Lógica Proposicional
Ejercicios del Tema 1

1. Para las fórmulas proposicionales:

   a) $p \to (q \to r)$
   b) $(\neg p \wedge \neg q) \to (\neg r \wedge s)$
   c) $p \leftrightarrow q$
   d) $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
   e) $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow r)$
   f) $p \wedge q \wedge r$

   Encontrar fórmulas lógicamente equivalentes a ellas en las que se usen solamente las conectivas:

   a) $\{\neg, \wedge\}$
   b) $\{\neg, \vee\}$
   c) $\{\neg, \to\}$
   d) $\{\vee, \wedge\}$

2. Estudiar si las siguientes equivalencias lógicas son ciertas o no. Justificar la respuesta.

   a) $a \to b \equiv \neg a \to \neg b$
   b) $a \leftrightarrow b \equiv \neg a \leftrightarrow \neg b$.
   c) $(a \vee b) \to c \equiv (a \to c) \vee (b \to c)$.
   d) $(a \vee b) \to c \equiv (a \to c) \wedge (b \to c)$.
   e) $a \to (b \vee c) \equiv (a \to b) \vee (a \to c)$.
   f) $a \to (b \to c) \equiv (a \wedge b) \to c$

3. Probar que las siguientes fórmulas son tautologías:

   a) $p \to (q \to p)$
   b) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
   c) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

4. Demuostrar que:

   a) $\models (\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta$ (Modus Ponens)
   b) $\models ((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$ (Modus Tollendo Tollens)
   c) $\models (\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$
   d) $\models ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ (Ley de Peirce)
   e) $\models (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ (Ley de Clavius)
   f) $\begin{array}{l} \models (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \\ \models (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \end{array}$ (Leyes de Silogismo)
   g) $\models (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ (Ley de Conmutación de Premisas)

h) $\models \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
$\models \alpha \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$ (Leyes de Duns Scoto)

5. Encontrar en cada uno de los apartados siguientes una fórmula α que lo haga verdadero:

   a) $\alpha,\ a \to b \models a \to c$, pero $\alpha \not\models a \to c$.
   b) $\alpha,\ a \vee \neg b \models \neg a$ y $\alpha, b \to c \models c$.
   c) $\alpha,\ a \to b \models \neg a$ y $\alpha \models b \to c$.
   d) $\alpha,\ a \to b \models \neg\alpha$ y $\alpha \not\models b$.
   e) $\alpha,\ a \models b$ y $\alpha \models a \wedge \neg b$.
   f) $\alpha,\ a \to c,\ b \to c \models c$, pero $\alpha \not\models a$ y $\alpha \not\models b$.

6. Justificar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

   a) Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \vee \beta$ es contingente.
   b) Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \wedge \beta$ es contingente.
   c) Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \to \beta$ es contingente.
   d) Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \leftrightarrow \beta$ es contingente.
   e) Si α y β son contradicciones, entonces $\alpha \leftrightarrow \beta$ es tautología.
   f) Si α es tautología, entonces $\beta \vee \alpha$ es tautología.
   g) Si α es insatisfacible, entonces $\alpha \to \beta$ es una tautología.
   h) $\alpha \vee \beta$ es una tautología si, y sólo si, α y β son tautologías.
   i) Si $\alpha \vee \beta$ es contradicción, entonces α y β son contradicciones.
   j) Si $\alpha \vee \beta$ es una tautología, entonces α o β son tautologías.
   k) Si $\alpha \vee \beta$ es contingente, entonces α y β lo es.
   l) Si $\alpha \to \beta$ es una tautología, entonces α es una contradicción o β es una tautología.
   m) Si $\alpha \to \beta$ es una fórmula contingente, entonces α y β son contingentes.

7. En cada una de las situaciones siguientes indicar en cada caso qué tipo de fórmula es β (o qué tipo de fórmula no es β). Justificar la respuesta.

   a) α es una tautología y $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una contradicción.
   b) α es una tautología y $\alpha \wedge \beta$ es cotingente.
   c) α es una tautología y $\alpha \wedge \beta$ es una contradicción.
   d) α es una tautología y $\alpha \to \beta$ es contingente.
   e) α es una tautología y $\alpha \to \beta$ es una contradicción.
   f) α es una contradicción y $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una contradicción.
   g) α es una contradicción y $\alpha \vee \beta$ es una contradicción.
   h) α es una contradicción y $\alpha \vee \beta$ es contingente.
   i) α es una contradicción y $\beta \to \alpha$ es una tautología.
   j) α es contingente y $\alpha \vee \beta$ es una tautología.
   k) α es contingente y $\alpha \wedge \beta$ es una contradicción.
   l) α es contingente y $\alpha \to \beta$ es una tautología.

m) α es contingente y $\alpha \to \beta$ es contingente.

8. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Si una fórmula proposicional no es satisfacible, su negación sí lo es.
   b) Si una fórmula proposicional no es consecuencia de un conjunto de fórmulas, su negación sí lo es.
   c) Si una fbf no es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas, su negación tampoco.
   d) Si $\Gamma \models \alpha$ es posible que exista $\Delta \subset \Gamma$ tal que $\Delta \not\models \alpha$.
   e) Si $\Gamma \not\models \alpha$ es posible que exista $\Delta \subset \Gamma$ tal que $\Delta \models \alpha$.

9. Estudiar si el conjunto de proposiciones:

$$\Gamma = \{\gamma \to (\alpha \vee \beta), \beta \to (\gamma \to \alpha), \delta \wedge \neg(\gamma \to \alpha)\}$$

   es satisfacible o insatisfacible.

10. Usar los distintos tipos de técnicas estudiadas (cálculo de interpretaciones en $\mathbb{Z}_2$, resolución, algoritmo de Davis-Putnam) para determinar si son o no tautologías las siguientes fórmulas:

   a) $(q \to p \vee r) \to \big((p \to q) \to (p \to ((r \to q) \to r))\big)$
   b) $(\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg(\alpha \to \beta)) \to \alpha)$
   c) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
   d) $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
   e) $(\beta \to \gamma) \to (\neg(\alpha \to \gamma) \to \neg(\alpha \to \beta))$
   f) $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\beta \to \gamma)$
   g) $((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$
   h) $\neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$
   i) $(\neg a \to \neg b) \to \neg(a \to b)$
   j) $(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$

11. Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o no. Caso de no serlo, encuentra una asignación que lo muestre:

   a) $\{a \to b,\ a \to \neg b\} \models \neg a$
   b) $\{a \to b,\ a \vee b\} \models b.$
   c) $\{a \to \neg b,\ a \wedge b\} \models c.$
   d) $\{a \vee b,\ \neg a \vee \neg b\} \models a \leftrightarrow \neg b.$
   e) $\{a \leftrightarrow \neg b,\ a \to c\} \models b \vee c.$
   f) $\{(a \wedge b) \leftrightarrow c,\ \neg c\} \models \neg a \wedge \neg b.$
   g) $\{\neg(a \wedge b \wedge c),\ (a \wedge c) \vee (b \wedge c)\} \models a \to \neg b.$
   h) $\{b \to (c \vee a),\ a \leftrightarrow \neg(b \wedge d)\} \models b \leftrightarrow (c \vee d).$
   i) $\{(a \wedge b) \to c,\ c \to (a \vee d)\} \models b \to (\neg a \to c).$
   j) $\{(a \vee c) \to \neg a,\ c \to \neg a,\ b \to \neg a\} \models \neg a.$
   k) $\{(a \wedge b) \to c,\ c \to d,\ b \wedge \neg d\} \models \neg a.$

l) $\{(a \to b) \vee (c \to d),\ \neg a \to a,\ \neg c \to c\} \models b \vee d.$

m) $\{a \to (b \vee c),\ c \to d,\ \neg b \vee d\} \models \neg(a \wedge \neg d).$

n) $\{(b \to a) \wedge b,\ c \to d,\ b \to c\} \models a \vee d.$

ñ) $\{(a \wedge b) \to c,\ (\neg a \wedge \neg b) \to d,\ a \leftrightarrow b\} \models c \vee d.$

o) $\{a \to (b \vee c),\ d \vee \neg c,\ b \vee d\} \models a \to d.$

p) $\{(\neg b \wedge \neg c) \to \neg a,\ a \to b,\ a \leftrightarrow c\} \models b \vee c.$

q) $\{a \to (a \to b),\ (b \vee c) \to a,\ c \to (a \vee b)\} \models b.$

r) $\{(a \wedge \neg b) \to \neg c,\ (\neg a \wedge b) \to d,\ \neg a \vee \neg b,\ e \to (a \wedge \neg d)\} \models \neg e.$

s) $\{c \to d,\ a \vee b,\ \neg(\neg a \to d),\ \neg a \to b\} \models b \wedge \neg c.$

12. Aplicar el algoritmo de Davis-Putnam a los siguientes conjuntos de cláusulas:

    a) $\{\neg a \vee \neg b \vee c \vee d, \neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d, a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d, \neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee d, a \vee b \vee \neg c, a \vee b \vee \neg d, \neg a \vee c \vee d, \neg b \vee c \vee d, a \vee \neg b, \neg a \vee b, c\}$

    b) $\{p \vee q, \neg p \vee \neg q, \neg q \vee r \vee t, q \vee \neg r \vee t, q \vee r \neg t, \neg q \vee \neg r \vee \neg t, \neg r \vee s, r \vee \neg s, \neg p \vee s \vee t, p \vee \neg s \vee t, p \vee s \vee \neg t, \neg p \vee \neg s \vee \neg t\}$

    c) $\{p \vee \neg q \vee \neg r \vee s \vee \neg t, \neg q, p \vee \neg r \vee \neg s, q \vee r \vee \neg s, p \vee \neg q \vee r \vee s \vee \neg t, \neg p \vee \neg q \vee \neg s \vee \neg t, p \vee \neg q \vee r \vee \neg t, q \vee \neg r \vee s \vee t, p \vee \neg q \vee r \vee s, p \vee \neg r \neg s, \neg p \vee s, p \vee \neg q \vee t\}$

13. Formular como un conjunto de cláusulas el *principio del palomar* de orden n, $\mathbb{P}_n$, que dice que no es posible colocar $n+1$ objetos distintos en n casilleros de forma que distintos objetos queden en distintos casilleros. Aplicar el algoritmo de Davis-Putnam para demostrar que el conjunto de 9 cláusulas que se deriva de $\mathbb{P}_2$ es insatisfacible.

14. Formalizar en lenguaje proposicional los siguientes argumentos y decidir si son correctos:

    a) Si no hay control de nacimientos, entonces la población crece ilimitadamente. Pero si la población crece ilimitadamente, aumentará el índice de pobreza. Por conxsiguiente, si no hay control de nacimientos, aumentará el índice de pobreza.

    b) Si la función f no es continua, entonces la función g no es diferenciable. g es diferenciable. Así pues, f no es continua.

    c) Si hay petróleo en Poligonia, entonces los expertos tienen razón o el gobierno está mintiendo. No hay petróleo en Poligonia o los expertos se equivocan. Así pues, el gobierno está mintiendo.