Lógica de Primer Orden. Resolución
Ejercicios del Tema 4

1. Decir si son unificables o no las fórmulas $r(x, f(a), y)$ y $r(f(y), x, b)$. En caso de respuesta afirmativa, dar un unificador principal. Igual pregunta para las fórmulas $r(x, f(a), y)$ y $r(f(y), x, z)$.

2.

3. Dados los literales $p(g(f(x), u), f(a), g(z, f(y)))$ y $p(g(f(f(y)), g(v, a)), f(v), g(g(x, b), x))$, di cuales de las siguientes sustituciones es un unificador de máxima generalidad o principal.

   a) $(v|a)(u|g(v, a))(z|g(a, b))(x|a)$.
   b) $(v|a)(u|g(a, a))(z|g(f(b), b))(y|b)(x|f(b))$.
   c) $(v|a)(u|g(a, a))(z|g(x, b))(x|f(u))$.
   d) $(z|g(f(y), b))(v|a)(u|g(a, a))(x|f(y))$.

4. Decir si son unificables o no las fórmulas atómicas:

   - $\varphi_1 = p(x, y)$
   - $\varphi_2 = p(f(z), x)$
   - $\varphi_3 = p(w, f(x))$

   e igual pregunta para:

   - $\varphi_1 = p(x, z)$
   - $\varphi_2 = p(f(y), g(a))$
   - $\varphi_3 = p(f(u), z)$

5. Comprobar si son unificables los siguientes conjuntos de literales. En caso afirmativo, calcular un unificador de máxima generalidad:

   a) $\{p(g(y), f(x, h(x), y)), p(x, f(g(z), w, z))\}$
   b) $\{p(x, g(f(a)), f(x)), p(f(a), g(y), y), p(y, z, y)\}$
   c) $\{p(x, f(g(y), b)), p(h(a, y), f(g(f_1(x)), b))\}$
   d) $\{p(x, z), p(g(f(z)), g(b)), p(g(f(w)), w)\}$

6. Mediante el "algoritmo de subsumisión", determinar

   a) si la cláusula $p(x, x)$ subsume a (es generalizada por) la cláusula $p(f(x), y) \vee p(y, f(x))$.
   b) si la cláusula $\neg p(x) \vee q(f(x), a)$ subsume a (es generalizada por) la cláusula $\neg p(h(y)) \vee q(f(h(y)), a) \vee \neg p(z)$.

7. Probar que el conjunto formado por las siguientes cláusulas es insatisfacible:

   - $t(x, g(a), z, f(u)) \vee \neg p(g(a)) \vee s(y, z) \vee \neg r(f(y))$
   - $q(x, f(y)) \vee \neg p(g(x))$
   - $\neg s(f(a), f(a)) \vee \neg r(f(f(a))) \vee \neg p(g(x))$
   - $r(f(x))$

- $p(g(a)) \lor \neg q(g(b), f(x))$
- $\neg p(x) \lor s(y, z) \lor \neg t(a, x, y, f(z)) \lor \neg q(g(b), z)$
- $p(g(x))$

8. Encontrar el conjunto apropiado de cláusulas a través del cual estudiar si la fórmula $\exists x p(f(x))$ es consecuencia semántica del conjunto de hipótesis:

   - $\exists x \neg p\big(f(x)\big) \to \forall x q(x)$
   - $\exists y \forall z \big(r(z, y) \land r(z, a)\big) \to \forall x p(x)$
   - $\forall x \forall z \big(q(z) \to p(x) \lor q(z, a)\big)$

9. Dar una refutación lineal ordenada del conjunto de las siguientes cláusulas:

   - $\neg r\big(x, f(a), f(g(z))\big) \lor \neg q(a, x)$
   - $\neg p(z, y)$
   - $\neg q(a, x)$
   - $q\big(y, g(x)\big) \lor p(y, z)$
   - $q(x, z) \lor r\big(g(y), f(y), z\big) \lor p(x, z)$

10. Se quiere establecer a partir de los enunciados hipotéticos siguientes:

    - para todo crimen, hay alguien que lo ha cometido
    - sólo la gente deshonesta comete crímenes
    - no es detenida más que la gente deshonesta
    - la gente deshonesta detenida no comete crímenes
    - ocurren crímenes

    el enunciado:

    - hay gente deshonesta no detenida

    como pretendida tesis. Utilizar para ello la resolución en lógica de primer orden.

11. A partir de las fórmulas:

    $\varphi 1)$ $\forall x \forall y \exists z p(x, y, z)$
    $\varphi 2)$ $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w \big((p(x, y, u) \land p(y, z, v)) \to (p(x, v, w) \leftrightarrow p(u, z, w))\big)$
    $\varphi 3)$ $\exists x \big(\forall y p(x, y, y) \land \forall z \exists u p(u, z, x)\big)$

    concluir como consecuencia semántica:

    $$\exists x \big(\forall y p(x, y, y) \land \forall z \exists u p(z, u, x)\big)$$

    utilizando la resolución. Enunciar un problema de la teoría de grupos que quede demostrado con lo que precede en este ejercicio.

12. Si es posible, extraer la cláusula vacía como resolvente del siguiente conjunto de cláusulas:

    $\sigma 1)$ $\neg p(x) \lor q(x, f(x))$

$\sigma 2)$ $\neg p(x) \vee r(f(x))$

$\sigma 3)$ $p(a)$

$\sigma 4)$ $\neg q(x, y)$

13. Si en el sistema $\vdash_{rcv}$ la regla de resolución no impusiera el renombramiento previo, en una de las cláusulas padre, de las variables comunes ¿sería cierto el resultado de que todo conjunto insatisfacible de cláusulas es refutable? Sustentar la respuesta, según su naturaleza, con una demostración o un ejemplo.

14. Mostrar con un ejemplo que la conocida como *regla de disminución* es indispensable para la deducción semántica en lógica de primer orden utilizando la resolución. Para ello, encontrar un conjunto de cláusulas (de al menos dos) que siendo insatisfacible, sea imposible generar la cláusula vacía a partir de él con el mero y exclusivo uso de la regla de resolución.

15. Demostrar que el conjunto de fórmulas $\{\forall x\big(p(x) \to \forall y(q(x, y) \to r(y))\big),\ \neg\exists z \neg q(f(z), g(z)),\ p(f(a))\}$ implica semánticamente $r(g(a))$.

16. Demuestra, usando resolución, que la fórmula

$$\forall x \forall y((r(x, y) \vee q(x)) \wedge \neg r(x, g(x)) \wedge \neg q(y))$$

es insatisfacible.

17. Construir una derivación de la cláusula vacía a partir de las formas clausulares que se obtienen del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ donde:
    - $\varphi_1 = \forall x(\exists y p(x, y) \vee \neg q(x))$
    - $\varphi_2 = \forall x(r(x) \to (t(x) \vee q(x)))$
    - $\varphi_3 = \forall y(t(y) \to \exists z p(y, z))$
    - $\varphi_4 = \exists z(\forall y \neg p(z, y) \wedge r(z))$

18. Construir una derivación de la cláusula vacía a partir de las formas clausulares que se obtienen del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ donde:
    - $\varphi_1 = m(a)$
    - $\varphi_2 = \forall x(m(x) \to m(f(x)) \vee m(g(x)))$
    - $\varphi_3 = \forall x(q(x, f(x)) \wedge q(x, g(x)))$
    - $\varphi_4 = \forall x(\neg m(x) \vee \forall y \neg q(y, x))$

19. Demostrar, usando la resolución, que la fórmula $\exists x \exists y(p(x, y) \wedge q(y))$ es consecuencia semántica de las fórmulas:
    - $q(a)$
    - $\forall x(q(x) \to q(g(x)) \vee q(f(x)))$
    - $\forall x(p(x, g(x)) \wedge p(x, f(x)))$

20. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\exists x(o(x) \wedge \forall y(t(y) \to \exists z p(y, z, x)))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x((t(x) \land \neg q(x)) \to \forall y \forall z(o(y) \to p(x,z,y)))$
- $\forall x((t(x) \land q(x)) \to \forall y \forall z((o(y) \land s(y)) \to p(x,z,y)))$
- $\exists x(o(x) \land r(x)) \land \exists y(o(y) \land s(y))$

21. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\exists x(r(x) \land t(x))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\exists x(r(x) \land \forall y(p(y) \to q(x,y)))$
- $\forall x(r(x) \to \exists y(s(x,y) \land p(y)))$
- $\forall x(\exists y(s(x,y) \land q(x,y)) \to t(x))$

22. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\exists x \exists y(pl(x) \land cn(y) \land cp(x,y))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x(je(x) \land cs(x) \to \exists y(pp(y) \land cp(x,y)))$
- $\forall x(je(x) \to pl(x)) \land \exists x(je(x) \land cs(x))$
- $\forall x(pp(x) \to \neg cd(x) \land jg(x))$
- $\forall x(jg(x) \to cn(x) \lor cd(x))$

23. Construir una OL-refutación del conjunto de cláusulas:

- $r(a,f(c),f(b))$
- $p(a)$
- $r(x,x,f(x))$
- $\neg r(x,y,z) \lor r(y,x,z)$
- $\neg r(x,y,z) \lor q(x,z)$
- $\neg p(x) \lor \neg r(y,z,u) \lor \neg q(x,u) \lor q(x,y) \lor q(x,z)$
- $\neg q(a,b)$

24. Demostrar, usando OL-resolución, que la fórmula

$$\exists x(r(x) \lor \exists y(q(x,y) \land p(y)))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x((o(x) \land \exists y(q(y,x) \land s(y))) \to p(x))$
- $\forall x(o(x) \land v(x) \to s(x))$
- $\forall x(o(x) \land \neg v(x) \to r(x))$
- $\forall x(\exists y(q(y,x) \land o(y)) \to o(x))$
- $o(a) \land q(a,b)$

25. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\neg\forall x o(x)$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x(q(x) \land \neg t(x) \to s(x))$
- $\forall x(q(x) \land t(x) \to r(x) \lor p(x))$
- $\forall x((s(x) \lor r(x) \lor p(x)) \to \neg o(x)$
- $\exists x q(x)$

26. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\exists x as(s)$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x(md(x) \land \neg bl(x) \to ca(x))$
- $\forall x(un(x) \land ca(x) \to mx(g(x)) \lor fm(f(x)))$
- $\forall x(bl(x) \to dg(x))$
- $\forall x(mx(x) \to il(x))$
- $\forall x(fm(x) \to fa(x))$
- $\forall x(dg(x) \lor il(x) \lor fa(x) \to as(x))$
- $un(a) \lor md(a)$

27. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\neg\exists x(r(x) \land s(x))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x(r(x) \land s(x) \to \exists y(q(y) \land p(x, y)))$
- $\forall x(q(x) \to t(x))$
- $\forall x(t(x) \to o(x))$
- $\forall x\forall y(r(x) \land o(y) \to \neg p(x, y))$

28. Demostrar utilizando resolución que la siguiente argumentación es correcta: “El profesor es feliz si a todos sus estudiantes les gusta la lógica; luego un profesor es feliz si no tiene estudiantes”.