GEOMETRÍA II. Examen del Tema 2

– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –

Curso 2015/16

Nombre:

---

1. En cada caso, probar la afirmación o dar un ejemplo de que es falsa
   (a) Dos vectores distintos, perpendiculares y no nulos son linealmente independientes.
   (b) Sean $U, W \subset \mathbb{R}^4$ ambos de dimensión 2 y $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Si g es una métrica en $\mathbb{R}^4$ tal que $g_{|U}$ y $g_{|W}$ son degeneradas, entonces $(\mathbb{R}^4, g)$ es degenerada.
   (c) Si U es un subespacio vectorial de (V, g), entonces $(U^\perp)^\perp = U$.

2. Se considera el espacio métrico $(\mathbb{R}^4, g)$, donde

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Si $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0, z + t = 0\}$, hallar una base conjugada de $U^\perp$.

3. En $\mathbb{R}^3$, sean $U =< (1, 0, 0) >$ y $W =< (1, 1, 0), (1, 1, 1) >$. Hallar, si es posible, $M_{B_u}(g)$ de una métrica g en $\mathbb{R}^3$ tal que $g_{|U}$ y $g_{|W}$ son definidas negativas y $\sigma(g) = (1, 2)$.

4. Para la forma cuadrática $\phi(x, y, z) = axz + ay^2 + az^2$, hallar una matriz P regular tal que $P^t M_{B_u}(\phi) P$ sea diagonal y hallar $\sigma(\phi)$ según el parámetro a.

Importante: razonar todas las respuestas

Soluciones

1. (a) Falsa. En $\mathbb{R}^2$ con la métrica de Lorentz-Minkowski, los vectores $(1,1)$ y $(2,2)$ son perpendiculares pero son proporcionales.

   (b) Falsa. Basta encontrar una matriz simétrica con determinante no nulo y las submatrices de orden 2 en las dos esquinas sean cero: sea

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Entonces $U =< e_1, e_2 >$ y $W =< e_3, e_4 >$ satisface las condiciones, las matrices de las métricas $g_{|U}$ y $g_{|W}$ en las bases anteriores son $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (degeneradas) pero el determinante de $M_{B_u}(g)$ es -1.

   (c) Falsa. En $\mathbb{R}^2$ con la métrica $M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, sea $U =< e_1 >$. Entonces $U^\perp =< e_2 >= R(g)$ y $R(g)^\perp = \mathbb{R}^2$.

2. Una base de U es $\{e_1 = (1,-1,0,0), e_2 = (0,0,1,-1)\}$. Entonces $A.e_1 = (1,-1,-1,-3)$, $A.e_2 = (-1,-3,1,-2)$, luego $U^\perp = \{(x,y,z,t) : X^t.A.e_1 = 0, X^t.A.e_2 = 0\} = \{(x,y,z,t) : x - y - z - 3t = 0, -x - 3y + z - 2t = 0\}$. Damos valores a z y t, exactamente $(1,0)$ y $(0,1)$, obteniendo, respectivamente, $(1,0,1,0)$ y $(7/4,-5/4,0,1)$, luego $U^\perp =< v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (7,-5,0,4) >$. Si $B' = \{v_1, v_2\}$, entonces

$$M_{B'}(g_{U^\perp}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

   Como ya es diagonal, una base conjugada es $\{v_1, v_2/\sqrt{14}\}$.

3. Tomamos $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ y definimos

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ a & -1 & 0 \\ b & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   De esta manera las métricas $g_{|U}$ y $g_{|W}$ son definidas negativas pues sus expresiones matriciales son diagonales formadas sólo por -1: para U es el elemento $(1,1)$, es decir, (-1), y para W la submatriz 2×2 de la esquina inferior derecha, que es menos la identidad.

Empezamos a diagonalizar por congruencias mediante $F_{21}(a)$ y $F_{31}(b)$ y lo mismo con las columnas:

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+a^2 & ab \\ 0 & ab & -1+b^2 \end{pmatrix}.$$

Como queremos que la signatura de la métrica sea $(1,2)$, basta con que la matriz anterior sea diagonal y que tengamos en la diagonal principal un signo positivo y dos negativos. Tomamos $b=0$ y hacemos que $-1+a^2>0$. Tomamos $a=2$, y la métrica buscada es

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente $M_{B_u}(g) = P^t M_B(g) P$, donde $P = M(1_V, B_u, B)$.

$$P = M(1_V, B_u, B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Tenemos

$$M_{B_u}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a/2 \\ 0 & a & 0 \\ a/2 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Si $a=0$, entonces $g=0$ y la signatura es $(0,0)$. Suponemos que $a\neq 0$. Hacemos las siguientes operaciones: F_{12} y C_{12} y luego F_{23} y C_{23}, obteniendo

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{a}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, $F_{32}(-1/2)$ y $C_{32}(-1/2)$ y así

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a}{4} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, si $a>0$ la signatura es $(2,1)$ y si $a<0$, es $(1,2)$. La matriz P es la que resulta de hacerle a la matriz identidad las correspondientes operaciones por columnas

$$I \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$