Alumno:____ **DNI:**____________

Fundamentos Lógicos de la Programación

Ingeniería Informática de Sistemas (grupo A)

Final (30/06/09)

1. De los siguientes grupos de fórmulas proposicionales, ¿cuál verifica que $v(\alpha) \cdot v(\beta) = 1 + v(\gamma)$?

    a) $\alpha = a$, $\beta = \neg b$, $\gamma = a \vee \neg b$.

    b) $\alpha = a \vee \neg b$, $\beta = b \leftrightarrow c$, $\gamma = a \to c$.

    c) $\alpha = a \to (\neg b \vee c)$, $\beta = \neg c \to (a \wedge b)$, $\gamma = \neg c$.

    d) $\alpha = a \to \neg b$, $\beta = \neg a \wedge b$, $\gamma = a \to b$.

2. Si Γ es un conjunto de proposiciones y $\Gamma \models \neg(a \to b) \to (\neg c \to \neg d)$, entonces:

    a) $\Gamma, \neg(a \to b) \models d \to c$

    b) $\Gamma, \neg(a \to b), \neg d \models \neg c$

    c) $\Gamma, \neg c \to \neg d \models \neg(a \to b)$

    d) $\Gamma, \neg(a \to b), \neg c \models d$

3. Considerar los siguientes conjuntos de cláusulas proposicionales:

   a) $\Sigma_1 = \{a \vee b, \neg a \vee b, a \vee \neg b, \neg a \vee \neg b, c \vee \neg d, \neg c \vee d\}$
   b) $\Sigma_2 = \{a \vee b, a \vee \neg b, \neg a \vee \neg c \vee d, c \vee \neg d\}$
   c) $\Sigma_3 = \{a \vee b \vee \neg c, \neg a \vee \neg b \vee c\}$

   Basándose exclusivamente en el algoritmo de Davis y Putnam para dar la respuesta, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera y por qué?

   a) Σ_1 y Σ_2 son insatisfacibles.
   b) Σ_1 es insatisfacible y tanto Σ_2 como Σ_3 son satisfacibles.
   c) Σ_3 es insatisfacible y tanto Σ_2 como Σ_1 son satisfacibles.
   d) Σ_3 y Σ_2 son insatisfacibles.

4. Dado el lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$ con símbolos de constante a y b, símbolos de función sum^2 y $prod^2$ (ambos binarios) y símbolos de predicado pr^1, p^1 y eq^2, consideramos la estructura $\mathbf{A}$ para $\mathbf{L}$ dada por:

   - $A = \mathbb{N}$
   - $(a)^{\mathbf{A}} = 0$, $(b)^{\mathbf{A}} = 1$
   - $(sum)^{\mathbf{A}}(x, y) = x + y$, $(prod)^{\mathbf{A}}(x, y) = x \cdot y$
   - $(p)^{\mathbf{A}} = \{x\colon x \in \mathbb{N}, x \text{ es par}\}$, $(pr)^{\mathbf{A}} = \{x\colon x \in \mathbb{N}, x \text{ es primo}\}$, $(eq)^{\mathbf{A}} = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbb{N}, x = y\} = \Delta(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$

   Elige qué fórmula de las siguientes significa que "todo número par es múltiplo de 2"

   a) $\forall x \exists y (p(x) \to eq(x, prod(y, sum(b, b))))$.
   b) $\forall x \exists y (p(x) \to eq(y, prod(x, sum(b, b))))$.
   c) $\exists x \forall y (p(x) \to eq(x, prod(y, sum(b, b))))$.
   d) $\forall x \exists y (p(x) \leftrightarrow eq(x, prod(y, sum(b, b))))$.

5. Para un lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$ se considera la interpretación $\langle \mathbf{A}, s\rangle$ dada por:

- $A = \mathbb{N}$,
- $(f)^{\mathbf{A}} \colon A \to A$ definida por $(f)^{\mathbf{A}}(x) = 2x + 1$, para todo $x \in A$,
- $(p)^{\mathbf{A}} = \{x \colon x \in A,\ x \text{ es primo}\}$ y
- s una asignación (de V en A) fija pero arbitraria con la única condición de cumplir $s(x) = 3$.

(Se recuerda que 1 por definición no es un número primo)

¿Cuál de las siguientes fórmulas de $\mathbf{L}$ es verdadera bajo la interpretación dada?

a) $p(x) \to \forall x(p(x) \vee \neg p(f(x)))$,
b) $p(x) \to \exists x \neg p(f(f(x)))$,
c) $\forall y(p(y) \to p(f(y)))$,
d) $\forall y(p(x) \to p(y))$.

6. ¿Cuál de las siguientes fórmulas es equivalente a la fórmula

$$\forall x(\forall x r(x, y) \to \exists y r(x, f(y)))\ ?$$

a) $\forall x \exists w \exists y(r(w, y) \to r(x, f(y)))$
b) $\forall x \forall z(r(x, y) \to r(x, f(z)))$
c) $\forall x \exists y(r(x, z) \to r(x, f(y)))$
d) $\forall x \exists w(r(w, y) \to r(x, f(w)))$

7. Dados los literales $p(g(f(x),u),f(a),g(z,f(y)))$ y $p(g(f(f(y)),g(v,a)),f(v),g(g(x,b),x))$, di cuales de las siguientes sustituciones es un unificador de máxima generalidad o principal.

   a) $(v|a)(u|g(v,a))(z|g(a,b))(x|a)$.
   b) $(v|a)(u|g(a,a))(z|g(f(b),b))(y|b)(x|f(b))$.
   c) $(v|a)(u|g(a,a))(z|g(x,b))(x|f(u))$.
   d) $(z|g(f(y),b))(v|a)(u|g(a,a))(x|f(y))$.

8. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de cláusulas es satisfacible?

   a) $\{p(x,f(x),g(y)) \vee p(f(y),z,f(z)),\ \neg p(x,f(y),x)\}$
   b) $\{p(x,f(x),y) \vee p(f(y),z,g(y)),\ \neg p(x,y,z)\}$
   c) $\{p(f(x),g(y),f(z)) \vee p(x,y,z),\ \neg p(f(a),g(b),z)\}$
   d) $\{p(x,f(x),f(f(x))) \vee p(f(x),x,f(x)),\ \neg p(f(y),x,f(x))\}$

9. Supongamos dado un conjunto de cláusulas, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \{\sigma_0\}$, cumpliendo las siguientes condiciones:

- σ_0 es una cláusula negativa.
- Σ_1 es un conjunto no vacío de cláusulas de Horn.
- ninguna cláusula de Σ_1 es unitaria.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera y por qué?

a) Σ es satisfacible.

b) Σ es insatisfacible.

c) Si además de las tres condiciones que cumple Σ cumple también que es finito, entonces seguro que es insatisfacible.

d) Con las condiciones que enumera el enunciado y que se dice que cumple Σ, no es suficiente para saber si es satisfacible o insatisfacible.

10. Consideremos las siguientes cláusulas en el lenguaje de primer orden apropiado:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \neg p(x, f(b,x)) \vee q(x) \vee q(a)\\ \gamma_2 &= \quad p(h(z), w) \vee \neg q(h(y))\end{aligned}$$

¿Ocurre que $\gamma_1, \gamma_2 \vdash_{rcv} \square$?

a) Sí, pues por una parte las fórmulas atómicas $q(x)$, $q(h(y))$ y $q(a)$ son unificables, y por otra las fórmulas $p(x, f(b,x))$, $p(h(z), w)$ también lo son.

b) No ocurre, aunque si en lugar de a en γ_1 estuviese el símbolo de variable u, sí ocurriría pues $\neg p(x, f(b,x)) \vee q(x)$ es un factor de $\neg p(x, f(b,x)) \vee q(x) \vee q(u)$.

c) No, pues hay una estructura, con dominio los números naturales, en la que las dos fórmulas se interpretan como ciertas.

d) Sí, debido a que no hay variables comunes en las dos fórmulas