Introducción a la Teoría de Errores

March 21, 2012

Al medir experimentalmente una magnitud física (masa, tiempo, velocidad...) en un sistema físico, el valor obtenido de la medida no es el valor exacto. Para evaluar convenientemente los experimentos que permiten medir magnitudes físicas es necesario tener en cuenta en qué medida los valores que se manejan coinciden con los verdaderos. Para ello es necesario estimar el error cometido al efectuar una medida. Dicho error se puede deber a múltiples factores. Por ejemplo algo aparentemente tan sencillo como medir el período de un péndulo, estará afectado por la precisión del cronómetro, los reflejos del cronometrador, las corrientes de aire, el número de medidas efectuadas, etc.
Los errores cometidos en un experimento se pueden clasificar en dos categorías dependiendo de su origen.

1 Errores sistemáticos:

Son aquellos que se manifiestan en el hecho de que mediciones realizadas en condiciones idénticas presentan desviaciones constantes o previsibles respecto del valor convencionalmente verdadero de la magnitud que se está midiendo. En general, las causas de esta componente del error son conocidas y por ello puede ser parcialmente corregida o acotada *a priori*.

En el error sistemático hay una parte **evitable** que se debe al mal ajuste del instrumento (por ejemplo una balanza mal ajustada que marca una masa 10 gramos superior a la real), a un uso incorrecto del mismo, etc. Esta parte del error puede ser corregida una vez que haya sido detectada y evaluada mediante un proceso de calibración.

Existe, sin embargo, otra parte del error sistemático que es **inevitable** y se debe a las limitaciones propias del instrumento o del método de medida.

2 Errores aleatorios:

Este tipo de errores se manifiestan en el hecho de que mediciones realizadas en condiciones idénticas presentan desviaciones imprevisibles respecto del valor convencionalmente verdadero de la magnitud que se está midiendo. Sus causas son o bien desconocidas o bien su estudio es tan complejo que no se justifica una acotación *a priori* de esta componente del error. En su lugar el orden de magnitud del error aleatorio se estima repitiendo muchas veces la medición en condiciones similares y aplicando técnicas estadísticas a los propios resultados obtenidos.

Cuando hablamos de **valor exacto o convencionalmente verdadero** nos referimos a la estimación del valor de una magnitud de forma que los errores de medida son despreciables a efectos prácticos. En la práctica este "valor convencionalmente verdadero", que se utiliza para calibrar un determinado instrumento o método de medida, se obtiene midiéndolo con otros instrumentos mucho más precisos y promediando una serie de muchas medidas para reducir el error aleatorio.

Al efectuar una medida directa de una magnitud física, el valor medido x por lo general diferirá del valor exacto x_0. El error asociado a esta medida se puede expresar de dos formas diferentes:

3 Error Absoluto:

Es la diferencia en valor absoluto entre el valor medido y el valor exacto:

$$\Delta x = |x - x_0|$$

4 Error Relativo:

Es la razón entre el error absoluto y el valor exacto x_0.

$$\epsilon_x = \frac{\Delta x}{|x_0|}$$

El error relativo resulta especialmente relevante porque nos relaciona el error cometido con el valor exacto de lo medido. Suele expresarse en tanto por ciento (%); aunque si es muy pequeño puede ser expresado en tanto por mil (‰), partes por millón (ppm) o partes por mil millones (ppmm).

Las cantidades aproximadas se deben expresar junto con su error, precedido éste por el signo $\pm$. Si el error que se indica es el absoluto, sus unidades son las mismas que las de la cantidad aproximada (si éstas tiene unidades); si se indica el error relativo se pone a continuación de éste %,‰, ppm ó ppmm según corresponda.

5 Cifras Significativas:

Son aquellas cuyo orden de magnitud es igual o superior al del error absoluto. Ejemplo, en la estimación del número π

$$3\ ,\ 1\ 4\ 1\ \vdots\ 5\ 9\ 2...\ \pm\ 0\ ,\ 0\ 0\ 2$$

tiene 4 cifras significativas, mientras que

$$3\ ,\ 1\ 4\ 1\ 5\ \vdots\ 9\ 2...\ \pm\ 0\ ,\ 0\ 0\ 0\ 7$$

tiene 5 cifras significativas.

A la hora de contar el número de cifras significativas no se tienen en cuenta los ceros que están a la izquierda de la primera cifra no nula.
Ejemplo:

$$3.141592... \pm 0.0001$$

tiene 5 cifras significativas, mientras que

$$0.041592... \pm 0.0001$$

tiene sólo 3 cifras significativas.

6 Redondeo de Números:

Las cantidades aproximadas se redondean de forma que sólo se representan las cifras que son significativas.

Ejemplo:

$3.141592... \pm 0.0001$ se redondea a 3.1416 ± 0.0001
$3.141592... \pm 0.00002$ se redondea a 3.14159 ± 0.00002
$314,1592... \pm 10$ se redondea a 310 ± 10

El redondeo se realiza según el siguiente criterio:

- Si la cifra que se omite es menor que 5, se elimina sin más. Ejemplo: 3.473 se redondea a 3.47.

- Si la cifra eliminada es mayor o igual que 5, se incrementa en una unidad la última cifra retenida. Ejemplo: 5.786 se redondea a 5.79.

7 Presentación de las Medidas Experimentales:

1) Toda medida ha de expresarse indicando:

- Su valor numérico
- Sus unidades
- Su error (si se expresa como error absoluto tendrá las mismas unidades que el valor numérico)

2) El valor numérico ha de redondearse en función del error de forma que sólo se escriban las cifras que son significativas

3) El error ha de expresarse con una sola cifra significativa redondeando según el criterio anterior

8 Estimación de Errores de Medida:

8.1 Medidas directas realizadas una sola vez:

Se toma como valor del error de la medida la precisión del instrumento. En los instrumentos más simples (reglas, calibres, balanzas, termómetros de mercurio, etc) se considera que la precisión del instrumento es una división de escala. Por ejemplo si medimos con una cinta métrica que está dividida en centímetros la longitud de una mesa, consideraremos que el error de precisión es de $\Delta l = 1cm$.

Para instrumentos más complejos (polímetros, termómetros digitales, balanzas digitales, etc) el error de precisión dependerá del alcance en que se está trabajando. Si por ejemplo pesamos un objeto con una balanza digital en miligramos, el error de precisión será $\Delta m = 1mg$.

8.2 Medidas directas realizadas numerosas veces en condiciones prácticamente idénticas:

Cuando se repite una medida varias veces en condiciones idénticas, se observa una variabilidad en los resultados que es independiente de lo cuidadosamente que se hayan realizado las medidas. Esta variabilidad es la manifestación de la componente aleatoria del error.

Si se hacen pocas medidas, el valor obtenido para la cantidad medida podrá estar afectado por importantes errores; si se efectúan demasiadas medidas, se está derrochando esfuerzo sin obtener mejoras sustanciales en precisión. En general, el valor del error asociado a un conjunto de medidas decrece de manera proporcional a la raíz cuadrada del número total de medidas. Es decir, el error asociado a 500 medidas es del orden de diez veces menor que el debido a solamente cinco medidas. Es evidente, no obstante, que no se puede esperar una reducción del error a valores arbitrariamente pequeños aumentando el número de medidas, ya que toparemos en última instancia con errores sistemáticos, límites en la sensibilidad del instrumento, etc; de manera que con una regla dividida en milímetros no se puede apreciar más allá del milímetro, independientemente del número de medidas efectuado.

¿Cuál es el número de medidas adecuado para una observación estadísticamente significativa? Descartados los casos en que, por las características del experimento, solamente se pueda obtener una medición, el mínimo número de medidas admisible es de tres. El procedimiento recomendado aquí es el siguiente:

- a) Consideremos que se han realizado n medidas directas (mínimo tres) de una cierta magnitud física x, de las que han resultado las lecturas:

$$x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$$

- b) Se toma como valor verdadero de la medida, x_0, la media aritmética de todas las lecturas:

$$\boxed{x_0 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{1}$$

- c) Se calcula la dispersión, D, que es la diferencia entre los valores extremos (mayor y menor) de las medidas realizadas: $D = x_{max} - x_{min}$
- d) Si la dispersión es igual o menor que el error instrumental, se toma el error instrumental como error del conjunto de medidas.
- e) Si la dispersión es mayor que el error instrumental, se calcula la tasa de dispersión, T_D, que no es sino la dispersión relativa respecto al valor medio en tantos por ciento:

$$T_D = \frac{100 \times D}{x_0}$$

Según sea el valor de T_D se elige el número de medidas a realizar:

$\mathbf{T_D}$	**Nº de medidas**
Menor del 2%	Basta con las 3 medidas
Entre el 2% y el 8 %	Se toman 6 medidas
Entre el 8% y el 15%	Se toman 15 medidas
Mayor del 15%	Se toman 50 medidas (mínimo)

Por lo general, si la tasa de desviación es superior al 15% se suele descartar el conjunto de medidas y repetir el experimento de manera más cuidadosa y procurando minimizar cualquier tipo de error (aparatos más sensibles, muestras aisladas de las vibraciones, etc). En caso de que el carácter del experimento haga que las medidas difieran de modo natural entre sí, se efectuará un conjunto elevado de mediciones.

Una vez que sabemos cuántas medidas hemos de realizar según la tabla anterior, nos queda dar un valor del error asociado a la media aritmética de nuestras medidas. Para ello calculamos un parámetro estadístico denominado **desviación típica muestral**:

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Por tanto el error vendrá dado por

$$\sigma_n = \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{2}$$

Este es el error asociado a una lectura que consta de n medidas. Luego podemos reducir el error haciendo un mayor número de medidas.

Concluimos entonces que la expresión final al medir una magnitud física a partir de n mediciones (con n determinado por la tabla anterior), queda como:

$$\boxed{x = x_0 \pm \sigma_n}$$

donde x_0 es la media aritmética dada por la ecuación (1) y σ_n es el error dado por la ecuación (2).

8.3 Medidas indirectas. Propagación de errores:

Se dice que una medida es indirecta cuando el valor no se obtiene directamente de la lectura de un instrumento, sino que se calcula a partir de la lectura de uno o varios instrumentos que miden otras magnitudes relacionadas de alguna manera con la que se está midiendo.

Cada una de estas medidas directas originales tendrá asociada un error como los que hemos tratado anteriormente. El resultado de estas cantidades tendrá también, por tanto, un error que dependerá de los errores originales y de la naturaleza de las operaciones que se hayan realizado con ellas.

Para entender cómo se puede estimar el error de las medidas indirectas consideremos cierta magnitud física u que se calcula en función de otras magnitudes físicas x, y, z, que se pueden medir directamente. Podremos escribir entonces que

$$u = u(x, y, z) \tag{3}$$

Las medidas directas y sus errores respectivos se habrán determinado como se ha indicado anteriormente, de modo que serán conocidos

$$x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, z \pm \Delta z$$

y lo que se pretende es determinar el valor u y el error de u

$$u \pm \Delta u$$

El valor de u se calcula simplemente sustituyendo en su expresión (3) los valores medios de x, y, z. Para determinar el valor del error Δu, tendremos en cuenta que el valor de u cuando el valor de x cambia en una unidad es, en el límite, $\frac{\partial u}{\partial x}$. Si el valor medido de x se desvía como máximo en Δx de su valor verdadero, siendo Δx relativamente pequeño, entonces u se desviará del suyo como máximo

$$\Delta u_x = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \Delta x$$

Lo mismo se puede decir para las componentes del error de u relacionadas con las magnitudes x, y:

$$\Delta u_y = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \Delta y, \quad \Delta u_z = \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \Delta z$$

En el peor de los casos, la máxima desviación del valor que se ha calculado para u con respecto a su valor verdadero, es decir, el error de la medida indirecta, será:

$$\boxed{\Delta u = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \Delta u_z} \tag{4}$$

Por tanto tenemos que la expresión final de u será

$$\boxed{u \pm \Delta u}$$

Con Δu dado por la expresión (4).