

Relación de ejercicios del tema 4

Asignatura: Curvas y Superficies. Grado en Matemáticas. Grupo: 2⁰-B

Profesor: Rafael López Camino

1. Si f es una homotecia de \mathbb{R}^3 , S una superficie y α una geodésica de S , estudiar si $f \circ \alpha$ es una geodésica de $f(S)$.
2. Hallar la curvatura normal, geodésica y torsión geodésica del paralelo $\mathbb{S}^2 \cap \{z = a\}$.
3. Hallar la curvatura normal, geodésica y torsión geodésica de la hélice $\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t), at)$ en el cilindro $x^2 + y^2 = r^2$. Estudiar el caso $a = 0$.
4. Estudiar si la intersección de la superficie $z = xy$ con los planos $x = ct$ e $y = ct$ son geodésicas. Hallar la curvatura normal, geodésica y torsión geodésica de la curva $\alpha(t) = (t, t, t^2)$.
5. Probar que en una superficie de revolución, los meridianos son geodésicas y que los paralelos cuya recta tangente es paralela al eje de revolución también son geodésicas.
6. Hallar la curvatura normal, geodésica y torsión geodésica de un paralelo de una superficie de revolución.
7. Hallar la curvatura normal, geodésica y torsión geodésica de un meridiano de una superficie de revolución.
8. Se consideran el helicoides H dado por $X(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y la catenoide C definida por $Y(u, v) = (\cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v), u)$, $(u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$. Probar que la aplicación $\phi : H \rightarrow C$, $\phi = Y \circ F \circ X^{-1}$, donde $F(u, v) = (\text{arc sinh}(u), v)$ es una isometría local.
9. Hallar la curvatura normal, geodésica y torsión geodésica de la intersección de la superficie $z = x^2 - y^2$ con el plano $y = 0$. Lo mismo para la curva $\alpha(t) = (t, t, 0)$.
10. Se consideran las aplicaciones $X(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), \log(u))$, $u > 0$, $v \in (0, 2\pi)$ e $Y(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sean $S = X(\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi))$ y $\bar{S} = Y(\mathbb{R}^2)$. Probar que S y \bar{S} son superficies y que X e Y son parametrizaciones de cada una de ellas. Probar que $\phi : S \rightarrow \bar{S}$, $\phi = Y \circ X^{-1}$ no es una isometría local pero $K = \bar{K} \circ \phi$.

11. Sea $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ una curva regular y embebimiento y $S = \alpha(I) \times \mathbb{R}$. Probar que S es isométrica a un plano y hallar sus geodésicas. Deducir que la superficie $x = y^2$ es isométrica a un plano.
12. Probar que el cono $S : x^2 + y^2 = z^2, z > 0$ es localmente isométrico a un plano. Definir una isometría de S menos un meridiano en un abierto de un plano. Deducir las geodésicas de S .
13. Generalizar el ejercicio anterior para una superficie de revolución generada por una recta. Probar que es localmente isométrica a un plano.
14. Hallar la curvatura geodésica de cada una de las intersecciones del hiperboloide reglado $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ con los planos coordenados.
15. Hallar la curvatura geodésica de la intersección del hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ con el plano de ecuación $x = \sqrt{3}$.
16. Si dos geodésicas en una superficie son tangentes en un punto en común, probar que una es una reparametrización de la otra.
17. Si α es una curva regular en \mathbb{R}^3 , estudiar si α es una geodésica en la superficie (parametrizada) tangente $X(s, t) = \alpha(s) + t\alpha'(s)$.
18. Si una recta está contenida en una superficie, probar que es una geodésica y una línea asintótica.
19. Si α es una geodésica de una superficie con $\sigma_{\alpha(s)}(\alpha'(s), \alpha'(s)) = 0$ para todo s , probar que α es una recta.
20. Probar que si todas las geodésicas de una superficie son curvas planas, entonces la superficie es un abierto de un plano o de una esfera.
21. Sean S y S' dos superficies que se intersecan en una curva regular α de forma que S y S' son tangentes a lo largo de α . Se orientan ambas superficies para que las orientaciones coincidan a lo largo de α . Probar que la curvatura geodésica de α para S y S' coinciden. En particular, α es una geodésica para S sii lo es para S' .
22. Demostrar que un difeomorfismo $f : S \rightarrow S'$ es una isometría si y sólo si la longitud de cualquier curva en S es igual a la longitud de la imagen de la curva mediante f .
23. En un cilindro recto $S = \{p + ta : p \in C, t \in \mathbb{R}\}$, donde C es una curva plana y a un vector perpendicular a dicho plano, hallar las geodésicas de S usando parametrizaciones.

24. (a) Definir una isometría entre una banda del plano y un cilindro menos un meridiano. Probar que dicha isometría no es la restricción de un movimiento rígido del espacio \mathbb{R}^3 .
- (b) Se considera el cilindro vertical $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y la aplicación $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y, z) = (x, -y, -z)$. Probar que $F|_S : S \rightarrow S$ es una isometría con dos únicos puntos fijos.
25. Probar que la esfera, el plano y la superficie $z = xy$ no son localmente isométricos entre sí.
26. Si $f : S \rightarrow S'$ una isometría local, probar que $d'(f(p), f(q)) \leq d(p, q)$, $p, q \in S$.
27. Para una parametrización $X = X(u, v)$ en una superficie, hallar los símbolos de Christoffel en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental.

De exámenes pasados

1. Para la campana de Gauss $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{-x^2-y^2}\}$, y si $a \in (0, 1)$, estudiar si la curva $C = S \cap \{z = a\}$ es una geodésica.
2. Sea S una superficie llana y S' una superficie cuya curvatura de Gauss se anula sólo en una cantidad finita de puntos. ¿Puede existir una isometría local entre S y S' ?
3. Se considera la catenoide $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \cosh^2(z)\}$ y Π el plano $x = 0$. Probar que la aplicación $f : \Pi \rightarrow S$ dada por

$$f(0, y, z) = (\cosh(z) \cos(y), \cosh(z) \sin(y), z)$$

es un difeomorfismo local cuya diferencia conserva ángulos y estudiar si es una isometría local. Si $\gamma : I \rightarrow \Pi$ es una geodésica en Π , estudiar en qué casos $f \circ \gamma$ es una geodésica de S .

4. Para cada $a \geq 1$, se considera el elipsoide $S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + az^2 = 1\}$. Estudiar si la curva $C = S \cap \{z = 0\}$ es una geodésica.
5. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ una curva p.p.a. y un embebimiento. Hallar K y H del cono $S = \{t\alpha(s) : t > 0, s \in I\}$. Probar que S es minimal si y sólo si α es una geodésica de \mathbb{S}^2 . Probar que dos conos S_α y S_β son isométricos.

6. Se considera el helicoides S de ecuación $x \sin(z) = y \cos(z)$. Para $\theta \in \mathbb{R}$, probar que $f_\theta : S \rightarrow S$ dada por

$$f_\theta(x, y, z) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z + \theta)$$

es un isometría. Si $p = (1, 0, 0)$, estudiar si $\alpha(\theta) = f_\theta(p)$ es una geodésica e S .