818, \quad \frac{682}{61} = 11.18032, \quad \frac{15127}{1353} = 11.180339$$

donde de nuevo hemos necesitado seis iteraciones, el doble del método anterior, y más operaciones.

iii) **Método de Al-Banna.**

125.0000000000	1.18033
1	$21 \cdot 1 = 21$
025	$221 \cdot 1 = 221$
021	$2228 \cdot 8 = 17824$
00400	$22360 \cdot 0 = 0$
00221	$223603 \cdot 3 = 6708189$
0017900	
0017824	
000007600	
000000000	
00000760000	
00000670809	
0000008919100	
0000006708189	

donde se han realizado seis restas y 5 multiplicaciones para obtener el mismo número de dígitos.

En este ejemplo también gana el método de Al-Banna.