Lógica de Primer Orden. Forma Normal Prenexa

Ejercicios del Tema 3

1. Sea **L** un lenguaje, $\alpha, \beta \in \text{Form}(\mathbf{L})$ y $x \in \text{V}$. Demostrar que si x no ocurre libremente en α entonces

   a) $\models \alpha \leftrightarrow \forall x\alpha$

   b) $\models \alpha \leftrightarrow \exists x\alpha$

   c) $\models (\alpha \to \exists x\beta) \leftrightarrow \exists x(\alpha \to \beta)$

   d) $\models (\forall x\beta \to \alpha) \leftrightarrow \exists x(\beta \to \alpha)$

   e) $\models (\alpha \to \forall x\beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha \to \beta)$.

   f) $\models (\exists x\beta \to \alpha) \leftrightarrow \forall x(\beta \to \alpha)$.

   g) $\models (\forall x\beta \vee \alpha) \leftrightarrow \forall x(\beta \vee \alpha)$

   h) $\models (\alpha \vee \forall x\beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha \vee \beta)$

   i) $\models (\alpha \vee \exists x\beta) \leftrightarrow \exists x(\alpha \vee \beta)$

   j) $\models (\exists x\beta \vee \alpha) \leftrightarrow \exists x(\beta \vee \alpha)$

   k) $\models (\forall x\beta \wedge \alpha) \leftrightarrow \forall x(\beta \wedge \alpha)$

   l) $\models (\alpha \wedge \forall x\beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha \wedge \beta)$

   m) $\models (\alpha \wedge \exists x\beta) \leftrightarrow \exists x(\alpha \wedge \beta)$

   n) $\models (\exists x\beta \wedge \alpha) \leftrightarrow \exists x(\beta \wedge \alpha)$

   y demostrar que:

   a) $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$

   b) $\exists x\alpha \vee \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$

   c) $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$

   d) $\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$

   Demostrar también que es imprescindible la condición "x no ocurre libremente en α" en la primera parte del ejercicio.

2. Sea **L** un lenguaje, α una fórmula de **L** y x un símbolo de variable. Demostrar que si y es un símbolo de variable tal que $y \neq x$ e $y \notin lib(\alpha)$ entonces:

   a) $\forall x\alpha \equiv \forall y\alpha[x/y]$

   b) $\exists x\alpha \equiv \exists y\alpha[x/y]$

3. Demostrar que:

   a) $\models (\forall x\alpha \vee \forall x\beta) \to \forall x(\alpha \vee \beta)$

   b) $\models \exists x(\alpha \wedge \beta) \to (\exists x\alpha \wedge \exists x\beta)$

   pero que en general **no** son ciertas las afirmaciones:

   a) $\models \forall x(\alpha \vee \beta) \to (\forall x\alpha \vee \forall x\beta)$

   b) $\models (\exists x\alpha \wedge \exists x\beta) \to \exists x(\alpha \wedge \beta)$

4. Encontrar una fórmula en forma prenexa cuya matriz esté expresada como conjunción de disyunciones de literales y que sea lógicamente equivalente a las siguientes:

   a) $\big(\forall x \exists y p(x,y) \wedge \big(\exists y q(y) \to q(a)\big)\big) \vee \forall y \big(\exists y \forall x p(x,y) \vee \exists z p(y,a)\big)$
   b) $\big(\forall x (r(x) \vee \exists y \forall x p(x,y)) \vee \exists x q(x,y)\big) \wedge \big(\exists z r(z) \to \forall x (r(x) \wedge \forall x p(x,a))\big)$
   c) $\forall x p(x,y) \to \big(\forall y p(y,x) \to \forall x (q(x) \wedge \exists y \forall z r(a,y,z))\big)$
   d) $(\forall x p(a,x) \vee \forall x p(x,a)) \to \big(\forall z p(x,z) \wedge \forall w \forall y (p(a,y) \to \exists z q(z))\big)$
   e) $\forall x \forall z \big((\forall z p(x,z) \wedge \forall x p(x,z)) \to \forall x (\exists y p(x,y) \vee \forall x q(x))\big)$
   f) $\big(\forall w (\forall x r(x,w) \to (\forall x p(x) \to \exists x (q(x) \vee p(w))))\big) \wedge \forall z (p(z) \vee \exists z q(z))$
   g) $\forall x \big(r(x) \wedge \neg \exists x (p(x) \to \exists y q(f(y),x))\big) \wedge \forall w \exists z \big(q(z,a) \vee p(w) \vee (\forall y p(f(y)) \to q(x,z))\big)$
   h) $\big(\forall y p(x,y) \to \exists x r(x)\big) \wedge \neg \exists x \big((\forall y r(y)) \wedge \neg p(x,a)\big) \wedge \forall x \big((\exists y p(x,y)) \vee r(x)\big)$

5. Repetir el ejercicio 4 dando un resultado con el número mínimo de cuantificadores, y ellos óptimamente situados en el preámbulo de la nueva fórmula.

6. Para cada fórmula obtenida en el ejercicio 4, encontrar una fórmula de Skolem asociada.

7. Dada una fórmula en forma prenexa y una fórmula de Skolem asociada a ella. ¿Están ambas expresadas en el mismo lenguaje de primer orden? ¿Qué relación existe entre ambas?

8. Dado el conjunto de cláusulas:

   - $\neg p(x) \vee r(f(x))$
   - $\neg p(x) \vee q(x, f(x))$
   - $p(a)$
   - $\neg q(x,y)$

   expresar el universo de Herbrand, la base de Herbrand y el sistema de Herbrand.

9. Sea el conjunto de cláusulas

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&\neg p(x,y,u) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(x,v,w) \vee p(u,z,w),\\ &\neg p(x,y,u) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(u,z,w) \vee p(x,v,w),\\ &p(g(x,y),x,y), p(x,h(x,y),y),\\ &p(x,y,f(x,y)), \neg p(k(x),x,k(x))\}.\end{aligned}$$

   Usar el *Teorema de Herbrand*, combinado con el algoritmo de Davis-Putnam, para demostrar que es insatisfacible.

10. Demostrar vía el *Teorema de Herbrand* y el Algoritmo de Davis-Putnam que:

$$\forall x (p(x) \to \exists y (r(y) \wedge q(x,y))), \exists x p(x) \models \exists x \exists y q(x,y)$$