Capítulo 1

Lógica Proposicional

1.1. Lenguaje Proposicional

Un *lenguaje proposicional* consta de los siguientes símbolos:

- las *proposicones atómicas*, también llamados *enunciados atómicos* o simplemente *variables proposicionales*, y que representamos con las primeras letras minúsculas del alfabeto latino, subindicándolas si fuese preciso: a, b, c, a_1, a_2, a_3, etc.
- símbolos lógicos: $\rightarrow$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$ y $\leftrightarrow$
- símbolos auxiliares:) y (

y llamamos *expresión* del lenguaje proposicional a cada sucesión finita no vacía de sus símbolos. Un ejemplo de expresión es la siguiente sucesión $a \rightarrow b)ca\vee$ y otro es $(a \rightarrow b) \vee c$. El lector reconocerá que el segundo ejemplo posee "una coherencia" o "equilibrio" que no parece tener el primero. En lo que sigue distinguiremos entre expresiones para definir las llamadas "formulas proposicionales" o "sentencias proposicionales".

Son *fórmulas proposicionales*:

- toda proposición atómica
- las expresiones: $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ y $(\neg\alpha)$, siempre que α y β sean fórmulas proposionales.

y convenimos en que no hay otras fórmulas proposicionales distintas a las antes mencionadas. Es fácil demostrar que sea cual sea la fórmula que consideremos no existe más que una única forma de escribirla; se trata del *principio de lectura única.*

1.2. Implicación semántica

Definición 1.2.1. Una *valoración* o *asignación* es cualquier función v que a cada variable proposicional del lenguaje le asigna el valor 0 o el valor 1, que a los efectos son denominados "valores de verdad".

Observación 1.2.1. Gracias al principio de lectura única, cada valoración v puede ser extendida de forma única a la totalidad de las fórmulas cumpliéndose, si dicha extensión la representamos con la misma letra v, que:

- $v(\neg\alpha) = v(\alpha) + 1$
- $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1$
- $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta)$
- $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha)v(\beta)$
- $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = v(\alpha) + v(\beta) + 1$

donde las sumas y multiplicaciones entre los elementos 0 y 1 que hemos considerado en la enumeración anterior son las que se consignan en la siguientes tablas:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Observación 1.2.2. De la observación 1.2.1 se desprenden las siguiente consecuencias sencillas:

- $v(\neg\alpha) = 1$ sii $(v(\alpha) = 0)$
- $v(\alpha \to \beta) = 1$ sii $(v(\alpha) = 0$ ó $v(\beta) = 1)$
- $v(\alpha \vee \beta) = 1$ sii $(v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1)$
- $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ sii $(v(\alpha) = 1$ y $v(\beta) = 1)$
- $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ sii $(v(\alpha) = v(\beta))$

y esta consideración es muy útil en la práctica.

Ejemplo 1.2.1. Supongamos tener un lenguaje con tres variables proposicionales: a, b y c. Si definimos v_1 con: $v_1(a) = 0$, $v_1(b) = 1$ y $v_1(c) = 0$ tenemos una valoración. Otro ejemplo podría ser: $v_2(a) = 1$, $v_2(b) = 1$ y $v_2(c) = 0$. Evaluemos las siguientes fórmulas con v_1 y v_2:

1. $a \to c$; $v_1(a \to c) = v_1(a)v_1(c) + v_1(a) + 1 = 1$, $v_2(a \to c) = 0$
2. $\neg(a \to c) \vee b$;

$$\begin{aligned}
v_1(\neg(a \to c) \vee b) &= v_1(\neg(a \to c))v_1(b) + v_1(\neg(a \to c)) + v_1(b) \\
&= (v_1(a \to c) + 1)v_1(b) + v_1(a \to c) + 1 + v_1(b) \\
&= 0 \cdot v_1(b) + 1 + 1 + v_1(b) \\
&= v_1(b) \\
&= 1 \\
v_2(\neg(a \to c) \vee b) &= 1
\end{aligned}$$

Definición 1.2.2. Dado un conjunto de fórmulas Γ —posiblemente vacío— y una fórmula φ decimos que Γ *implica semánticamente* a φ, abreviadamente $\Gamma \models \varphi$, si para toda valoración v se tiene $v(\varphi) = 1$ siempre que para toda fórmula γ de Γ valga $v(\gamma) = 1$. Si Γ consta solamente de las fórmulas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, en lugar de $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \models \varphi$ escribimos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \varphi$ y cuando $\Gamma = \emptyset$ escribimos simplemente $\models \varphi$ en lugar de $\emptyset \models \varphi$.

Ejemplo 1.2.2.

1. $\alpha, \alpha \to \beta \models \beta$
2. $\alpha \to (\beta \to \gamma), \alpha \to \beta, \alpha \models \gamma$
3. $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \models \alpha \to \gamma$
4. $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma) \models \gamma$
5. $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\gamma \to \alpha) \wedge (\gamma \to \beta) \models \neg\gamma$
6. $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \to \varphi) \wedge (\beta \to \psi) \models \varphi \vee \psi$
7. $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\varphi \to \alpha) \wedge (\psi \to \beta) \models \neg\varphi \vee \neg\psi$
8. $a \vee b \not\models a$
9. $a \not\models a \wedge b$

Observación 1.2.3. La afirmación $\models \alpha$ es equivalente a afirmar que $v(\alpha) = 1$ para toda valoración v.

Definición 1.2.3. Una fórmula φ se denomina *fórmula tautológica*, *tautología* o *válida* siempre que $\models \varphi$. Una fórmula se denomina *no válida* si no es válida.

Observación 1.2.4. En palabras sencillas, una tautología es una fórmula que se evalua como verdadera, se evaluen como se evaluen las fórmulas atómicas que intervienen en su única escritura; se diría que "la verdad" es una característica intrínseca a su estructura sintáctica, significa "la verdad" por su forma y no por el valor mutable de sus partes atómicas. Las tautologías son fórmulas distinguidas.

Ejemplo 1.2.3. Ejemplos de tautologías:

1. $\alpha \to \alpha$
2. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
3. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
4. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$
5. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
6. $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma))$
7. $(\gamma \to \alpha) \to ((\gamma \to \beta) \to (\gamma \to \alpha \wedge \beta))$
8. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
9. $\alpha \wedge \beta \to \alpha$
10. $\neg\neg\alpha \to \alpha$
11. $\alpha \to \neg\neg\alpha$
12. $\alpha \vee \neg\alpha$
13. $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

1.3. Propiedades Básicas de $\models$

Definición 1.3.1. Dado un conjunto de fórmulas Γ del lenguaje, sea $\mathrm{Con}(\Gamma)$ el conjunto de fórmulas γ tales que $\Gamma \models \gamma$.

Teorema 1.3.1. *Sean Γ y Δ un conjunto de fórmulas y φ una fórmula:*

1. $\Gamma \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$
2. *Si* $\Gamma \subseteq \Delta$, *entonces* $\mathrm{Con}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Con}(\Delta)$
3. $\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\Gamma)) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$

Teorema 1.3.2. *Para cualesquiera fórmulas α, β y γ se cumple:*

1. $\alpha \to \beta, \alpha \models \beta$
2. $\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vee \gamma \models \beta \vee \gamma$

Teorema 1.3.3. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ un conjunto de fórmulas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\Gamma, \psi \models \varphi$
2. $\Gamma \models \psi \to \varphi$

Corolario 1.3.4. *Para cualesquiera fórmulas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varphi$ ($2 \leq n$) son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \varphi$
2. $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \models \varphi$
3. $\models \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \to \varphi$

Teorema 1.3.5. *Sea $\Gamma \cup \{\psi, \varphi\}$ un conjunto de fórmulas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\Gamma \models \psi$ *y* $\Gamma \models \varphi$
2. $\Gamma \models \psi \wedge \varphi$

Teorema 1.3.6. *Sea $\Gamma \cup \{\psi, \varphi, \xi\}$ un conjunto de fórmulas.*

1. *Si* $\Gamma, \psi \models \xi$ *y* $\Gamma, \varphi \models \xi$, *entonces* $\Gamma, \psi \vee \varphi \models \xi$.
2. *Si* $\Gamma \models \varphi$, *entonces* $\Gamma \models \psi \vee \varphi$

1.4. Insatisfacibilidad

Definición 1.4.1. Un conjunto Γ de fórmulas del lenguaje es *insatisfacible* si, y sólo si, por definición para toda valoración v existe $\varphi_v \in \Gamma$ tal que $v(\varphi_v) = 0$; dicho de otra forma, si y sólo si, por definición, no existe valoración alguna v tal que $v(\varphi) = 1$ para toda fórmula $\varphi \in \Gamma$. Una fórmula es insatisfacible si el conjunto $\{\varphi\}$ es insatisfacible. Un conjunto Γ de fórmulas del lenguaje es *satisfacible* si no es insatisfacible.

Observación 1.4.1. El conjunto $\emptyset$ es satisfacible; más aún, cualquier asignación lo satisface. En efecto, dada una asignación v, si v no satisfaciese a $\emptyset$ éste tendría elementos, lo cual es absurdo.

Teorema 1.4.1. *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *un conjunto de fórmulas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\Gamma \models \varphi$
2. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es insatisfacible*

Corolario 1.4.2. *Para cualesquiera fórmulas* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varphi$ *(*$2 \leq n$*) son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \varphi$
2. $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \neg\varphi\}$ *es insatisfacible*
3. $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \neg\varphi$ *es insatisfacible*

1.5. Equivalencia Lógica

Definición 1.5.1. Dos fórmula α y β son *lógicamente equivalentes* o símplemente *equivalentes* si, y sólo si, por definición, $\models \alpha \leftrightarrow \beta$, es decir si $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología. La frase "α y β son *lógicamente equivalentes*" será abreviada ocasionalmente como $\alpha \equiv \beta$.

Ejemplo 1.5.1. Sean α, β y γ fórmulas. Cada *item* subsiguiente enumera fórmulas lógicamente equivalentes:

1. $\alpha \to \beta$, $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$
2. $\neg\alpha \to \beta$, $\alpha \vee \beta$

Teorema 1.5.1. *Sean* α *y* β *fórmulas de un lenguaje proposicional. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. α *y* β *son lógicamente equivalentes*
2. $\models \alpha \to \beta$ *y* $\models \beta \to \alpha$
3. $\alpha \models \beta$ *y* $\beta \models \alpha$
4. *Para toda valoración* v*,* $v(\alpha) = v(\beta)$

Observación 1.5.1. Es claro que si α es una tautología y $\alpha \models \beta$, entonces β debe ser también una tautología; por lo que *a fortiori* si una fórmula es lógicamente equivalente a una tautología cualquiera, ella será una tautología; y más aún, cualesquiera dos tautologías son lógicamente equivalentes. Por demás existen fórmulas lógicamente equivalentes que no son tautologías, como se ha mostrado antes, y existen parejas de fómulas que no son lógicamente equivalentes. Sin ir más lejos, ninguna proposición atómica es lógicamente a otra salvo ella misma (si convenimos en admitir que la verdad y la falsedad son entes distintos).

Lema 1.5.2. *Sean* α*,* β *y* γ *fórmulas. Entonces:*

1. $\alpha \equiv \alpha$
2. $\alpha \equiv \alpha \vee \alpha$

3. $\alpha \equiv \alpha \wedge \alpha$
4. $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
5. $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
6. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
7. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
8. $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
9. $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$
10. $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
11. $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
12. $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
13. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
14. $\alpha \equiv \alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta)$
15. $\alpha \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)$
16. $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$
17. $(\neg\alpha \vee \alpha) \wedge \beta \equiv \beta$
18. $(\neg\alpha \vee \alpha) \vee \beta \equiv \neg\alpha \vee \alpha$
19. $(\neg\alpha \wedge \alpha) \vee \beta \equiv \beta$
20. $(\neg\alpha \wedge \alpha) \wedge \beta \equiv \neg\alpha \wedge \alpha$

Observación 1.5.2. En virtud del Lema 1.5.2, podemos escribir $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ sin que haya lugar a confusión, pues las fórmulas $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ y $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ se ha visto que son equivalentes. Podemos hacer una consideración análoga para la conectiva $\vee$.

Lema 1.5.3. *Sean α y β fórmulas del lenguaje. Si $\models \alpha' \leftrightarrow \alpha$ y $\models \beta \leftrightarrow \beta'$, entonces:*

1. $\models (\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\alpha' \to \beta')$
2. $\models (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\alpha' \vee \beta')$
3. $\models (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\alpha' \wedge \beta')$
4. $\models (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha' \leftrightarrow \beta')$

Definición 1.5.2. Dada una fórmula φ el conjunto de sus subfórmulas, representado por $\mathrm{sub}(\varphi)$, es definido recursivamente como sigue:

1. $\mathrm{sub}(a) = \{a\}$, para toda fórmula atómica a del lenguaje
2. $\mathrm{sub}(\neg\alpha) = \{\neg\alpha\} \cup \mathrm{sub}(\alpha)$
3. $\mathrm{sub}(\alpha \to \beta) = \{\alpha \to \beta\} \cup \mathrm{sub}(\alpha) \cup \mathrm{sub}(\beta)$

4. $\mathrm{sub}(\alpha \vee \beta) = \{\alpha \vee \beta\} \cup \mathrm{sub}(\alpha) \cup \mathrm{sub}(\beta)$
5. $\mathrm{sub}(\alpha \wedge \beta) = \{\alpha \wedge \beta\} \cup \mathrm{sub}(\alpha) \cup \mathrm{sub}(\beta)$
6. $\mathrm{sub}(\alpha \leftrightarrow \beta) = \{\alpha \leftrightarrow \beta\} \cup \mathrm{sub}(\alpha) \cup \mathrm{sub}(\beta)$

Teorema 1.5.4. *Sean φ, α y β fórmulas del lenguaje. Si $\alpha \in \mathrm{sub}(\varphi)$, α es lógicamente a β y $\tilde{\varphi}$ es cualquier fórmula obtenida de φ sustituyendo por β alguna (o ninguna) de sus ocurrencia de α, entonces φ y $\tilde{\varphi}$ son lógicamente equivalentes.*

1.6. Forma Normal Conjuntiva

Definición 1.6.1. Una fórmula λ es un *literal proposicional* si existe una proposición atómica a tal que λ es la fórmula a o es la fórmula $\neg a$. Una fórmula φ está en *forma normal conjuntiva*, abreviadamente f.n.c., si es una conjunción de disyunciones de literales proposicionales del lenguaje, es decir, φ se escribe como:

$$\bigwedge_{i=0}^{n} (\lambda_{i,0} \vee \cdots \vee \lambda_{i,m_i})$$

donde cada $\lambda_{i,j}$ es un literal del lenguaje proposional. En tal caso llamamos *conjunto* a cada fórmula $\lambda_{i,0} \vee \cdots \vee \lambda_{i,m_i}$ $(i = 0, \ldots, n)$. Una fórmula φ está en *forma normal disyuntiva*, abreviadamente f.n.d., si es una disyunción de conjunciones de literales proposicionales del lenguaje, es decir, φ se escribe como:

$$\bigvee_{i=0}^{n} (\lambda_{i,0} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i,m_i})$$

donde cada $\lambda_{i,j}$ es un literal del lenguaje proposional. En tal caso llamamos *disyunto* a cada fórmula $\lambda_{i,0} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i,m_i}$ $(i = 0, \ldots, n)$. Dado un literal λ, definimos su *literal complementario* λ^c como sigue:

$$\lambda^c = \begin{cases} \neg a & , \, si\ \lambda = a \\ a & , \, si\ \lambda = \neg a \end{cases}$$

Lema 1.6.1. *Toda fórmula φ es lógicamente equivalente a una fórmula ξ que se escribe sin el signo $\rightarrow$ ni el signo $\leftrightarrow$.*

Lema 1.6.2. *Toda fórmula φ es lógicamente equivalente a una fórmula ψ que se escribe sin el signo $\rightarrow$ ni el signo $\leftrightarrow$ y que tiene todos los símbolos de negación adjuntos a subfórmulas atómicas.*

Teorema 1.6.3. *Para toda fórmula φ del lenguaje existe una fórmula φ_{fnc} cumpliendo:*

1. *φ_{fnc} está en forma normal conjuntiva*
2. *$\models \varphi \leftrightarrow \varphi_{fnc}$*

Corolario 1.6.4. *Para toda fórmula φ del lenguaje existe una fórmula φ_{fnd} cumpliendo:*

1. *φ_{fnd} está en forma normal disyuntiva*
2. *$\models \varphi \leftrightarrow \varphi_{fnd}$*

Método para encontrar una forma normal conjuntiva

Dada una fórmula del lenguaje, para encontrar una fórmula equivalente a ella en forma normal conjuntiva procedemos como se sugiere a continuación:

- Tener en cuenta el Teorema 1.5.4.
- Usar que

$$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \tag{1.1}$$
$$\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi \tag{1.2}$$

  y en ese orden.
- Usar repetidamente que:

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi \tag{1.3}$$

  las *leyes de De Morgan* que establecen que:

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi \tag{1.4}$$
$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi \tag{1.5}$$

- Usar que

$$\varphi \vee (\phi \wedge \psi) \equiv (\varphi \vee \phi) \wedge (\varphi \vee \psi)$$

Ejercicio 1.6.1. Dada una fórmula proposicional, ¿existe una única fórmula en forma normal conjuntiva lógicamente equivalente a ella? ¿Qué se puede decir de dos fórmulas para las que se encuentra una fórmula en forma normal conjuntiva lógicamente equivalente a ambas? Encontrar una fórmula en forma normal conjuntiva para las siguientes fórmulas:

1. $\neg(a \leftrightarrow \neg(b \vee c))$
2. $(a \to \neg(b \to (c \vee d))) \to \neg(a \to b)$

1.7. El Método de Davis y Putnam

Definición 1.7.1. Llamamos *cláusula* a toda fórmula de la forma $\lambda_0 \vee \cdots \vee \lambda_m$ donde m es un número natural y para todo $0 \leq i \leq m$, λ_i es un literal del lenguaje. Admitimos además entre las cláusulas a una especial que es la *cláusula vacía*, representanda por el símbolo $\Box$, y que consideramos como la disyunción de los literales del conjunto vacío, es decir, en la enumeración de sus literales no hay ninguno. No hay otras cláusulas. En ocasiones veremos a la cláusula como el conjunto de sus literales, pues en ella no importa el orden. Toda cláusula con un literal recibe el nombre de *cláusula unit*. Una cláusula es *ampliación* de otra si todos los literales de ésta están presentes en aquella.

Observación 1.7.1. Formalmente entenderemos que toda cláusula es la disyunción de la vacía y otra, vacía o no. Así, por ejemplo, si de una cláusula unit restamos su único literal, queda la cláusula vacía. Convendremos en que la cláusula vacía es insatisfacible.[1]

[1]Este convenio no es arbitrario, una forma de justificarlo consiste en decir: dado que una cláusula es tanto más fácil de satisfacer cuanto más literales tiene, es "lógico" que la cláusula que no tiene ningún literal sea imposible de satisfacer.

Lema 1.7.1 (Regla de las Tautologías). *Sea Σ un conjunto de cláusulas. Si Σ' se obtiene de Σ sustrayendo de éste alguna cláusula tautológica, entonces Σ es satisfacible si, y sólo si, lo es Σ'.*

Teorema 1.7.2 (Regla de la Cláusula Unit). *Sea Σ un conjunto de cláusulas que cuenta entre sus elementos con una cláusula unit λ y sea Σ' el conjunto de cláusulas obtenido sustrayendo de Σ todas las ampliaciones de λ.*

1. *Si $\Sigma' = \emptyset$, entonces Σ es satisfacible*

2. *Si $\Sigma' \neq \emptyset$, sea Σ'' el conjunto que resulta de Σ' tras suprimir todas las ocurrencias de λ^c en las cláusulas de Σ'. Σ'' es insatisfacible si, y sólo si, lo es Σ.*

Definición 1.7.2. Un literal λ es *puro* en un conjunto de cláusas Σ si aparece él en al menos una cláusula y no aparece λ^c en ninguna de las cláusulas de Σ.

Lema 1.7.3 (Regla del Literal Puro). *Sea Σ un conjunto de cláusulas. Si λ es un literal puro de Σ y Σ' es el conjunto que resulta de Σ sustrayendo de éste todas las cláusulas que son ampliación de λ, entonces Σ' es insatisfacible si, y sólo si, lo es Σ.*

Teorema 1.7.4 (Regla de Descomposición). *Sea Σ un conjunto de cláusulas que puede ser expresado como*

$$\{\alpha_0 \vee \lambda, \ldots, \alpha_m \vee \lambda, \beta_0 \vee \lambda^c, \ldots, \beta_n \vee \lambda^c\} \cup \Omega$$

donde $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\} \cup \{\beta_0, \ldots, \beta_n\} \cup \Omega$ es un conjunto de cláusulas en las que no aparece ni λ ni λ^c y sea $\Sigma_1 = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\} \cup \Omega$ y $\Sigma_2 = \{\beta_0, \ldots, \beta_n\} \cup \Omega$. Σ es insatisfacible si, y sólo si, Σ_1 y Σ_2 son insatisfacibles.

Observación 1.7.2. Observar que en el teorema 1.7.4 podíamos haber concluido de forma equivalente "Σ es satisfacible si, y sólo si, Σ_1 es satisfacible o Σ_2 satisfacible".

Observación 1.7.3. Para saber si un conjunto de cláusulas es satisfacible o no, aplicamos las anteriores reglas en el orden que han sido dadas.

Ejercicio 1.7.1. Considerar el conunto de cláusulas

$$\Gamma = \{a \vee \neg b \vee \neg c, \neg a \vee \neg b \vee c, a \vee b \vee \neg c \vee d, \neg d\}$$

y decidir mediante el método de Davis y Putnam si Γ es satisfacible o no.

Ejercicio 1.7.2. Considerar el conjunto de cláusulas

$$\Gamma = \{b \vee \neg b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee c, \neg b \vee a, b, \neg c\}$$

y decidir mediante el método de Davis y Putnam si Γ es satisfacible o no. Concluir razonadamente que

$$\models ((b \to a) \to (b \to (b \to c))) \to ((b \to a) \to (b \to c))$$

Ejercicio 1.7.3. Considerar el conjunto de cláusulas

$$\Gamma = \{a \vee c, \neg b \vee c, d, \neg b \vee \neg c \vee e, b, \neg e\}$$

y decidir mediante el método de Davis y Putnam si Γ es satisfacible o no. Concluir razonadamente que

$$\models ((a \to b) \to c) \to (d \to ((b \to (c \to e)) \to (b \to e)))$$

Ejercicio 1.7.4. Decidir con el algoritmo de Davis y Putnam si son satisfacibles o no los siguientes conjuntos de cláusulas:

1. $\Sigma_1 = \{\neg a \vee a \vee c, b \vee c, \neg a \vee c \vee d \vee e, \neg e, a \vee \neg c \vee \neg d\}$
2. $\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{\neg a \vee \neg d, c \vee \neg d\}$
3. $\Sigma_3 = \Sigma_2 \cup \{a \vee d, \neg c \vee d\}$
4. Justificar razonadamente que:

$$\models \big(\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\big) \to \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big)$$

5. Decidir si el siguiente conjunto de fórmulas es o no satisfacible:

$\{(b\wedge\neg a\wedge\neg b) \to c, \neg c \to \neg(\neg a\wedge\neg b), c \to a, b \to a, (\neg a\vee\neg b\vee\neg c)\wedge(d\vee e), a \to (b \to c), d \to \neg e\}$

y caso de respuesta afirmativa, encontrar una valoración que lo satisfaga.