Prontuario de cálculo clásico proposicional y de primer orden

definición de sustituir x por t en α (α_t^x)

1. Si $\alpha \in \mathrm{Atom}(\mathbf{L})$, α_t^x es la fórmula obtenida sustituyendo las ocurrencias de x en α por el término t.
2. $(\neg\alpha)_t^x$ es $\neg(\alpha_t^x)$
3. $(\alpha \to \beta)_t^x$ es $(\alpha_t^x \to \beta_t^x)$
4. $(\forall y\alpha)_t^x = \begin{cases} \forall y\alpha, & \text{si } x = y, \\ \forall y(\alpha_t^x), & \text{si } x \neq y. \end{cases}$

(consiste en leer la fórmula de izquierda a derecha y cuando encontremos una ocurrencia libre de x sustituirla por t. Luego continuar leyendo en el símbolo inmediatamente siguiente al último de la escritura del término recién sustituido. Continuamos esta operación y no operamos cuando encontremos una ocurrencia de x que sea ligada.)

definición de "x es sustituible por t en α"

1. Si $\alpha \in \mathrm{Atom}(\mathbf{L})$, x es sustituible por t en α
2. x es sustituible por t en $(\neg\alpha)$ si, y solamente si, x es sustituible por t en α
3. x es sustituible por t en $(\alpha \to \beta)$ si, y solamente si, x es sustituible por t en α y β
4. x es sustituible por t en la fórmula $\forall y\alpha$ si o bien:
   a) x no ocurre libremente en $\forall y\alpha$, o bien
   b) en t no tiene y ninguna ocurrencia y x es sustituible por t en α.

(x es sustituible por t en una fórmula si en ella x no ocurre libremente nunca en el radio de acción de un $\forall x_j$, donde x_j es una variable que ocurre en t.)

lema de re-reemplazamiento

$$\frac{\begin{array}{c} y \text{ sustituible por } z \text{ en } \alpha \\ z \text{ no ocurre libremente en } \alpha \end{array}}{(z \text{ es sustituible por } y \text{ en } \alpha_z^y) + (\alpha_z^y)_y^z = \alpha}$$

algunas abreviaturas

abreviatura	**fórmula**
$\alpha \vee \beta$	$\neg\alpha \to \beta$
$\alpha \wedge \beta$	$\neg(\alpha \to \neg\beta)$
$\alpha \leftrightarrow \beta$	$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$
$\exists x\alpha$	$\neg(\forall x\neg\alpha)$

Axiomas

A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ (ley "*a fortiori*" o "*verum sequitur ad quodlibet*")

A2) $\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\big)$ (ley autodistributiva o *de Frege*)

A3) $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to \big((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha\big)$ (ley *"reductio ad absurdum"* clásica o fuerte)

A4) $\forall x\alpha \to \alpha^x_t$, siendo x sustituible por t en α;

A5) $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$;

A6) $\alpha \to \forall x\alpha$, donde x no ocurre libremente en α.

A7) $x \approx x$;

A8) $x \approx y \to (\alpha \to \tilde{\alpha})$, donde α es cualquier fórmula atómica del lenguaje y $\tilde{\alpha}$ es obtenida de α reemplazando x, en cero o más (no necesariamente todos) lugares por y.

modus ponens (único motor de inferencia)

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \varphi \to \psi \\ \Gamma \vdash \varphi\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

leyes implicativas

1. $\alpha \to \alpha$ (ley de identidad)
2. $(\alpha \to \beta) \to \big((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)\big)$ (ley fuerte del silogismo)
3. $\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big(\beta \to (\alpha \to \gamma)\big)$ (ley de conmutación de premisas o cambio del antecedente)
4. $(\beta \to \gamma) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\big)$ (ley débil del silogismo)
5. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$ (ley de *Frege*)
6. $\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$
7. $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$ (ley de reducción)
8. $((\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)) \to (\beta \to \alpha)$
9. $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\delta \to ((\beta \to (\gamma \to \varepsilon)) \to (\beta \to \varepsilon)))$
10. $\varepsilon \to ((\alpha \to \beta) \to ((\delta \to \alpha) \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$
11. $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (((\beta \to \alpha) \to \gamma) \to \gamma)$ (ley de *Dummet*)
12. $((\alpha \to \beta) \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha)$ (ley de *Sales* o de *Tanaka*)
13. $\big((\alpha \to \beta) \to \alpha\big) \to \alpha$ (ley de *Peirce*)
14. $((((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha) \to \gamma) \to ((\gamma \to \varphi) \to (\beta \to \varphi))$ (ley de *Meredith*)
15. $((\alpha \to \gamma) \to \beta) \to (((\beta \to \alpha) \to \beta) \to \beta)$ (ley para la trivalencia del sistema BCK)

leyes implicativo-negativas

1. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ (ley de doble negación clásica o fuerte)
2. $\alpha \to \neg\neg\alpha$ (ley de doble negación intuicionista o minimal)
3. $\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$ (ley de *Brouwer*)
4. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ (ley de *Duns Scoto*)
5. $\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$ (ley débil de *Duns Scoto*)
6. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$ (ley de contraposición *ponendo ponens* o fuerte)
7. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ (ley de contraposición *tollendo tollens* o débil)
8. $(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$ (ley de contraposición *ponendo tollens*)
9. $(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \alpha)$ (ley de contraposición *tollendo ponens*)
10. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ (ley "*reductio ad absurdum*" intuicionista o minimal)
11. $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ (ley de *Clavius*)
12. $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$ (ley débil de *Clavius*)
13. $\neg(\alpha \to \alpha) \to \beta$ ("*ex falso sequitur quodlibet*")
14. $\alpha \to \big(\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta)\big)$
15. $(\alpha \to \beta) \to \big((\neg\alpha \to \beta) \to \beta\big)$ (ley del dilema)
16. $(\alpha \to \beta) \to \big((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha\big)$
17. $(\alpha \to \gamma) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma))$ (ley de *modus ponens* generalizada)

algunos sistemas equivalentes

$$\alpha \to (\beta \to \alpha)$$
$$\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\big)$$
$$(\neg\alpha \to \neg\beta) \to \big((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha\big)$$

$$\alpha \to (\beta \to \alpha)$$
$$\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\big)$$
$$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$$

$$(\alpha \to \beta) \to \big((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)\big)$$
$$(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$$
$$\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$$

$$((((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha) \to \gamma) \to ((\gamma \to \varphi) \to (\beta \to \varphi))$$

leyes implicativo-conjuntivas

1. $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
2. $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
3. $(\gamma \to \alpha) \to ((\gamma \to \beta) \to (\gamma \to (\alpha \wedge \beta)))$
4. $\alpha \to \big(\beta \to (\alpha \wedge \beta)\big)$
5. $(\beta \wedge \alpha) \to (\alpha \wedge \beta)$
6. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$ (ley de importación)
7. $((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ (ley de exportación)
8. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \wedge \gamma) \to (\beta \wedge \gamma))$
9. $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$ (otra forma del silogismo llamada "*ex toto*" o transitividad de $\to$)
10. $(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta$ ("*modus ponendo ponens*")

leyes implicativo-disyuntivas

1. $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
2. $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
3. $(\alpha \to \gamma) \to \big((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)\big)$
4. $(\alpha \to (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \vee (\alpha \to \gamma))$
5. $(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$
6. $(\beta \vee \alpha) \to (\alpha \vee \beta)$
7. $(\alpha \to \varphi) \to ((\beta \to \psi) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\varphi \vee \psi)))$

otras leyes tautológicas

1. $\alpha \vee \neg\alpha$ ("*tertium non datur*" o ley del tercio excluso)
2. $\neg(\alpha \to \neg\alpha)$ (principio de no contradicción)
3. $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$ (principio de inconsistencia)
4. $(\neg\beta \wedge (\alpha \to \beta)) \to \neg\alpha$ ("*modus tollendo tollens*")
5. $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta) \to \alpha$
6. $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \to \beta$
7. $((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)) \to \gamma$
8. $((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\gamma \to \alpha) \wedge (\gamma \to \beta)) \to \neg\gamma$
9. $((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \to \varphi) \wedge (\beta \to \psi)) \to (\varphi \vee \psi)$
10. $((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\varphi \to \alpha) \wedge (\psi \to \beta)) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

consecuencia del lema de re-reemplazamiento

$$\frac{y \text{ no ocurre en } \varphi}{\forall y \varphi^x_y \vdash \forall x \varphi}$$

definición de $\vdash_t$ y Ded_t

$\Gamma \vdash_t \varphi$ (φ es *consecuencia tautológica* de Γ) si existe una lista finita $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ tal que $\varphi = \alpha_n$ y para cada $1 \leq i \leq n$ se cumple una de las siguientes condiciones:

1. α_i es una instancia de alguno de los esquemas A1, A2 o A3
2. existen $1 \leq j, k < i$ tales que $\alpha_j = \alpha_k \to \alpha_i$

$$\mathrm{Ded}_t(\Gamma) = \{\varphi \colon \Gamma \vdash_t \varphi\}$$

noción de generalización de una fórmula

φ es *generalización* de ψ si $\varphi = \psi$ o existen $x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}$ tales que $\varphi = \forall x_{i_0} \cdots \forall x_{i_n} \psi$

definición de $\vdash_\Upsilon$ y Ded_Υ

$\Gamma \vdash_\Upsilon \varphi$ (φ es *consecuencia tautológica* de Γ) si existe una lista finita $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ tal que $\varphi = \alpha_n$ y para cada $1 \leq i \leq n$ se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $\alpha_i \in \Gamma \cup \Upsilon$
2. existen $1 \leq j, k < i$ tales que $\alpha_j = \alpha_k \to \alpha_i$

$$\mathrm{Ded}_\Upsilon(\Gamma) = \{\varphi \colon \Gamma \vdash_\Upsilon \varphi\}$$

En nuestro curso Υ es el conjunto de las generalizaciones de A1–A6 o A1–A7. Una tal lista $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ recibe el nombre de $\langle \Gamma, \Upsilon \rangle$-prueba de φ o simplemente Γ-prueba de φ.

propiedades elementales de Ded_t y Ded_Υ

1. $\Gamma \subseteq \mathrm{Ded}_t(\Gamma)$
2. Si $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $\mathrm{Ded}_t(\Gamma) \subseteq \mathrm{Ded}_t(\Delta)$
3. $\mathrm{Ded}_t\big(\mathrm{Ded}_t(\Gamma)\big) \subseteq \mathrm{Ded}_t(\Gamma)$
4. $\mathrm{Ded}_t(\Gamma) = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{P}_f(\Gamma)} \mathrm{Ded}_t(\Phi)$
5. $\mathrm{Ded}_t(\Gamma) \subseteq \mathrm{Ded}_\Upsilon(\Gamma)$ (acotación funcional)
6. Si $\alpha, \alpha \to \beta \in \mathrm{Ded}_\Upsilon(\Gamma)$, entonces $\beta \in \mathrm{Ded}_\Upsilon(\Gamma)$ (ser cerrado por *modus ponens*)
7. $\Gamma \subseteq \mathrm{Ded}_\Upsilon(\Gamma)$ (acotación de los conjuntos de fórmulas por cerrados)
8. Si $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $\mathrm{Ded}_\Upsilon(\Gamma) \subseteq \mathrm{Ded}_\Upsilon(\Delta)$ (monotonía)
9. $\mathrm{Ded}_\Upsilon\big(\mathrm{Ded}_\Upsilon(\Gamma)\big) \subseteq \mathrm{Ded}_\Upsilon(\Gamma)$ (idempotencia)
10. $\mathrm{Ded}_\Upsilon(\Gamma) = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{P}_f(\Gamma)} \mathrm{Ded}_\Upsilon(\Phi)$ (finitariedad)

algunas equivalencias elementales

fórmula	**equivalente**
$\neg\neg\alpha$	α
$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$
$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$
$\neg\alpha \vee \beta$	$\alpha \to \beta$
$\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$	$\alpha \to \beta$
$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
$\alpha \wedge (\neg\beta \vee \beta \vee \gamma)$	α

regla de *modus ponens* generalizada

$$\frac{\begin{array}{r}\neg\alpha \to \beta \\ \alpha \to \gamma\end{array}}{\neg\beta \to \gamma}$$

regla de *resolución*

$$\frac{\begin{array}{r}\alpha \vee \beta \\ \neg\alpha \vee \gamma\end{array}}{\beta \vee \gamma}$$

teorema de la deducción

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi} \quad \text{y} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$$

regla de generalización

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x\varphi}$$

con tal de que $\Gamma \vdash \varphi$ esté avalada por al menos una Γ-prueba en la que no sea usada niguna hipótesis con ocurrencias libres de x.

regla de generalización particularizada (ver. 1)

$$\frac{\vdash \varphi}{\vdash \forall x\varphi}$$

regla de generalización particularizada (ver. 2)

$$\frac{\Theta \vdash \varphi}{\Theta \vdash \forall x\varphi} \quad \text{, donde } \Theta \text{ es un conjunto de sentencias}$$

regla T

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \varphi_1 \\ \dots \\ \Gamma \vdash \varphi_n \\ \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash_t \psi\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

reglas de contraposición

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\varphi} \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \neg\varphi} \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$$

regla de reducción al absurdo clásica

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi \\ \Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$$

regla de reducción al absurdo intuicionista

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, \varphi \vdash \psi \\ \Gamma, \varphi \vdash \neg\psi\end{array}}{\Gamma \vdash \neg\varphi}$$

regla del silogismo

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \alpha \to \beta \\ \Gamma \vdash \beta \to \gamma\end{array}}{\Gamma \vdash \alpha \to \gamma}$$

regla de isotonía

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma \vdash (\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)}$$

regla de antiisotonía

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma \vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)}$$

negación de la flecha

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \alpha \\ \Gamma \vdash \neg\beta\end{array}}{\Gamma \vdash \neg(\alpha \to \beta)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg(\alpha \to \beta)}{\Gamma \vdash \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg(\alpha \to \beta)}{\Gamma \vdash \neg\beta}$$

regla A4

$$\vdash \forall x\varphi \to \varphi^x_t, \text{ si } x \text{ es sustituible por } t \text{ en } \varphi$$

regla A4 especial

$$\vdash \forall x\varphi \to \varphi$$

regla E4

$$\vdash \varphi^x_t \to \exists x\varphi, \text{ si } x \text{ es sustituible por } t \text{ en } \varphi$$

generalización de constantes

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall y \varphi^c_y}, \text{ si } c \text{ no ocurre en } \Gamma$$

(y no ocurre en φ y $\Gamma \vdash \forall y\varphi^c_y$ está avalada por un Γ-prueba en la que no interviene c)

regla C (versión 1)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi^x_c}{\Gamma \vdash \forall x\varphi}, \text{ si } c \text{ no ocurre en } \Gamma \cup \{\varphi\}$$

($\Gamma \vdash \forall x\varphi$ está avalada por un Γ-prueba en la que no interviene c)

regla EI

$$\frac{\Gamma, \varphi^x_c \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \psi}, \text{ si } c \text{ no ocurre en } \Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$$

($\Gamma, \exists x\varphi \vdash \psi$ está avalada por un Γ-prueba en la que no interviene c)

regla C (versión 2 incompleta)

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \exists x\varphi \\ \Gamma, \varphi^x_c \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash \psi} \quad \text{si } c \text{ no ocurre en } \Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$$

(si $\Gamma \vdash \exists x\varphi$ está avalada por al menos una prueba en la que no ocurre c, entonces $\Gamma \vdash \psi$ también lo estará)

regla C (equiparable a la de Mendelson)

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x\varphi \in \Gamma \\ \Gamma, \varphi^x_c \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash \psi} \quad \text{si } c \text{ no ocurre en } \Gamma \cup \{\psi\}$$

($\Gamma \vdash \psi$ está avalada por un Γ-prueba en la que no interviene c)

regla de extensión

$$\frac{\varphi \vdash \psi}{\forall x\varphi \vdash \forall x\psi}$$

definición de $\exists! x\alpha$

$$\exists x\alpha \wedge \forall x \forall y\big(\alpha \wedge \alpha^x_y \to x \approx y\big)$$

(y es el primer s. de variable diferente de x que no ocurre en α)

1. $\vdash \forall x \exists! y x \approx y$
2. $\vdash \exists! x\alpha \leftrightarrow \exists x \forall y(\alpha^x_y \leftrightarrow x \approx y)$
3. $\vdash \forall x(\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\exists! x\alpha \leftrightarrow \exists! x\beta)$
4. $\vdash \exists! x(\alpha \vee \beta) \to (\exists! x\alpha \vee \exists! x\beta)$
5. $\vdash \exists! x\alpha \leftrightarrow \exists x\big(\alpha \wedge \forall y(\alpha^x_y \to y \approx x)\big)$

(y es el primer s. de variable diferente de x que no ocurre en α)

algunas leyes lógicas con cuantificadores y/o igualdad

1. $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$
2. $\exists x \forall y\varphi \to \forall y \exists x\varphi$
3. $\forall x \forall y(x \approx y \to y \approx x)$
4. $x \approx y \to (\forall z p(x,z) \to \forall z p(y,z))$
5. $\forall x \forall y \forall z \forall v\big(x \approx z \to (y \approx v \to f(x,y) \approx f(z,v))\big)$
6. $t_k \approx u \to \big(r(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) \to r(t_1, \ldots, u, \ldots, t_n)\big)$
7. $\forall x(x \approx x)$
8. $\forall x \forall y(x \approx y \to y \approx x)$
9. $\forall x \forall y \forall z\big(x \approx y \to (y \approx z \to x \approx z)\big)$
10. $\forall x \forall y \forall z \forall v\big(x \approx z \to (y \approx v \to f(x,y) \approx f(z,v))\big)$
11. $\forall x \forall y \forall z \forall v\big(x \approx z \to (y \approx v \to r(x,y) \approx r(z,v))\big)$
12. $x \approx y \to (\varphi \to \tilde{\varphi})$, donde $\tilde{\varphi}$ es cualquier fórmula obtenida a partir de φ reemplazando por el s. de variable y algunas de, pero no necesariamente todas, las ocurrencias libres del s. de variable x, a condición de x sea sustituible por y en la fórmula φ

equivalencia–negación

$$\frac{\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha'}{\vdash \neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha'}$$

equivalencia-implicación

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash \alpha' \to \alpha \\ \vdash \beta \to \beta'\end{array}}{\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha' \to \beta')} \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha' \\ \vdash \beta \leftrightarrow \beta'\end{array}}{\vdash (\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\alpha' \to \beta')}$$

lema de renombramiento de variables

$$\frac{\begin{array}{c} y \text{ sustituible por } z \text{ en } \beta \\ z \text{ no ocurre libremente en } \beta \\ \vdash \alpha \leftrightarrow \beta \end{array}}{\vdash \forall y\alpha \leftrightarrow \forall z(\beta)^y_z}$$

existencia de variante alfabética

$$\frac{\begin{array}{c} y \text{ s. variable y } t \text{ término} \\ \varphi \text{ fórmula} \end{array}}{\begin{array}{c} \text{existe } \varphi' \text{ tal que} \\ x \text{ es sustit. por } t \text{ en } \varphi' + \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi' \end{array}}$$

leyes generales

1. $\neg\forall x\alpha \leftrightarrow \exists x\neg\alpha$
2. $\neg\exists x\alpha \leftrightarrow \forall x\neg\alpha$

y en el suspuesto de que x no ocurra libremente en α:

1. $\alpha \leftrightarrow \forall x\alpha$
2. $\alpha \leftrightarrow \exists x\alpha$
3. $(\alpha \rightarrow \exists x\beta) \leftrightarrow \exists x(\alpha \rightarrow \beta)$
4. $(\forall x\beta \rightarrow \alpha) \leftrightarrow \exists x(\beta \rightarrow \alpha)$
5. $(\alpha \rightarrow \forall x\beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$
6. $(\exists x\beta \rightarrow \alpha) \leftrightarrow \forall x(\beta \rightarrow \alpha)$
7. $(\forall x\beta \vee \alpha) \leftrightarrow \forall x(\beta \vee \alpha)$
8. $(\alpha \vee \forall x\beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha \vee \beta)$
9. $(\alpha \vee \exists x\beta) \leftrightarrow \exists x(\alpha \vee \beta)$
10. $(\exists x\beta \vee \alpha) \leftrightarrow \exists x(\beta \vee \alpha)$
11. $(\forall x\beta \wedge \alpha) \leftrightarrow \forall x(\beta \wedge \alpha)$
12. $(\alpha \wedge \forall x\beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha \wedge \beta)$
13. $(\alpha \wedge \exists x\beta) \leftrightarrow \exists x(\alpha \wedge \beta)$
14. $(\exists x\beta \wedge \alpha) \leftrightarrow \exists x(\beta \wedge \alpha)$
15. $(\forall x\alpha \wedge \forall x\beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha \wedge \beta)$
16. $(\exists x\alpha \vee \exists x\beta) \leftrightarrow \exists x(\alpha \vee \beta)$

noción de forma prenexa

α está en forma prenexa si se expresa como

$$Q_i x_i \cdots Q_n x_n \beta$$

donde $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, para todo $1 \leq i \leq n$ y en la escritura de β no aparece ningún cuantificador. Llamamos literal a cualquier fórmula que sea atómica o de la forma $\neg\alpha$, donde α es una fórmula atómica. En (), β se denomina matriz de la fórmula. Una fórmula en forma prenexa está en *forma normal prenexa* si su matriz está expresada como conjunción de disyunciones de literales.

existencia de forma prenexa

Dada φ siempre es posible encontrar, de forma algorítmica, al menos una ψ en forma normal prenexa tal que

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$