Lógica de Primer orden. Sintaxis y Semántica
Ejercicios del Tema 2

1. Para las siguientes fórmulas concluir qué variables son libres y cuáles son ligadas, detallando el carácter de libertad de cada una de sus ocurrencias respectivas:

   a) $\forall z(r(x,z) \rightarrow s(y,z))$

   b) $\exists x r(x,y)$

   c) $\exists x r(y,x)$

   d) $\exists z r(y,x)$

   e) $\exists x(r(x,y) \wedge s(x,y))$

   f) $\exists x r(x,y) \wedge \forall y s(x,y)$

   g) $\exists x(r(x,y) \wedge \forall y s(x,y))$

   h) $\exists x(\forall y r(x,y) \wedge s(x,y))$

   i) $\exists z(r(x,z) \vee p(y))$

   j) $\forall x(p(x) \rightarrow r(x,y))$

   k) $\forall x((p(x) \wedge q(x)) \rightarrow \neg r(x,y))$

   l) $\exists x(p(x) \wedge s(x,y))$

   m) $\exists x(\exists y q(x) \vee r(x,y))$

   n) $\forall x(\exists y r(x,y) \rightarrow r(x,z))$

   ñ) $\forall x(r(x,z) \rightarrow \exists y r(x,y))$

   o) $\forall x(\forall z r(x,z) \rightarrow s(x,z))$

   p) $((p(x) \vee q(y)) \wedge \forall x \forall y r(x,y))$

2. Consideremos un lenguaje **L** con los siguientes símbolos:

   - símbolos de constante: c, d
   - símbolos de función: no hay
   - símbolos de relación: p^1, q^1, e^2, r^2, s^2

   Sea **A** la estructura algebraica para **L** definida por:

   - $A = \mathbb{Z}_4$
   - $(c)^{\mathbf{A}} = 0$, $(d)^{\mathbf{A}} = 1$
   - $(p)^{\mathbf{A}} = \{x \colon x \in \mathbf{Z}_4, x^2 = 0\}$
   - $(q)^{\mathbf{A}} = \{x \colon x \in \mathbf{Z}_4, x^2 = 2\}$
   - $(e)^{\mathbf{A}} = \Delta(\mathbb{Z}_4)$
   - $(r)^{\mathbf{A}} = \{(0,1), (0,2), (2,3), (2,2), (1,2), (3,0)\}$
   - $(s)^{\mathbf{A}} = \{(0,1), (0,2), (0,3), (2,3), (0,0)\}$

   Estudiar cuales de las siguientes sentencias son verdaderas para esta estructura:

   1) $p(c)$

   2) $\neg p(d)$

3) $p(c) \wedge p(d)$.
4) $p(c) \rightarrow \neg q(d)$
5) $\exists x q(x)$
6) $\neg(\exists x q(x))$
7) $\exists x \neg q(x)$
8) $\exists x(p(x) \wedge q(x))$
9) $\forall x q(x)$
10) $\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$
11) $\forall x(q(x) \rightarrow \neg p(x))$
12) $\forall x(q(x) \rightarrow \exists y(p(x) \vee q(y)))$
13) $\forall x r(c, x)$
14) $\forall x s(c, x)$
15) $\forall x(r(c, x) \rightarrow s(c, x))$
16) $\exists y \forall x(r(c, x) \rightarrow s(c, x))$
17) $\forall x \forall y(r(x, y) \rightarrow s(x, y))$
18) $\forall x \forall y(r(x, y) \rightarrow \exists z(s(x, z)))$
19) $\forall x(p(x) \rightarrow \exists y(r(x, y)))$
20) $\forall x(p(x) \rightarrow \exists y(s(x, y) \wedge r(y, x)))$
21) $\forall x \exists y r(x, y)$
22) $\forall x \exists y s(x, y)$
23) $\exists y \forall x r(x, y)$
24) $\exists y \forall x s(x, y)$
25) $\exists y \forall x r(y, x)$
26) $\forall x \forall y \forall z((s(x, y) \wedge s(y, z)) \rightarrow r(x, z))$
27) $\forall x \forall y(r(x, y) \rightarrow \neg r(y, x))$
28) $\forall x \forall y(\neg s(x, y) \rightarrow \neg s(x, y))$
29) $\forall x \forall y(\exists z(r(x, z) \wedge r(z, y)) \rightarrow r(x, y))$
30) $\forall x \forall y(\exists z(r(x, z) \wedge s(z, y)) \rightarrow r(x, y))$
31) $\forall x \forall y(\exists z(s(x, z) \wedge r(z, y)) \rightarrow r(x, y))$
32) $\forall x \forall y(\exists z(r(x, z) \wedge r(z, y)) \rightarrow s(x, y))$
33) $\forall x(p(x) \rightarrow \exists y r(y, x))$
34) $\forall x(e(x, c) \rightarrow \exists y r(y, x))$
35) $\forall x(\exists y r(y, x) \rightarrow p(x))$
36) $\forall x(e(x, d) \leftrightarrow r(c, x))$

3. Calcular la interpretación de las siguientes fórmulas en cada una de las **L**-estructuras que se dan:

   a) $\forall x \forall y e(f(x, y), f(y, x))$ en las **L**-estructuras:

1) **A** definida por:
   - $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
   - $(f)^{\mathbf{A}}(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{, si } x + y \in D, \\ x & \text{, en otro caso.} \end{cases}$
   - $(e)^{\mathbf{A}} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (1, 7), (7, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3)\}$
2) **B** definida por:
   - $B = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - $(f)^{\mathbf{B}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{B}} = \Delta(B)$
3) **C** definida por:
   - $C = \mathbb{Z}$
   - $(f)^{\mathbf{C}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{C}} = \Delta(C)$

b) $\forall x e(f(x, a), f(a, x))$

1) **A** definida por:
   - $A = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - $(a)^{\mathbf{A}} = I_3$
   - $(f)^{\mathbf{A}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{A}} = \Delta(A)$
2) **B** definida por:
   - $B = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - $(a)^{\mathbf{B}} = 0_3$
   - $(f)^{\mathbf{B}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{B}} = \Delta(B)$
3) **C** definida por:
   - $C = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - $(a)^{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   - $(f)^{\mathbf{C}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{C}} = \Delta(C)$

c) $\forall x \exists y e(f(x, y), a)$

1) **A** definida por:
   - $A = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - $(a)^{\mathbf{A}} = I_3$
   - $(f)^{\mathbf{A}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{A}} = \Delta(A)$
2) **B** definida por:
   - $B = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - $(a)^{\mathbf{B}} = 0_3$
   - $(f)^{\mathbf{B}}(x, y) = xy$

- $(e)^{\mathbf{B}} = \Delta(B)$

3) **C** definida por:
   - $C = \mathbb{Z}$
   - $(a)^{\mathbf{C}} = 1$
   - $(f)^{\mathbf{C}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{C}} = \Delta(C)$

d) $\forall x(e(f(x, x), a) \to e(x, a))$

1) **A** definida por:
   - $A = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - $(a)^{\mathbf{A}} = I_3$
   - $(f)^{\mathbf{A}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{A}} = \Delta(A)$
2) **B** definida por:
   - $B = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - $(a)^{\mathbf{B}} = 0_3$
   - $(f)^{\mathbf{B}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{B}} = \Delta(B)$
3) **C** definida por:
   - $C = \mathbb{Z}$
   - $(a)^{\mathbf{C}} = 1$
   - $(f)^{\mathbf{C}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{C}} = \Delta(C)$
4) **D** definida por:
   - $D = \mathbb{R}$
   - $(a)^{\mathbf{D}} = 1$
   - $(f)^{\mathbf{D}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{D}} = \Delta(D)$
5) **E** definida por:
   - $E = \mathbb{R}$
   - $(a)^{\mathbf{E}} = 0$
   - $(f)^{\mathbf{E}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{E}} = \Delta(E)$
6) **F** definida por:
   - $F = \mathbb{Z}_4$
   - $(a)^{\mathbf{F}} = 0$
   - $(f)^{\mathbf{F}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{F}} = \Delta(F)$

4. Determinar el carácter (satisfacible y refutable, universalmente válida o contradicción) de las siguientes fórmulas de primer orden:

   a) $\forall x \forall y(p(x, y) \to p(y, x))$

   b) $(\forall x \exists y(p(x, y) \to p(y, x)) \to (\exists x \exists y(p(x, y) \to p(y, x)))$

c) $\forall x \forall y(p(x,y) \to \neg p(y,x))$

d) $\forall x \exists y(p(x,y) \to \neg p(y,x))$

5. Consideramos las siguientes sentencias:

   1) $\forall x(p(x) \to \exists y r(x,y))$
   2) $\forall x(q(x) \to \exists y r(y,x))$
   3) $\exists x(p(x) \wedge q(x))$
   4) $\forall x \exists y r(x,y)$
   5) $\exists x \exists y \neg r(x,y)$

   Encontrar, si existen, estructuras en las que:

   a) Las sentencias 1), 3) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.
   b) Las sentencias 1), 2) y 4) sean verdaderas y las restantes falsas.
   c) Las sentencias 2) y 3) sean verdaderas y las restantes falsas.
   d) Las sentencias 2), 3) y 4) sean verdaderas y las restantes falsas.
   e) Las sentencias 2), 4) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.
   f) Las sentencias 2), 3) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.
   g) Todas las sentencias sean verdaderas.
   h) Todas las sentencias sean falsas.

6. Dadas las siguientes sentencias:

   1) $\forall x(\exists y r(x,y) \to p(x))$
   2) $\forall x(p(x) \to q(x))$
   3) $\exists x(q(x) \wedge \forall y \neg r(x,y))$
   4) $\exists x r(x,x)$
   5) $\exists x \neg r(x,x)$

   Encontrar, si existen, estructuras en las que:

   a) Las sentencias 1), 3) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.
   b) Las sentencias 1), 2) y 4) sean verdaderas y las restantes falsas.
   c) Las sentencias 1), 2) y 4) sean falsas y las restantes verdaderas.
   d) Las sentencias 2) y 3) sean verdaderas y las restantes falsas.
   e) Las sentencias 2), 3) y 4) sean verdaderas y las restantes falsas.
   f) Las sentencias 2), 4) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.
   g) Las sentencias 2), 3) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.
   h) Todas las sentencias sean verdaderas.
   i) Todas las sentencias sean falsas.

7. Estudiar para cada una de las siguientes fórmulas, si es universalmente válida, satisfacible, refutable o contradicción:

a) $p(x) \to (\forall x \neg p(x) \to \neg p(f(a)))$
b) $\forall x \exists y r(x,y) \to \exists y \forall x r(x,y)$
c) $\exists x \forall y r(x,y) \to \forall y \exists x r(x,y)$
d) $\forall x \forall y (r(x,y) \to r(y,x))$
e) $\forall x (p(x) \to p(a))$
f) $\forall x p(x) \to p(a)$

8. Dadas las siguientes fórmulas:

    - $\varphi = \forall x \exists y p(x,y)$
    - $\psi = \exists x \forall y p(x,y)$

    Encuentra una interpretación en la que ambas sean ciertas y otra en la que φ sea cierta y ψ sea falsa. ¿Es cierto $\varphi \vDash \psi$?

9. Consideramos el lenguaje de primer orden **L** dado por lo siguiente:

    - símbolos de constante: a
    - símbolos de función: f, g
    - símbolos de relación: P, Q

    y la **L**-estructura **A** dada por:

    - $A = \mathbb{Z}_{10}$
    - $(a)^{\mathbf{A}} = 4$
    - $(f)^{\mathbf{A}} = +$ (suma en $\mathbb{Z}_{10}$), $(g)^{\mathbf{A}}(x) = x^2$
    - $(p)^{\mathbf{A}} = \{(k,k) \colon k \in A\} = \Delta(A)$, $(q)^{\mathbf{A}} = \{(0,0),(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(5,5),(6,4),(7,3),(8,2),(9,1)\}$

    Interpretar las fórmulas siguientes usando una asignación cualquiera

    $$s \colon Var(\mathbf{L}) \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$$

    a condición de que cumpla $s(x) = 0$ y $s(y) = 4$.

    a) $\forall x (p(g(x), a) \to q(f(y,a), x))$
    b) $\forall x \exists y \exists z p(x, f(g(y), g(z)))$

10. Consideremos el lenguaje de primer orden **L** dado por lo siguiente:

    - símbolos de constante: a, b, c
    - símbolos de función: f, g
    - símbolos de relación: P

    y la **L**-estructura **A** dada por:

    - $A = \mathbb{Z}_6$
    - $(a)^{\mathbf{A}} = 0$, $(b)^{\mathbf{A}} = 1$, $(c)^{\mathbf{A}} = 2$
    - $(f)^{\mathbf{A}} = +$ (suma en $\mathbb{Z}_6$), $(g)^{\mathbf{A}}(x) = \cdot$ (producto en $\mathbb{Z}_6$)

- $(q)^{\mathbf{A}} = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

a) Describir todas las asignaciones s de $\mathbf{L}$ en $\mathbf{A}$ para las que la siguiente fórmula se interpreta como verdadera:

$$\neg p(g(x, f(b,b)), a) \to p(f(y,c), g(y,y))$$

b) Interpretar la sentencia $\forall x \exists y p(g(y,c), x)$.

11. Describir todas las estructuras en las que la fórmula siguiente es válida:

$$r(x) \to \forall x r(x)$$

12. Consideramos el lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$ dado por lo siguiente:

- símbolos de constante: a
- símbolos de función: f, g
- símbolos de relación: P

y la $\mathbf{L}$-estructura $\mathbf{A}$ dada por:

- $A = \mathbb{Z}_6$
- $(a)^{\mathbf{A}} = 2$
- $(f)^{\mathbf{A}} = +$ (suma en $\mathbb{Z}_6$), $(g)^{\mathbf{A}}(x) = \cdot$ (producto en $\mathbb{Z}_6$),
- $(p)^{\mathbf{A}} = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

Consideremos una asignación s en $\mathbf{A}$ tal que $s(x_1) = 2, s(x_2) = 0, s(x_3) = 0, s(x_4) = 3$. Se pide interpretar las siguientes fórmulas:

a) $\neg \exists x_1 \forall x_2 p(f(x_1, x_4), a)$

b) $\forall x_1 (p(x_1, g(x_1, x_1)) \leftrightarrow p(g(a, x_1), f(a, a)))$

13. Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Consideramos un lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$ con un símbolo de predicado binario r.Sea ahora la $\mathbf{L}$-estructura $\mathbf{A}$, cuyo universo es X, y para la que $(r)^{\mathbf{A}} = \leq$. Se pide escribir una fórmula que signifique exactamente que $(X, \leq)$ es un retículo.

14. Dada la fórmula

$$r(x) \leftrightarrow \exists x r(x)$$

se pide:

a) Probar que **no** es universalmente válida.

b) Encontrar una estructura donde la fórmula no sea válida.

c) ¿Es satisfacible la fórmula en cualquier estructura?

d) ¿Es refutable en toda estructura?

15. Interpretar la fórmula

$$\forall x \forall y (p(x,y) \to \neg p(y,x))$$

en las estructuras que seguidamente se sugieren:

a) $A = \{0, 1, 2, 3\}$
$p^{\mathbf{A}} = \{(0,0), (0,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$

b) $B = \mathbb{R}$
$p^{\mathbf{B}}$ es la relación binaria "x es estrictamente menor que y"

c) $C = \mathbb{N}$
$p^{\mathbf{C}}$ es la relación binaria "x es múltiplo de y"

16. Interpretar la fórmula
$$\forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow \neg p(y, x))$$
en la estructura **A** con
- $A = \{0, 1, 2, 3\}$
- $(p)^{\mathbf{A}} = \{(0,0), (0,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$

17. La hipótesis del *Lema de Coincidencia* es suficiente, pero no necesaria. Para demostrarlo, dar una fórmula φ en un lenguaje **L**, una **L**-estructura **A** y asignaciones s_1 y s_2 de V en **A** tales que si W_φ es el conjunto de símbolos de variable que ocurren libremente en φ, sea $s_1 \restriction W_\varphi \neq s_2 \restriction W_\varphi$ y sin embargo $I_{\mathrm{A}}^{s_1}(\varphi) = I_{\mathrm{A}}^{s_2}(\varphi)$.