

# TOPOLOGÍA I

19 de septiembre de 2014

1. En  $X = ]0, 2] \subset \mathbb{R}$  se define la siguiente familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{]a, b[ / 0 < a < b < 2\} \cup \{]0, c[ \cup ]d, 2] / 0 < c < d < 2\}.$$

- (a) Estudiar si  $\mathcal{B}$  es base de una topología sobre  $X$ .
  - (b) Calcular interior, adherencia y frontera de  $]0, 1[$  en  $X$  con la topología  $\mathcal{T}$  que tiene a  $\mathcal{B}$  como subbase.
  - (c) Encontrar, si es posible, un homeomorfismo entre  $(X, \mathcal{T})$  y  $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^1})$ .
2. Sea  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$  la recta de Sorgenfrey, con base  $\{[a, b[ / a < b\}$ .
- (a) Describir la topología inducida del espacio topológico producto  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  de  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$  y  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$  sobre cada recta del plano. ¿Son todas esas rectas homeomorfas entre sí?
  - (b) Estudiar si la aplicación  $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ , dada por  $f(x, y) = (x, -y)$ , es continua, abierta o cerrada.

3. Se considera el conjunto  $X = \{a, b, c, d, e\}$  con la topología:

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

- (a) Hallar las componentes conexas de  $(X, \mathcal{T})$ .
  - (b) Probar que toda biyección abierta  $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$  es un homeomorfismo.
4. En  $X = \mathbb{R} \times \{1, 9\}$  se considera la relación de equivalencia:
- $$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y') \text{ o } x, x' < 1 \text{ o } x, x' > 4.$$
- (a) Estudiar si la proyección  $p : (X, \mathcal{T}_{uX}) \longrightarrow (X/R, \mathcal{T}_{uX/R})$  es abierta o cerrada.
  - (b) Probar que  $(X/R, \mathcal{T}_{uX/R})$  no es homeomorfo a  $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^1})$ .

**Puntuación:** todos igual.

**Tiempo:** 3 horas.