Capítulo 3

Resolución

3.1. Algoritmo de Unificación

El método descrito en el capítulo anterior para determinar si una fórmula es consecuencia de un conjunto finito de hipótesis es inutilizable una vez que hemos de manejar una decena de fórmulas. Ello es debido a que se trata de encontrar una contradicción con átomos de Herbrand obtenidos reemplazando variables por términos de forma absolutamente no sistemática.

Esta idea de hacer coincidir átomos los unos con los otros para encontrar más rápidamente contradicciones, es la idea que sustenta la resolución con variables y que estudiaremos después.

El hacer conincidir átomos por medio de una buena elección de términos que sustituyen variables es *la unificación*. Se trata de una idea muy vieja en lógica matemática puesto que aparece en la tesis de Herbrand, en 1930. No obstante su utilización como elemento fundamental de un "algoritmo" de demostración automática de teoremas, y como herramienta privilegiada de la programación lógica es debida a J.A. Robinson en el año 1965.

Definición 3.1.1. Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje de primer orden. Una *sustitución elemental* es cualquier expresión de forma $(x|t)$, donde x es un símbolo de variable y t es término de $\mathbf{L}$. Si φ es una fórmula de $\mathbf{L}$, $(x|t)\varphi$ representa la fórmula obtenida reemplazando todas las ocurrencias libres de x en φ por t, es decir, $(x|t)\varphi$ representa ahora la fórmula φ^x_t. Una sustitución elemental $(x|t)$ es una *sustitución elemental de renombramiento* si t es un símbolo de variable.

Ejemplo 3.1.1. Sea la sustición elemental $(x|f(y, g(a)))$ y la fórmula $(p(u) \to r(x))$. Entonces $(x|f(y, g(a)))(p(u) \to r(x))$ es la fórmula $(p(u) \to r(f(y, g(a))))$.

Definición 3.1.2. Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje de primer orden. Una *sustitución* Φ es cualquier transformación de fórmulas de $\mathbf{L}$ en fórmulas de $\mathbf{L}$ que aplica φ en $c_1 \dots c_n\varphi$, donde $c_1, \dots, c_n$ son sustituciones elementales. La sucesión finita $c_1, \dots, c_n$ se denomina *descomposición* de Φ y ello nos lleva a representar a Φ como $[c_1 \dots c_n]$. La sustitución identidad será representada como ϵ o simplemente $[\ ]$. Una sustitución $[c_1 \dots c_n]$ es una *sustitución de renombramiento* si para todo $1 \le i \le n$, c_i es una sustitución elemental de renombramiento.

Ejemplo 3.1.2. Tomemos $\Phi = [(x|f(a))(y|f(x))]$ como sustitución y $p(x, y)$ como fórmula.

$$\begin{aligned}\Phi p(x, y) &= (x|f(a))(y|f(x))p(x, y)\\ &= (x|f(a))p(x, f(x))\\ &= p(f(a), f(f(a)))\end{aligned}$$

Observación 3.1.1.

1. En general no es cierto que $[c_1c_2] = [c_2c_1]$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(y|f(x))(x|f(a))p(x,y) &= (y|f(x))p(f(a),y) \\ &= p(f(a),f(x)) \\ &\neq p(f(a),f(f(a))) \\ &= (x|f(a))(y|f(x))p(x,y)\end{aligned}$$

2. La descomposición de una sustitución en sustituciones elementales no es en general única:
    - $[(x|y)(z|y)] = [(z|y)(x|y)]$
    - $[(x|t)(y|t)(z|t)] = [(x|t)(y|x)(z|x)]$

Definición 3.1.3. Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ fórmulas atómicas de un lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$. Una sustitución Φ es un *unificador* de $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ si, y sólo si, por definición se cumple:

$$\Phi\varphi_1 = \Phi\varphi_2 = \cdots = \Phi\varphi_m$$

Ejemplo 3.1.3. Sea $\varphi_1 = p(x,z)$, $\varphi_2 = p(f(y),g(a))$ y $\varphi_3 = p(f(u),z)$. La sustitución $\Phi_1 = [(x|f(u))(y|u)(z|g(a))]$ es un unificador porque:

$$\Phi_1\varphi_1 = \Phi_1\varphi_2 = \Phi_1\varphi_3 = p(f(u),g(a))$$

La sustitución $\Phi_2 = [(u|f(a))]\Phi_1$ es también un unificador de φ_1, φ_2 y φ_3 porque:

$$\Phi_2\varphi_1 = \Phi_2\varphi_2 = \Phi_2\varphi_3 = p(f(f(a)),g(a))$$

Observación 3.1.2.

1. Es claro que si Φ es un unificador de un conjunto finito de fórmulas atómicas, para cualquier sustitución Ψ se cumple que $\Psi\Phi$ es un unificador de dicho conjunto de fórmulas.

2. Para ciertos conjuntos finitos de fórmulas atómicas no existe unificador. Por ejemplo, para $\varphi_1 = p(x,y)$ y $\varphi_2 = r(f(t),y)$, lo cual resulta evidente dado que los símbolos de predicado son distintos; pero aún evitando esta eventualidad es posible encontrar ejemplos de fórmulas atómicas sin unificador. El siguiente es uno: $\varphi_1 = p(x,f(x))$ y $\varphi_2 = p(f(y),y)$.

Dado un conjunto finito de fórmulas atómicas es posible determinar si son unificables y caso de serlo encontrar un unificador. Seguidamente damos una explicación algorítmica de como llevar a cabo dicha tarea.

ALGORITMO DE UNIFICACIÓN DE *2* FÓRMULAS ATÓMICAS

Input: fórmulas atómicas φ_1 y φ_2.
Output: Respuesta a la pregunta de si son unificables φ_1 y φ_2 y un unificador en caso afirmativo.

- $\Phi \leftarrow \epsilon$.-

- mientras que $\Phi\varphi_1 \neq \Phi\varphi_2$, hacer

    - determinar el símbolo más a la izquierda de $\Phi\varphi_1$ que es diferente de su homólogo en $\Phi\varphi_2$.-

- determinar los subtérminos de $\Phi\varphi_1$ y $\Phi\varphi_2$, t_1 y t_2 respectivamente, que comienzan en los símbolos determinados en el paso anterior.-
- si "ninguno de los términos es una variable" o "uno es una variable que está contenida en el otro"
  - Imprimir "φ_1 y φ_2 no son unificables"; detenerse.-

  en otro caso
  - determinar x un símbolo de variable entre t_1 y t_2.-
  - determinar t entre t_1 y t_2 que no es x.-
  - hacer $\Phi \leftarrow (x|t)\Phi$.-
- fin–de–si.-

* fin–mientras–que.-
* imprimir "Φ es un unificador de φ_1 y φ_2".-
* concluir.-

Ejemplo 3.1.4.

$\Phi\varphi_1$	$\Phi\varphi_2$	Φ
$\underset{\uparrow}{p}(x, f(x), a)$	$\underset{\uparrow}{p}(u, w, w)$	$\Phi \leftarrow \epsilon$
$p(\underset{\uparrow}{x}, f(x), a)$	$p(\underset{\uparrow}{u}, w, w)$	$\Phi \leftarrow [(x\|u)]$
$p(u, \underset{\uparrow}{f}(u), a)$	$p(u, \underset{\uparrow}{w}, w)$	$\Phi \leftarrow [(w\|f(u))(x\|u)]$
$p(u, f(u), \underset{\uparrow}{a})$	$p(u, f(u), \underset{\uparrow}{f}(u))$	**fallo**

El fallo es debido a que ni a ni $f(u)$ es un signo de variable; $p(x, f(x), a)$ y $p(u, w, w)$ no son unificables.

Ejemplo 3.1.5.

$\Phi\varphi_1$	$\Phi\varphi_2$	Φ
$\underset{\uparrow}{p}(x, f(g(x)), a)$	$\underset{\uparrow}{p}(b, y, z)$	$\Phi \leftarrow \epsilon$
$p(\underset{\uparrow}{x}, f(g(x)), a)$	$p(\underset{\uparrow}{b}, y, z)$	$\Phi \leftarrow [(x\|b)]$
$p(b, \underset{\uparrow}{f}(g(b)), a)$	$p(b, \underset{\uparrow}{y}, z)$	$\Phi \leftarrow [(y\|f(g(b)))(x\|b)]$
$p(b, f(g(b)), \underset{\uparrow}{a})$	$p(b, f(g(b)), \underset{\uparrow}{z})$	$\Phi \leftarrow [(z\|a)(y\|f(g(b)))(x\|b)]$

Las fórmulas $p(x, f(g(x)), a)$ y $p(b, y, z)$ son unificables y $[(z|a)(y|f(g(b)))(x|b)]$ es un unificador.

Ejemplo 3.1.6.

$\Phi\varphi_1$	$\Phi\varphi_2$	Φ
$\underset{\uparrow}{p}(x, f(x))$	$\underset{\uparrow}{p}(f(y), y)$	$\Phi \leftarrow \epsilon$
$p(\underset{\uparrow}{x}, f(x))$	$p(\underset{\uparrow}{f}(y), y)$	$\Phi \leftarrow [(x\|f(y))]$
$p(f(y), \underset{\uparrow}{f}(f(y)))$	$p(f(y), \underset{\uparrow}{y})$	**fallo**

El fallo es debido a que y es un símbolo de variable presente en el término $t = f(f(y))$; así $p(x, f(x))$ y $p(f(y), y)$ no son unificables.

ALGORITMO DE UNIFICACIÓN DE m FÓRMULAS ATÓMICAS
Input: fórmulas atómicas $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ $(2 \leq m)$.
Output: Respuesta a la pregunta de si son unificables $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ y un unificador Φ en caso de respuesta afirmativa.-

- Para i desde 1 hasta $m - 1$ hacer
  - si $\Phi_{i-1}\Phi_{i-2}\cdots\Phi_1\varphi_i$ y $\Phi_{i-1}\Phi_{i-2}\cdots\Phi_1\varphi_{i+1}$ son unificables
    1. determinar un unificador Φ_i.-
    2. en otro caso imprimir "$\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ no son unificables"; concluir.-
  - fin–de–si.-
- fin–de–para.-
- $\Phi \leftarrow \Phi_{m-1}\cdots\Phi_1$.-
- imprimir "Φ es un unificador de $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$".-
- concluir.-

Ejemplo 3.1.7. Sean $m = 3$, $\varphi_1 = p(x, y)$, $\varphi_2 = p(f(z), x)$ y $\varphi_3 = p(w, f(x))$:

- $\Phi_1 = (y|f(z)(x|f(z))$ es un unificador de $\varphi_1 = p(x, y)$, $\varphi_2 = p(f(z), x)$
- $\Phi_1 p(f(z), x) = p(f(z), f(z))$
  $\Phi_1 p(w, f(x)) = p(w, f(f(z)))$
- fracaso porque $p(f(z), f(z))$ y $p(w, f(f(z)))$ no son unificables.

Observación 3.1.3. Es preciso prestar ateción, cuando se unifica por este método, para no olvidarse de aplicar $\Phi_{i-1}\Phi_{i-2}\cdots\Phi_1$ a las fórmulas atómicas no unificadas aún antes de aplicarles el algoritmo de unificación. En el ejemplo precedente, si no hubieramos aplicado Φ_1 a $p(w, f(x))$, la segunda etapa de unificación hubiera sido posible (porque $p(f(z), f(z))$ y $p(w, f(x))$ se unifican en $p(f(z), f(z)))$ y hubiésemos concluído falazmente que las tres fórmulas son unificables.

Definición 3.1.4. Un unificador Φ de las fórmulas atómicas $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ es un *unificador de máxima generalidad* para ellas si, y sólo si, por definición para todo unificador Φ' de las misma existe una sustición Ψ tal que $\Phi' = \Psi\Phi$.

Ejemplo 3.1.8. La sustitución $\Phi_1 = [(x|f(u))(y|u)(z|g(a))]$ es un unificador de máxima generalidad de $\varphi_1 = p(x, z)$, $\varphi_2 = p(f(y), g(a))$ y $\varphi_3 = p(f(u), z)$. No es el único,

$$\Phi_3 = [(x|f(v))(y|v)(z|g(a))(u|v)]$$

es otro y se tiene

$$\Phi_1 = (v|u)\Phi_3 \qquad \Phi_3 = (u|v)\Phi_1$$

Observación 3.1.4. Intuitivamente, un unifcador (cuando existe al menos uno) de máxima generalidad es un unificador tan general como sea posible a condición de que haga coincidir las fórmulas.

Teorema 3.1.1. *Sea* **L** *un lenguaje de primer orden y* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *fórmulas atómicas. Si* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *son fórmulas unificables, entonces el algoritmo se detiene aportando* Φ *un unificador de máxima generalidad de* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

3.2. Resolución

La resolución de Robinson (1965) evita la generación de conjuntos de instancias básicas como exigen los métodos basados en el teorema de Herbrand. Puede ser aplicada directamente al cualquier conjunto Σ de cláusulas para sondear la insatisfacibilidad de Σ. La idea esencial del principio de resolución es indagar si Σ contiene la cláusula vacía $\square$ o no: si Σ contiene $\square$, entonces es insatisfacible. Si Σ no contiene $\square$, la siguiente cosa es saber cuando $\square$ puede ser derivada de Σ. Ciertamente el principio de resolución puede ser entendido como una regla de inferencia para generar nuevas cláusulas a partir de las de Σ y las ya generadas. La clave del asunto está en que el "engrosamiento" de Σ con sus consecuencia trasmite la insatisfacibilidad de Σ; de forma que si llegamos a generar la cláusula vacía por la regla de resolución, Σ será insatisfacible.

Definición 3.2.1. Sea **L** un lenguaje de primer orden. Definimos la relación $\vdash_{rcvc}$ entre conjuntos de cláusulas y cláusulas de **L** como sigue:

- **Axiomas**.- No constan.
- **Reglas**.- Constan las siguientes:
  - *regla de resolución*, representada por $\mathrm{res}_{\mathrm{cv}}(\sigma, \tau; \theta)$ donde:
    - σ es una cláusula de la forma $\lambda \vee \sigma_1$ y λ es una fórmula atómica.
    - τ es una cláusula de la forma $\neg\delta \vee \tau_1$ y δ es una fórmula atómica.
    - θ es una cláusula de la forma $\Phi(\Psi\sigma_1 \vee \tau_1)$, donde Ψ es una sustitución de renombramiento tal que $\Psi\sigma$ y τ no tienen símbolos de variable en común y Φ es un unificador de máxima generalidad de $\Psi\lambda$ y δ.

  regla de disminución, representada por $\mathrm{dis}(\sigma; \theta)$ donde:
    - σ es una cláusula de la forma $\lambda \vee \delta \vee \sigma_1$, siendo los literales λ y δ fórmulas atómicas ambas o λ^c y δ^c fórmulas atómicas ambas.
    - θ es una cláusula de la forma $\Phi\lambda \vee \Phi\sigma_1$ y Φ es un unificador de λ y δ (si ambas son fórmulas atómicas) o de λ^c y δ^c (si ambas son fórmulas atómicas).

  Si $\mathrm{dis}(\sigma; \theta)$ decimos que θ es un *factor* o *disminución* de de σ. o

Dado un conjunto de cláusulas Σ y una cláusla γ, $\Sigma \vdash_{rcvc} \gamma$ cuando exista (al menos) una sucesión finita de cláusulas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tal que $\gamma_n = \gamma$ y para todo $1 \leq i \leq n$ valga una de las siguientes alternativas:

- γ_i pertenece a Σ
- existen $j, k < i$ tales que $\mathrm{res}_{\mathrm{cv}}(\gamma_j, \gamma_k; \gamma_i)$
- existe $j < i$ tal que $\mathrm{dis}(\gamma_j; \gamma_i)$

Ejemplo 3.2.1. De aplicación de la regla de resolución:

$$\mathrm{res}_{\mathrm{cv}}\big(p(x,c) \vee r(x), \neg p(c,c) \vee q(x); r(c) \vee q(x)\big)$$

donde:

- λ es $p(x,c)$
- δ es $p(c,c)$

- Ψ es $(x|y)$ y $\Psi\lambda$ es $p(y,c)$
- Φ es $(y|c)$

Ejemplo 3.2.2. De aplicación de la regla de resolución:

$$\mathrm{res}_{\mathrm{cv}}\big(p(x,f(x)),\neg p(a,y)\vee r(f(y));r(f(f(a)))\big)$$

donde:

- λ es $p(x,f(x))$
- δ es $p(a,y)$
- Ψ es ϵ
- Φ es $(y|f(a))(x|a)$

Ejemplo 3.2.3. De aplicación de la regla de disminución:

$$\mathrm{dis}\big(p(x,g(y))\vee p(f(c),z)\vee r(x,y,z);p(f(c),g(y))\vee r(f(c),y,g(y))\big)$$

donde:

- λ es $p(x,g(y))$
- δ es $p(f(c),z)$
- Φ es $(z|g(y))(x|f(c))$

Definición 3.2.2. Dado un conjunto de cláusulas Σ y una cláusla γ, $\Sigma\vdash_{rcv}\gamma$ (leído γ es consecuencia por resolución de Σ) cuando exista (al menos) una sucesión finita de cláusulas $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ tal que $\gamma_n=\gamma$ y para todo $1\leq i\leq n$ valga una de las siguientes alternativas:

- γ_i pertenece a Σ
- $\mathrm{res}_{\mathrm{cv}}(\alpha_1,\alpha_2;\gamma_i)$, donde existen $j,k<i$ tales que ($\alpha_1=\gamma_j$ ó $\mathrm{dis}(\gamma_j;\alpha_1)$) y ($\alpha_2=\gamma_k$ ó $\mathrm{dis}(\gamma_k;\alpha_2)$). A γ_j y γ_k se les llama *cláusulas padre*.

La sucesión finita $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ antes mencionada recibe el nombre de Σ-*demostración de* γ *por resolución* o sencillamente *demostración por resolución* si no es necesario nombrar el conjunto Σ. Una Σ-demostración por resolución de $\Box$ recibe el nombre de *refutación* de Σ.

Observación 3.2.1. Dado un conjunto de cláusulas Σ del lenguaje, es claro que $\Sigma\vdash_{rcvc}\Box$ si, y sólo si, $\Sigma\vdash_{rcv}\Box$, aunque en general ambas relaciones son distintas.

Teorema 3.2.1. *Sea* **L** *un lenguaje de primer orden y* Σ *un conjunto de cláusulas de* **L**. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. Σ *es insatisfacible*
2. $\Sigma\vdash_{rcv}\Box$

Demostración: Consultar [5], [4] y [8], por ese orden. ■

Ejemplo 3.2.4. Demostremos que el conjunto Σ de cláusulas

$$\{\neg p(x) \vee p(f(x)), p(a), \neg p(f(z))\}$$

es insatisfacible demostrando que $\Sigma \vdash_{rcv} \square$. Para ello basta con la siguiente sucesión finita de cláusulas:

c.1) $\neg p(x) \vee p(f(x))$, hipótesis

c.2) $p(a)$, hipótesis

c.3) $p(f(a))$, por resolución a partir de c.1 y c.2 con $\Phi = (x|a)$

c.4) $\neg p(f(z))$, hipótesis

c.5) $\square$, por resolución a partir de c.3 y c.4 con $\Phi = (z|a)$.

Esta conclusión es a su vez, según sabemos, la evidencia de que:

$$\forall x(p(x) \to p(f(x))), \exists y p(y) \models \exists z p(f(z))$$

Pero, entendamos que hemos ido haciendo al tiempo que escribíamos la anterior demostración de 5 cláusulas:

- La cláusula hipótesis $\neg p(x) \vee p(f(x))$, que debe ser entendida como $\forall x(p(x) \to p(f(x)))$, da en particular $p(a) \to p(f(a))$
- Junto a la hipótesis $p(a)$, deducimos $p(f(a))$; pues si vale $p(a) \to p(f(a))$ y vale $p(a)$, debe valer $p(f(a))$
- La hipótesis $\neg p(f(z))$, que debe entenderse como $\forall z \neg p(f(z))$, da en particular $\neg p(f(a))$ y así se obtiene una contradicción, es decir $\square$.

3.3. Ejemplos

Ejemplo 3.3.1. Tomado de [8] y tiene que ver con los axiomas de la teoría de grupos. Para evitar usar un símbolo de relación que interprete la igualdad, se introduce $p(x, y, z)$ que se interpreta como $x \cdot y = z$.

φ1) $\forall x \forall y \exists z p(x, y, z)$ (operación interna binaria)

φ2) $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w\big((p(x, y, u) \wedge p(y, z, v)) \to (p(x, v, w) \leftrightarrow p(u, z, w))\big)$ (asociatividad de la operación interna)

φ3) $\exists x\big(\forall y p(x, y, y) \wedge \forall z \exists u p(u, z, x)\big)$ (existencia de elemento neutro a izquierda y de inverso a derecha)

Planteemos con la fórmula φ la existencia de un inverso a izquierda:

$$\exists x\big(\forall y p(x, y, y) \wedge \forall z \exists u p(z, u, x)\big)$$

La negación de φ es lógicamente equivalente a:

$$\forall x\big(\exists y \neg p(x, y, y) \vee \exists z \forall u \neg p(z, u, x)\big)$$

Consideramos el conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi\}$ y lo expresamos en forma de cláusulas. Obtenemos:

$\sigma1)$ $p(x, y, f(x, y))$

$\sigma2)$ $\neg p(x, y, u) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(x, v, w) \vee p(u, z, w)$

$\sigma3)$ $\neg p(x, y, u) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(u, z, w) \vee p(x, v, w)$

$\sigma4)$ $p(e, y, y)$

$\sigma5)$ $p(g(z), z, e)$

$\sigma6)$ $\neg p(x, h(x), h(x)) \vee \neg p(k(x), u, x)$

Deducción de la cláusula vacía:

$\sigma.1)$ $p(x, y, f(x, y))$, es σ_1

$\sigma.2)$ $\neg p(x, y, u) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(x, v, w) \vee p(u, z, w)$, es σ_2

$\sigma.3)$ $\neg p(x, y, u) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(u, z, w) \vee p(x, v, w)$, es σ_3

$\sigma.4)$ $p(e, y, y)$, es σ_4

$\sigma.5)$ $p(g(z), z, e)$, es σ_5

$\sigma.6)$ $\neg p(x, h(x), h(x)) \vee \neg p(k(x), u, x)$, es σ_6

$\sigma.7)$ $\neg p(k(e), u, e)$, resolución entre $\sigma.4$ y $\sigma.6$

$\sigma.8)$ $\neg p(x, y, k(e)) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(x, v, e)$, resolución entre $\sigma.2$d y $\sigma.7$

$\sigma.9)$ $\neg p(g(v), y, k(e)) \vee \neg p(y, z, v)$, resolución entre $\sigma.5$ y $\sigma.8$c

$\sigma.10)$ $\neg p(g(v), e, k(e))$, resolución entre $\sigma.4$ y $\sigma.9$b

$\sigma.11)$ $\neg p(g(v), y, u) \vee \neg p(y, z, e) \vee \neg p(u, z, k(e))$, resolución entre $\sigma.3$d y $\sigma.10$

$\sigma.12)$ $\neg p(g(v), y, e) \vee \neg p(y, k(e), e)$, resolución entre $\sigma.4$ y $\sigma.11$c

$\sigma.13)$ $\neg p(g(v), g(k(e)), e)$, resolución entre $\sigma.5$ y $\sigma.12$b

$\sigma.14)$ $\square$, resolución entre $\sigma.5$ y $\sigma.13$

Ejemplo 3.3.2. Retomamos el ejemplo 2.4.3 que nos proporcionaba las cláusulas:

$\sigma1)$ $\neg p(x) \vee q(x, f(x))$

$\sigma2)$ $\neg p(x) \vee r(f(x))$

$\sigma3)$ $p(a)$

$\sigma4)$ $\neg q(x, y)$

Deducción de la cláusula vacía

$\sigma.1)$ $\neg p(x) \vee q(x, f(x))$, es σ_1

$\sigma.2)$ $p(a)$, es σ_2

$\sigma.3)$ $q(a, f(a))$, resolución entre $\sigma.1$ y $\sigma.2$

$\sigma.4)$ $\neg q(x,y)$, es σ_4

$\sigma.5)$ $\Box$, resolución entre $\sigma.3$ y $\sigma.4$

Ejemplo 3.3.3. Tomado de [5] para mostrar el progreso que supone la resolución con respecto a los métodos primitivos basados en el Teorema de Herbrand. Consideremos las dos cláusulas siguientes:

- $p(a, x_2, f(x_2), x_4, f(x_4), \ldots, x_{2n}, f(x_{2n}))$
- $\neg p(x_1, f(x_1), x_3, f(x_3), x_5, \ldots, f(x_{2n-1}), x_{2n+1})$

La resolución da la cláusula vacía en una etapa. El método de Herbrand, considerando que las fórmulas son clasificadas primero todas las que usan a, después todas las que utilizan a y $f(a)$, etc. no nos llevaría a la cláusula vacía buscada más que con el conjunto $\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ para $m = 2 \cdot (2n)^{2n}$ al menos. Tomando $n = 20$ se obtiene un valor que sobrepasa todo lo que podemos eperar tratar con máquinas, incluso en un futuro lejano.

Ejemplo 3.3.4. Tomado de [5] para mostrar un ejemplo sencillo de trabajo en base de datos. Se quiere establecer a partir de los enunciados hipotéticos siguientes:

- para todo crimen, hay alguien que lo ha cometido
- sólo la gente deshonesta comete crímenes
- no es detenida más que la gente deshonesta
- la gente deshonesta detenida no comete crímenes
- ocurren crímenes

el enunciado:

- hay gente deshonesta no detenida

como pretendida tesis. A tal efecto introducimos las siguientes abreviaturas:

1. $det(y)$ por "y está detenido"
2. $des(y)$ por "y es deshonesta"
3. $com(y,x)$ por "y comete x"
4. $cri(x)$ por "x es un crimen"

La traducción de los enunciados hipotéticos y la negación de la pretendida tesis da:

$\varphi 1)$ $\forall x(cri(x) \to \exists y com(y,x))$

$\varphi 2)$ $\forall y \forall x((cri(x) \wedge com(y,x)) \to des(y))$

$\varphi 3)$ $\forall y(det(y) \to des(y))$

$\varphi 4)$ $\forall y((des(y) \wedge det(y)) \to \neg \exists x(cri(x) \wedge com(y,x)))$

$\varphi 5)$ $\exists x cri(x)$

$\varphi 6)$ $\neg \exists y(des(y) \wedge \neg det(y))$

que pasamos a cláusulas:

$\sigma 1)$ $\neg cri(x) \vee com(f(x), x)$

$\sigma 2)$ $\neg cri(x) \vee \neg com(y, x) \vee des(y)$

$\sigma 3)$ $\neg det(y) \vee des(y)$

$\sigma 4)$ $\neg des(y) \vee \neg det(y) \vee \neg cri(x) \vee \neg com(y, x)$

$\sigma 5)$ $cri(a)$

$\sigma 6)$ $\neg des(y) \vee det(y)$

Para establecer que la pretendida tesis es ciertamente consecuencia de nuestras hipótesis construimos una deducción por resolución con variables:

$\sigma.1)$ $\neg cri(x) \vee com(f(x), x)$

$\sigma.2)$ $\neg cri(x) \vee \neg com(y, x) \vee des(y)$

$\sigma.3)$ $\neg det(y) \vee des(y)$

$\sigma.4)$ $\neg des(y) \vee \neg det(y) \vee \neg cri(x) \vee \neg com(y, x)$

$\sigma.5)$ $cri(a)$

$\sigma.6)$ $\neg des(y) \vee det(y)$

$\sigma.7)$ $com(f(a), a)$, res. 5 y 1, alguien ha cometido el crimen

$\sigma.8)$ $\neg cri(a) \vee des(f(a))$, res. 7 y 2

$\sigma.9)$ $des(f(a))$, res. 8 y 5, este alguien es deshonesto

$\sigma.10)$ $\neg des(f(a)) \vee \neg det(f(a)) \vee \neg cri(a)$, res. 7 y 4

$\sigma.11)$ $\neg des(f(a)) \vee \neg det(f(a))$, res. 10 y 5

$\sigma.12)$ $\neg det(f(a))$, res. 11 y 9, ese alguien no está detenido

$\sigma.13)$ $\neg des(f(a))$, res. 12 y 6, ese alguien no es deshonesto (en contradicción con 9)

$\sigma.14)$ $\square$, res. 13 y 9

Ejemplo 3.3.5. Tomado de [5] para ejemplificar el uso de la regla de disminución, la cual es indispensable. Consideremos las cláusulas:

- $p(x) \vee p(y)$
- $\neg p(x) \vee \neg p(y)$

Es imposible deducir la cláusula vacía utilizando solamente la regla de resolución, pues la resolución aplicada a dos cláusulas de dos literales da una cláusula de dos literales. Sin embargo, con la regla de disminución se tiene la deducción siguiente:

$\sigma.1)$ $p(x) \vee p(y)$, hipótesis

$\sigma.2)$ $\neg p(x) \vee \neg p(y)$, hipótesis

$\sigma.3)$ $\neg p(y)$, resolución entre 2 y la disminución $p(x)$ de 1

$\sigma.4)$ $\square$, resolución entre 3 y la disminución $p(x)$ de 1