Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 14 de septiembre de 2021
Actualización: 14/09/2021, hora: 17:01:56

Ejercicio resuelto 1. Según el parámetro $a \in \mathbb{R}$, estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada a trozos como

$$f(x) = \begin{cases} a + \sin(x^2+1), & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0. \end{cases}$$

Solución. Nos preguntan *en qué puntos la función $f(x)$ es continua*. Sin embargo, la existencia de un parámetro nos indica que tenemos muchos (infinitos) problemas, porque a cada valor que se le a a (por ejemplo $a = 3$), tenemos un problema diferente. No nos pregunta cuando a toma un valor particular, digamos $a = 7$, sino que a es *arbitrario*.

Como la función está definida a trozos. La continuidad es una cuestión local, lo que le pasa a la función alrededor de un punto. Está claro que el punto $x = 0$ es especial porque a la derecha y a la izquierda del mismo, el comportamiento es diferente.

1. Case $x_0 > 0$. De nuevo, la cuestión es local, y está claro que f alrededor de x_0 es la función $a + \sin(x^2 + 1)$. Según la definición de continuidad, hay que hallar el límite, el valor de la función en el punto y estudiar si son iguales.

   Como las funciones involucradas son polinomios y trigonométricas, y todas continuas, el límite en x es evaluar. Así
   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = a + \sin(x_0^2 + 1).$$
   Por otro lado, $f(x_0) = a + \sin(x_0^2 + 1)$. Son iguales, luego f es continua (independientemente de a):

2. Caso $x_0 < 0$. Ahora la función es e^x, luego
   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = e^{x_0},$$
   que es $f(x_0)$, luego coincide y f es continua en x_0 (independientemente de a).

3. Caso $x_0 = 0$. Para hallar los límites no basta con evaluar, porque la función a los dos lados de 0 es <u>diferente</u>. <u>Por esta razón</u>, hallamos los límites laterales, donde la función sí está controlada.
   $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} a + \sin(x^2 + 1) = a + \sin(1).$$
   $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1.$$
   Siguiendo la teoría, para que haya límite los límites laterales deben ser iguales, luego
   $$a + \sin(1) = 1.$$

De aquí concluimos que $a = 1 - \sin(1)$, es decir, *sólo hay límite en* $x = 0$ *cuando* $a = 1 - \sin(1)$, y en tal caso, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Para acabar con la continuidad, el límite debe ser igual que el valor de la función en $x = 0$. Ya que $f(0) = 1 + \sin(0^2 + 1) = 1 - \sin(1) + \sin(1) = 1$, entonces f es continua.

Conclusión: la función es continua en todos los puntos distintos de $x = 0$, independientemente del parámetro a. En $x = 0$, sólo es continua si $a = 1 - \sin(1)$.
♣ El razonamiento se puede simplificar observando que la función es continua ciertos intervalos abiertos, y reduciendo el trabajo sólo en $x = 0$. □

Modificamos un poco el ejercicio anterior, cambiando el valor de $f(x)$ en $x = 0$.

Ejercicio resuelto 2. Según el parámetro $a \in \mathbb{R}$, estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada a trozos como

$$f(x) = \begin{cases} a + \sin(x^2 + 1), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ e^x, & x < 0. \end{cases}$$

Solución. Todo sigue parecido. Para los puntos $x > 0$ y $x < 0$, tenemos la misma conclusión, y la función es continua en dichos puntos.

Ahora el valor de la función ha cambiado en $x = 0$. Primero calculamos el límite de f en $x = 0$. Esto es lo mismo, obteniendo que sólo hay límite si $a = 1 - \sin(1)$, y este límite es 1. Ahora tenemos que ver la igualdad

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Pero $f(0) = 0$, luego la función no es continua en $x = 0$.

Conclusión: la función es continua en todos los puntos distintos de 0 para cualquier valor del parámetro a. En $x = 0$, la función no es continua (aunque tiene límite). Esta discontinuidad es evitable, porque si definimos ahora la función

$$g(x) = \begin{cases} a + \sin(x^2 + 1), & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ e^x, & x < 0, \end{cases}$$

entonces g es continua en $x = 0$ y coincide con f en todos los puntos excepto en $x = 0$. □

Ejercicio resuelto 3. Estudiar la continuidad de la función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada a trozos como

$$f(x) = \begin{cases} x^{\sin(x)} - x^{e^x}, & x > 1 \\ 4, & x = 1 \\ \frac{(x+1)(x-2)}{x^2}, & x \in (0, 1) \\ 5, & x = 0. \end{cases}$$

Solución. La función está definida a trozos y en cada uno de los intervalos $(1, \infty)$, $(0, 1)$ y $(-\infty, 0)$, la función está definida por funciones continuas. Por tanto, en todos los puntos de dichos intervalos, la función es continua. Falta estudiar los puntos $x = 0$ y $x = 1$. Primero hallamos los límites, y ya que la función se comporta diferente a un lado que a otro de dichos puntos, hacemos límites laterales.Al hallar los límites laterales, las funciones son continuas a ambos lados, luego el límite es sustituir.

1. Caso $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} x^{\sin(x)} - x^{e^x} = 1^{\sin(1)} - 1^{e^1} = 1 - 1 = 0.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} = \frac{2\cdot(-1)}{1^2} = -2.$$

   Los límites son diferentes, luego no hay límite, y por tanto, f es discontinua en $x = 1$.

2. Caso $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} = -\infty.$$

   Aquí vemos que el denominador, cerca de $x = 0$ es positivo. Para el numerador, $x+1$ es positivo, y $x-2$ es negativo. Por ello sale $-\infty$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} = -\infty.$$

   La razón es la misma. Como el límite es infinito, entonces no hay límite, luego la función no es continua en $x = 0$.

♣ Si la función fuera $g(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x}$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)(x-2)}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{(x+1)(x-2)}{x} = +\infty.$$