

0.5 1.a) Sea  $\bar{X}$  un conjunto dado y  $A \subset \mathcal{P}(\bar{X})$ . Enuncia las propiedades que debe cumplir  $A$  para que  $A$  sea una  $\sigma$ -álgebra.

1.b) Si  $A = \{A \subset \bar{X} : A \text{ es finito o } \bar{X} \setminus A \text{ es finito}\}$ , demuestra que  $A$  es una  $\sigma$ -álgebra si y solo si  $\bar{X}$  es finito.

2. Sea  $\bar{X} \subset \mathbb{R}^n$  medible. Razona la veracidad o falsedad de las afirmaciones siguientes.

2.1.a)  $f \in C(\bar{X}, \mathbb{R}) \Rightarrow f \in L^1(\bar{X})$ .

2.1.b)  $f \in L^1(\bar{X}) \Rightarrow f \in C(\bar{X}, \mathbb{R})$

2.1.c)  $f: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$  medible y acotada  $\Rightarrow f \in L^1(\bar{X})$ .

2.1.d)  $f \in L^1(\bar{X}) \Rightarrow$  El conjunto de puntos de  $\bar{X}$  donde  $f$  no es continua es numerable.

2.1.e) Si  $f: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua salvo en un número finito de puntos  $\Rightarrow f \in L^1(\bar{X})$ .

3. a) Enuncia el T.C.D. de Lebesgue.

3.0.5) Sea la sucesión de funciones  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ . Calcula el límite puntual de  $f_n$  en  $[0,1]$ .

3.1.c) Calcula  $\int_0^1 f_n(x) dx$

3.0.5) Demuestra que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$

3.1.e) Demuestra que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge uniformemente en  $[0,1]$ .