

Definición. - Una sucesión de complejos de R -módulos y morfismos entre ellos $G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G''$

se dice que es exacta si $C'_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{g_n} C''_n$ es una sucesión exacta de R -módulos $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Una sucesión de complejos $0 \rightarrow G' \xrightarrow{u} G \xrightarrow{p} G'' \rightarrow 0$

se dice que es una sucesión exacta corta si

$$0 \rightarrow C'_n \xrightarrow{u_n} C_n \xrightarrow{p_n} C''_n \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de R -módulos $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Teorema - (de homología) Dada una sucesión exacta corta de complejos $0 \rightarrow G' \xrightarrow{u} G \xrightarrow{p} G'' \rightarrow 0$

existe, para todo $n \in \mathbb{Z}$, un homomorfismo de R -módulos

$$\omega_n: H_n(G'') \rightarrow H_{n-1}(G')$$

llamado el "morfismo de conexión" tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, la sucesión de R -módulos

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_n(G') & \xrightarrow{H_n(u)} & H_n(G) & \xrightarrow{H_n(p)} & H_n(G'') \\ & & & & \searrow \omega_n & & \\ & & H_{n-1}(G') & \xrightarrow{H_{n-1}(u)} & H_{n-1}(G) & \xrightarrow{H_{n-1}(p)} & H_{n-1}(G'') \rightarrow \dots \end{array}$$

es una sucesión exacta (llamada la sucesión exacta larga de homología)

Además, esta sucesión es natural respecto de la sucesión exacta corta de complejos.

$$0 \rightarrow C'_1 \xrightarrow{u_1} C_1 \xrightarrow{p_1} C''_1 \rightarrow 0$$

$$H_n(C'_1) \xrightarrow{H_n(u_1)} H_n(C_1) \xrightarrow{H_n(p_1)} H_n(C''_1) \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1}(C'_1) \xrightarrow{H_{n-1}(u_1)} H_{n-1}(C_0) \rightarrow \dots$$

y es natural respecto de la s.e.c. de complejos

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & \rightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{u_{n+1}} & C_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & C''_{n+1} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow d'_{n+1} & & \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d''_{n+1} \\ 0 & \rightarrow & C'_n & \xrightarrow{u_n} & C_n & \xrightarrow{p_n} & C''_n \rightarrow 0 \\ & & \downarrow d'_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d''_n \\ 0 & \rightarrow & C'_{n-1} & \xrightarrow{u_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & C''_{n-1} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow d'_{n-1} & & \downarrow d_{n-1} & & \downarrow d''_{n-1} \\ 0 & \rightarrow & C'_{n-2} & \xrightarrow{u_{n-2}} & C_{n-2} & \xrightarrow{p_{n-2}} & C''_{n-2} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

Definición del morfismo de conexión.

Sea $[c] \in H_n(C''_n) = \frac{\ker d''_n}{\operatorname{Im} d''_{n+1}}$. Como p_n es sobre $\exists b \in C_n / p_n(b) = c$, sea $b' = d'_n(b) \in C'_{n-1}$.

Entonces $p_{n-1}(b') = p_{n-1}d'_n(b) = d''_n p_n(b) = d''_n(c) = 0$ pues $c \in \ker d''_n$. Por tanto

$b' \in \ker p_{n-1} = \operatorname{Im} u_{n-1} \Rightarrow \exists a \in C'_{n-1} / u_{n-1}(a) = b'$ y a es único por ser u_{n-1} inyectivo.

Entonces $\left. \begin{array}{l} d_{n-1} u_{n-1}(a) = d_{n-1}(b') = d_{n-1} d'_n(b) = 0 \\ u_{n-2} d'_{n-1}(a) \end{array} \right\} \Rightarrow d'_{n-1}(a) \in \ker u_{n-2} = 0 \Rightarrow a \in \ker d'_{n-1}$

$$\omega_n([c]) = [a] \in H_{n-1}(C'_1) = \frac{\ker d'_{n-1}}{\operatorname{Im} d'_n}$$

entonces se define

Ahora vemos:

- i) $[a]$ es independiente de la preimagen de c que se elija:
- Si $b_1, b_2 \in C_n$ son tales que $p_n(b_1) = p_n(b_2) = c$ entonces $p_n(b_1 - b_2) = 0 \Rightarrow b_1 - b_2 \in \ker p_n = \operatorname{Im} u_n \Rightarrow \exists x \in C'_n / u_n(x) = b_1 - b_2 \Rightarrow d_n u_n(x) = u_{n-1} d'_n(x) = d_n(b_1 - b_2) = d_n(b_1) - d_n(b_2) = b'_1 - b'_2 = u_{n-1}(a_1) - u_{n-1}(a_2) = u_{n-1}(a_1 - a_2) \Rightarrow u_{n-1} d'_n(x) = u_{n-1}(a_1 - a_2) \Rightarrow d'_n(x) = a_1 - a_2 \Rightarrow a_1 + \operatorname{Im} d'_n = a_2 + \operatorname{Im} d'_n \Rightarrow [a_1] = [a_2] \text{ en } H_{n-1}(C'_1)$

ii) $[a]$ es independiente del representante elegido en $[c]$:

Si $c_1 + \text{Im } d_{n+1}'' = c_2 + \text{Im } d_{n+1}'' \Rightarrow \exists x \in G_{n+1}'' / c_2 = c_1 + d_{n+1}''(x)$; Como p_{n+1} es sobre $\exists y \in G_{n+1} / p_{n+1}(y) = x$ y si b es una elección de la preimagen de c_1 , esto es $p_n(b) = c_1$, entonces $b + d_{n+1}(y)$ es una preimagen de c_2 pues

$$p_n(b + d_{n+1}(y)) = p_n(b) + p_n d_{n+1}(y) = c_1 + p_n d_{n+1}(y) = c_1 + d_{n+1}''(p_{n+1}(y)) = c_1 + d_{n+1}''(x) = c_2$$

Por tanto $b'_1 = d_n(b) = d_n(b + d_{n+1}(y)) = b'_2$

$\Rightarrow$ Es un homomorfismo de R -módulo

Exactitud en $H_n(G_n)$

Si $[c] \in H_n(G_n) = \frac{\text{Ker } d_n''}{\text{Im } d_{n+1}''}$ está en la imagen de $H_n(p_n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists b + \text{Im } d_{n+1} \in H_n(G_n) / H_n(p_n)(b + \text{Im } d_{n+1}) = p_n(b) + \text{Im } d_{n+1}'' = c + \text{Im } d_{n+1}''$$

Entonces $\omega_n([c]) = \omega_n([p_n(b)])$ y para esto tomamos $b \in \text{Ker } d_n$ y

$$b' = d_n(b) = 0 \quad \text{y} \quad a \in G_{n-1}' / u_{n-1}(a) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow [a] = \omega_n([c]) = [0]$$

$$\Rightarrow [c] \in \text{Ker } \omega_n. \quad \text{Esto es} \quad \text{Im } H_n(p_n) \subset \text{Ker } \omega_n$$

Por otro lado, si $[c] \in \text{Ker } \omega_n \Rightarrow \omega_n([c]) = [0] = [a] \Rightarrow a \in \text{Im } d_n' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists a' \in G_n' / a = d_n'(a'). \quad \text{Si tomamos } b'' = b - u_n(a') \text{ entonces}$$

$$d_n(b - u_n(a')) = d_n(b) - d_n u_n(a') = d_n(b) - u_{n-1} d_n'(a') = d_n(b) - u_{n-1}(a) = b' - b' = 0$$

así que $b - u_n(a') \in \text{Ker } d_n$ y además

$$p_n(b'') = p_n(b - u_n(a')) = p_n(b) - p_n u_n(a') = p_n(b) \quad \text{así que}$$

$$H_n(p_n)([b'']) = [p_n(b'')] = [p_n(b)] = [c] \Rightarrow [c] \in \text{Im}(H_n(p_n)) \Rightarrow \text{Ker } \omega_n \subset \text{Im}(H_n(p_n))$$

Exactitud en $H_{n-1}(G_n')$

$$(H_{n-1}(u_n), \omega_n)[c] = H_{n-1}(u_n)[a] = [u_{n-1}(a)] = [0] \quad \text{pues} \quad u_{n-1}(a) = b' \in \text{Im } d_n$$

así que $\text{Im } \omega_n \subset \text{Ker } H_{n-1}(u_n)$

Por otro lado, sea $[a] \in H_{n-1}(G_n') / H_{n-1}(u_n)[a] = [u_{n-1}(a)] = [0]$. Entonces

$u_{n-1}(a) \in \text{Im } d_n \Rightarrow \exists b \in C_n / d_n(b) = u_{n-1}(a)$ y si consideramos $[p_n(b)] \in H_n(C_*)$
 se tiene que $u_n([p_n(b)]) = [a] \Rightarrow [a] \in \text{Im } u_n \Rightarrow \text{Ker}(H_{n-1}(u_*)) \subset \text{Im } u_n$

Exactitud en $H_n(C_*)$

$$H_n(p_*) H_n(u_*) = H_n(p_* u_*) = H_n(0) = 0 \Rightarrow \text{Im } H_n(u_*) \subset \text{Ker } H_n(p_*)$$

Recíprocamente, sea $[b] \in H_n(C_*) / H_n(p_*)([b]) = [p_n(b)] = [0]$. Entonces
 $p_n(b) \in \text{Im } d_{n+1}'' \Rightarrow \exists c \in C_{n+1}'' / p_n(b) = d_{n+1}''(c)$. Elegimos $b' \in C_{n+1} / p_{n+1}(b') = c$
 Entonces $p_n(b - d_{n+1}(b')) = p_n(b) - p_n d_{n+1}(b') = p_n(b) - d_{n+1}'' p_{n+1}(b') = p_n(b) - d_{n+1}''(c) = 0$
 $\Rightarrow b - d_{n+1}(b') \in \text{Ker } p_n = \text{Im } u_n \Rightarrow \exists a \in C_n' / b - d_{n+1}(b') = u_n(a) \Rightarrow$
 $\Rightarrow [u_n(a)] = [b]$ en $H_n(C_*)$ (notese que $d_n u_n(a) = d_n(b) - d_n d_{n+1}(b') = d_n(b) = 0$)

y por tanto $H_n(u_*)[a] = [u_n(a)] = [b]$ y así $[b] \in \text{Im}(H_n(u_*))$

(notese que como $d_n u_n(a) = 0 \Rightarrow u_{n-1} d_n'(a) = 0 \Rightarrow d_n'(a) = 0 \Rightarrow a \in \text{Ker } d_n'$)