El teorema de Pick

Pascual Jara
Ceferino Ruiz

25 de octubre de 2008*

Resumen

El Teorema de Pick trata del cálculo del área de un polígono simple (aquél en el que los lados no se cruzan) cuyos vértices son puntos de una retícula (que podemos suponer es la retícula entera). En efecto, el área de un tal polígono se expresa en función de los puntos de la retícula que son interiores o que están en la frontera. Como aplicación vamos a estudiar las sucesiones de Farey y algunos otros problemas geométricos.

Introducción

El Teorema de Pick trata sobre el área encerrada en una línea poligonal, que no se corta a sí misma, en una retícula. La retícula es una retícula cuadrada formada por ejes ortogonales (perpendiculares). Se pueden estudiar variaciones del Teorema de Pick para regiones poligonales con agujeros; en este caso en la fórmula aparece el número de agujeros de la región poligonal.

Es posible también estudiar otras variaciones del Teorema de Pick; vamos a mencionar dos de ellas: (1) El caso en el que la retícula no es cuadrada, sino rectangular. Este caso no es estudiado en el texto. (2) El caso en el que los ejes de la retícula no son ortogonales. Tampoco este caso estudiado en este texto. Se proponen coo problemas al lector.

Para una extensión para el caso tridimensional, y en general para el caso n–dimensional, estudiar los polinomios de Ehrhart.

El calculo del área encerrada por curvas simples (que no se cortan a sí mismas) se puede aproximar utilizando el teorema de Pick y retículas de tamaño variable.

Entre las aplicaciones del teorema de Pick encontraremos que no es posible dibujar polígonos regulares en una retícula, salvo el caso del cuadrado.

Una aplicación tangencial del teorema de Pick la encontramos al tratar el problema del acordonado de zapatos. Este problema consiste en determinar el modo de acordonar un zapato de forma que la longitud de cordón utilizada sea mínima. Aquí estudiamos el caso de un número determinado de agujeros con una condición sobre cuando un acordonado es correcto. Es un problema determinar el acordonado óptimo con un número arbitrario de agujeros.

Muchos otros problemas se pueden reducir a estudiar polígonos en ua reticula. Agradeceríamos al lector que nos facilite sugerencias o comentarios sobre este texto, posibles errores y erratas y posibles extensiones de la teoría. Para ello puede utilizar la página

`http://www.ugr.es/local/anillos/textos/pick.htm`

*ESTALMAT-Andalucía. Granada. Egresados

1. Triangulación de polígonos

A lo largo de este trabajo vamos a trabajar con **polígonos simples**, esto es, polígonos en los que sus lados no se cortan. Las siguientes figuras muestra un polígono simple, figura 1, y un polígono que no es simple, figura 2.

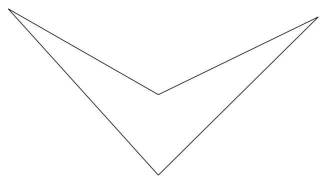


Figura 1

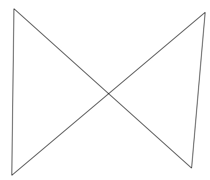


Figura 2

Lema 1.1. *Todo polígono simple P se puede triangular (descomponer en triángulos) mediante diagonales que no se cortan y que son interiores al polígono.*

Demostración. La demostración se hacer por inducción sobre n, el número de lados del polígono. Si $n = 3$, el resultado es cierto. Supongamos que sea $n > 3$ y que el resultado es cierto para cualquier polígono simple con menos de n lados. Dado el polígono P, trazamos una recta r que no corte a P, por lo tanto P está en uno de los semiplanos que define r. Desplazamos r, paralelamente, hasta que intersecte a P.
Si la intersección es más de un punto de P, elegimos una nueva recta r, por ejemplo girando levemente r. De esta forma nos aseguramos que al desplazar la recta r llegamos a intersectar a P en uno de los vértices. Tendremos una situación del siguiente tipo:

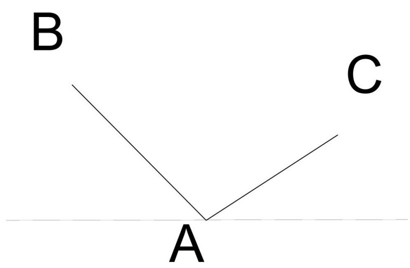


Figura 3

En donde B y C son los vértices adyacentes a A. En consecuencia el ángulo BAC es menor que π.
Consideramos el triángulo BCA. Tenemos las siguientes posibilidades:

(1) Ningún otro vértice de P es interior al este triángulo ni está sobre la diagonal BC; entonces la diagonal BC divide al polígono en dos pates, cada una con menos de n vértices, a las que podemos aplicar la hipótesis de inducción.

(2) Ningún otro vértice de P es interior a este triángulo, pero hay un vértice en la diagonal BC. Sea D el vértice en la diagonal más próximo a B; entonces la diagonal BD divide al polígono en dos partes. cada una con menos de n vértices, a las que podemos aplicar la hipótesis de inducción.

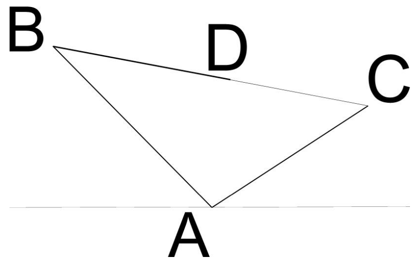


Figura 4

(3) Existen vértices del polígono en el interior del triángulo BCA. En este caso consideramos un punto X en el segmento BC, y el segmento XA. Cuando el punto X se desplaza de B a C, el segmento XA recorre todo el triángulo BCA, y por tanto pasa por todos los vértices del polígono en el interior de BCA. Consideramos el primer vértice D que se alcanza al desplazar X; tendremos ua figura como la del dibujo

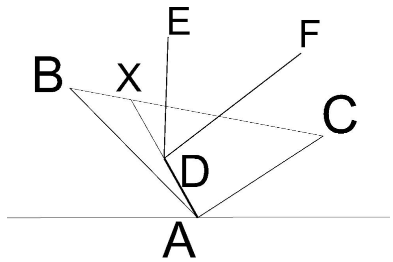


Figura 5

Tomamos entonces la diagonal DA que es interior y divide al polígono en dos con menor número de vértices.

□

Como consecuencia de este resultado podemos ahora probar el Teorema de Pick[1].

Teorema 1.2. *Dado un polígono reticulado (sus vértices están en una retícula que puede ser considerada entera) simple P, el área $A(P)$ de P se puede calcular por la fórmula*

$$A(P) = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1,$$

siendo $I(P)$ el número de puntos de la retícula interiores a P y $B(P)$ el número de puntos de la retícula en la frontera o borde de P.

Demostración. Para cada punto p de la retícula interior o en el borde de P llamamos a_p al ángulo de visibilidad de P desde p. Esto es, si p es un punto interior, tenemos que $a_p = 2\pi$, y si p es un punto de la frontera a_p es el valor del ángulo interior del polígono en p.
Para cada punto p definimos $w_p = a_p/2\pi$, y definimos

$$W(P) = \sum_{p \in I(P) \cup B(P)} w_p.$$

[1]Georg Alexander Pick (Viena, 1859-1942). Profesor en la Universidad de Praga, murió en el campo de concentración de Theresienstadt, República Checa, a los 82 años.

Se trata de ver que se tiene la igualdad $A(P) = W(P)$.
Esta prueba se basa en los siguientes hechos:
Hecho 1. La función $W(P)$ es aditiva sobre polígonos que comparten parte de su frontera; considerando en este caso la suma de tales polígonos como el polígono obtenido al hacer la unión de ambos y suprimir los puntos comunes de las antiguas fronteras que estén en el interior de la unión.
La demostración de este hecho es evidente, ya que para los puntos comunes p de las fronteras tendríamos los valores $w_{1,p}$ y $w_{2,p}$ correspondientes a los dos polígonos, mientras que para el polígono unión se tendrá $w_p = w_{1,p} + w_{2,p}$. Los demás puntos no varía su valor, ya que algún $w_{i,p}$ es cero.
Hecho 2. La fórmula $A(P) = W(P)$ es cierta para las siguientes figuras:

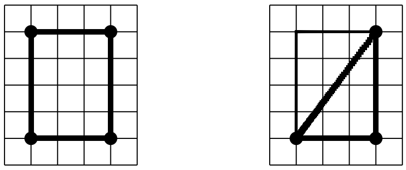


Figura 6

en las que aparece un rectángulo con lados parte de los ejes de la retícula y un triángulo rectángulo con catetos parte de los ejes de la retícula. Cualquier otro triángulo que aparezca en la retícula ocupa una de las dos posiciones siguientes

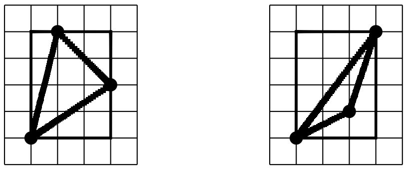


Figura 7

y utilizando la aditividad probada anteriormente, se tiene el resultado.
En consecuencia, utilizando el Lema (1.1) y los dos hechos mencionados, resulta que para cualquier polígono P se tiene al igualdad $A(P) = W(P)$.
Queda ahora calcular el valor de $W(P)$. Como el polígono P tiene n vértices, la suma de los ángulos internos de los vértices es $(n-2)\pi$, y los puntos de la reticula que están en la frontera y no son vértices son $b = B(P) - n$; para todos ellos se tiene $a_p = \pi$, luego $w_p = 1/2$. Podemos entonces calcular

$$\sum_{p \in B(P)} w_p = \frac{n-2}{2} + \frac{b}{2} = \frac{n+b}{2} - 1 = \frac{B(P)}{2} - 1.$$

Por otro lado

$$\sum_{p \in I(P)} w_p = \sum_{p \in I(P)} 1 = I(P).$$

En consecuencia

$$W(P) = \sum_{p \in I(P) \cup B(P)} w_p = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1.$$

$\square$

Un modo alternativo de probar este resultado es probando los dos siguientes lemas:
Un triángulo reticulado se llama **primitivo** si no contiene puntos interiores y los únicos puntos de la frontera son los vértices.

Lema 1.3. *Todo triángulo reticulado primitivo tiene área igual a 1/2.*

Lema 1.4. *Cualquier partición de un polígono reticulado en triángulos reticulados primitivos tiene exactamente* $2I(P) + B(P) - 2$ *triángulos.*

Actividades:
Ver Actividad (7.1)

2. Números de Farey

Una **sucesión de Farey** de orden n es una sucesión de fracciones propias, no negativas, con denominador menor o igual que n, ordenada de menor a mayor.
Los primeros ejemplos de sucesiones de Farey son:

$$F_1 = \tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{1};$$

$$F_2 = \tfrac{0}{2},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{1};$$

$$F_3 = \tfrac{0}{3},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{1};$$

$$F_4 = \tfrac{0}{4},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{1}{1};$$

$$F_5 = \tfrac{0}{5},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{1}{1};$$

$$F_6 = \tfrac{0}{6},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{5}{6},\ \tfrac{1}{1};$$

$$F_7 = \tfrac{0}{7},\ \tfrac{1}{7},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{2}{7},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{3}{7},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{4}{7},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{5}{7},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{5}{6},\ \tfrac{6}{7},\ \tfrac{1}{1}.$$

Vamos a ver que estas sucesiones verifican las siguientes propiedades
SF-1. Dados dos fracciones consecutivas $\frac{a_1}{b_1}$ y $\frac{a_2}{b_2}$ de una sucesión de Farey de orden n se verifica

$$b_1a_2 - a_1b_2 = 1.$$

SF-2. Dadas tres fracciones consecutivas $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ y $\frac{a_3}{b_3}$ de una sucesión de Farey de orden n se tiene:

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_3}{b_1 + b_3}.$$

Se dice que $\frac{a_2}{b_2}$ es la **media racional** (mediant) de $\frac{a_1}{b_1}$ y $\frac{a_3}{b_3}$.
En realidad vamos primero a ver que ambas propiedades son equivalentes.

Lema 2.1. *Las propiedades (SF-1) y (SF-2) son equivalentes para cada sucesión de Farey.*

Demostración. (SF-1⇒SF-2). Se tiene $b_1a_2 - a_1b_2 = 1 = b_2a_3 - a_2b_3$, luego

$$(b_1 + b_3)a_2 = (a_1 + a_3)b_2,$$

(SF-2⇒SF-1). Hacemos inducción sobre los términos de la sucesión. Si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{0}{n}$, $\frac{a_2}{b_2} = \frac{1}{n}$, son los dos primeros términos de la sucesión, entonces el resultado es cierto. Supongamos que el resultado (SF-1) es cierto para todos los términos $\frac{a_1}{b_1} = \frac{0}{n}, \ldots, \frac{a_i}{b_i}$, con $i > 2$. Entonces tenemos:

$$b_{i-1}a_i - a_{i-1}b_i = 1,$$

$$(b_{i-1} + b_{i+1})a_i = (a_{i-1} + a_{i+1})b_i$$

restando se tiene

$$b_ia_{i+1} - a_ib_{i+1} = 1,$$

y por tanto el resultado es cierto. □
Vamos a probar que en casa sucesión de Farey se verifica la propiedad (SF-1).

Lema 2.2. *Cada sucesión de Farey verifica la propiedad (SF-1).*

Demostración. Vamos a utilizar una retícula entera. Cada fracción $\frac{a}{b}$ se representa por el punto (a, b). Por lo tanto todos los puntos de la retícula en la recta $y = \frac{b}{a}x$ representarían la misma fracción (cuando $a = 0$ se tendría la recta $x = 0$). Para hacer que esta representación sea única, vamos a tomar el primer punto de la retícula en la recta a partir del origen. Esto hacer que el punto tenga de coordenadas (a, b), con a b primos relativos. Un punto con estas características se dice que se *ve* desde el origen, ya que son los únicos puntos que verifican que el segmento $(0, 0)(a, b)$ tiene únicamente a $(0, 0)$ y (a, b) como puntos de la retícula.
Es fácil comprobar que los únicos puntos que se ven desde el origen son que que aparece exigir que a y b sean primos relativos. Para ello veamos al siguiente figura en la que aparece un punto de la reticula en el segmento $(0, 0)(a, b)$, al que llamamos (x, y).

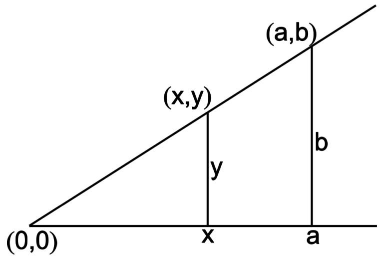


Figura 8

Utilizando el teorema de Thales se tiene $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$, esto es, $ay = bx$. Por ser a y b primos relativos se tiene $a \mid x$, esto es, $x = ax'$, y $b \mid b$, esto es, $y = by'$, con $x', y' \in \mathbb{Z}$. Como consecuencia $aby' = bax'$, y simplificando $x' = y'$. Esto es, $(x, y) = x'(a, b)$, y por tanto (x, Y) debe estar después de (a, b) en la recta.
Todos los puntos de la sucesión de Farey F_n se pueden representar como puntos de la retícula. Es más, como son fracciones con denominador menor o igual que n, están limitadas por la recta $y = n$. Como para $n > 1$ el numerador toma como máximo el valor $n - 1$, está limitada por la recta $x = n - 1$. Al ser todas la fracciones menores o iguales que uno, está limitada por la recta $y = x$, y finalmente, al ser todas positivas, está limitada por la recta $x = 0$. Observemos el caso de F_4.

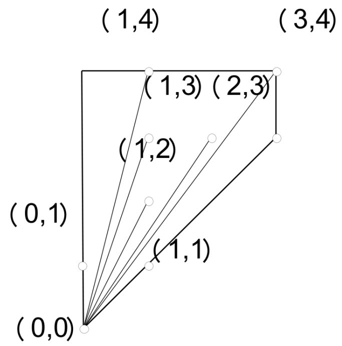


Figura 9

El orden de las fracciones $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ se representa en el diagrama por el hecho de que la dirección (a, b) está a la izquierda de la dirección (c, d).

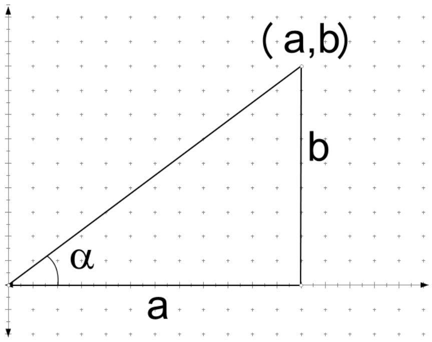


Figura 10

Entonces la tangente del ángulo α es inversamente proporcional a la fracción $\frac{a}{b}$, por lo que si β es el ángulo de la dirección (c, d), entonces $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ significa que $\alpha \geq \beta$.
Dadas dos fracciones consecutivas $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ de una sucesión de Farey, tendremos la siguiente figura:

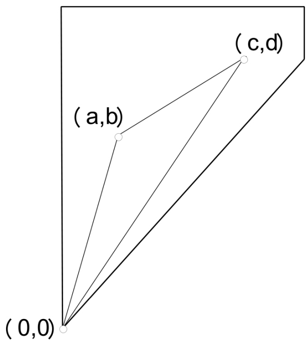


Figura 11

El orden de las fracciones $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ se representa en el diagrama por el hecho de que la dirección (a, b) está a la izquierda de la dirección (c, d).
En este caso tenemos un triángulo reticulado $(0, 0)(a, b)(c, d)$, y podemos calcular si área mediante el Teorema de Pick.

$$A = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1.$$

Tenemos que contar los puntos de la retículo en el triángulo. En los segmentos $(0, 0)(a, b)$ y $(0, 0)(c, d)$ no hay ninguno, ya que los puntos (a, b) y (c, d) se ven desde $(0, 0)$. Tampoco hay puntos en la región con direcciones comprendidas entre (a, b) y (c, d), ya que en ese caso formarían parte de la sucesión y estarían entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$. Por lo tanto los únicos puntos de la retícula en el triángulo son los vértices, y el área es: $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.
Por otro lado el área el triángulo $(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)$ es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Lo que en nuestro caso implica que es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(ad - bc).$$

Como $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, se tiene $ad < bc$, y este valor absoluto es:

$$\frac{1}{2}(bc - ad).$$

De la igualdad $\frac{1}{2}(bc - ad) = \frac{1}{2}$ se obtiene el resultado:

$$bc - ad = 1.$$

□

Actividades:
Ver Actividad (7.2)
Ver Actividad (7.3)

3. Aplicaciones

3.1. Sucesión de Farey

Problema 3.1 ([5])**.** *El número de términos de la sucesión de Farey de orden n es:*

$$1+\sum_{k=1}^{n}\phi(k).$$

Ejercicio 3.2 (Extensión de la sucesión de Farey)**.** *Se puede extender la sucesión de Farey de orden n a términos mayores que uno siguiendo la propiedad (SF-2). Esto es, dados dos términos consecutivos $\frac{a_1}{b_1}$ y $\frac{a_2}{b_2}$, definimos un tercero $\frac{a_3}{b_3}$, siguiente a $\frac{a_2}{b_2}$, mediante*

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1+a_3}{b_1+b_3},$$

y por tanto para calcular un término más tomamos $\frac{a_1}{b_1}=\frac{n-1}{n}$, $\frac{a_2}{b_2}=\frac{1}{1}$, y determinamos $\frac{a_3}{b_3}$ como

$$\frac{1}{1}=\frac{n-1+a_3}{n+b_3},$$

esto es, $\frac{a_3}{b_3}=\frac{n+1}{n}$. Así podemos llegar hasta la fracción formal $\frac{1}{0}$. Se obtiene una sucesión de mayor longitud que la de Farey, y que se puede leer de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, intercambiando en este caso los papeles de a y b.

Ejercicio 3.3 (El árbol de Stern–Brocot)**.** *El árbol de Stern–Brocot se construye utilizando la media racional. Se inicia con las fracciones $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{0}$, y se van agregando niveles escribiendo en cada caso la media racional de los elementos del nivel anterior.*

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\frac{0}{1} &&&&&&&&&&&&&&&& \frac{1}{0}\\
&&&&&&&& \frac{1}{1} &&&&&&&&\\
&&&& \frac{1}{2} &&&&&&&& \frac{2}{1} &&&&\\
&& \frac{1}{3} &&&& \frac{2}{3} &&&& \frac{3}{2} &&&& \frac{3}{1} &&\\
& \frac{1}{4} && \frac{2}{5} && \frac{3}{5} && \frac{3}{4} && \frac{4}{3} && \frac{5}{3} && \frac{5}{2} && \frac{4}{1} &
\end{array}$$

Las sucesiones de Farey se encuentran en este árbol. Hemos coloreado de azul los términos de F_4.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
{\color{blue}\frac{0}{1}} &&&&&&&&&&&&&&&& \frac{1}{0}\\
&&&&&&&& {\color{blue}\frac{1}{1}} &&&&&&&&\\
&&&& {\color{blue}\frac{1}{2}} &&&&&&&& \frac{2}{1} &&&&\\
&& {\color{blue}\frac{1}{3}} &&&& {\color{blue}\frac{2}{3}} &&&& \frac{3}{2} &&&& \frac{3}{1} &&\\
& {\color{blue}\frac{1}{4}} && \frac{2}{5} && \frac{3}{5} && {\color{blue}\frac{3}{4}} && \frac{4}{3} && \frac{5}{3} && \frac{5}{2} && \frac{4}{1} &
\end{array}$$

3.2. Sobre figuras

Problema 3.4. *Se dispone de una retícula entera y de un cuadrado $n\times n$. Se coloca el cuadrado sobre la retícula de forma aleatoria. Prueba que nunca se puede cubrir más de $(n+1)^2$ puntos de la retícula.*

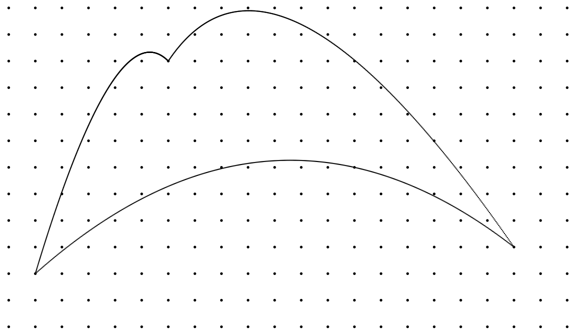
Solución. Hay un caso en el que se pueden cubrir exactamente $(n+1)^2$ puntos, y es cuando los vértices del cuadrado coinciden exactamente con puntos de la retícula. En este caso tenemos $(n-1)^2$ puntos interiores al cuadrado y $4n$ puntos en el borde o frontera; en total $(n-1)^2 + 4n = (n+1)^2$.
En cualquier otro caso hay siempre <u>menos</u> de $4n$ puntos en el borde, y si por el Teorema de Pick calculamos el área tenemos:

$$n^2 = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1$$

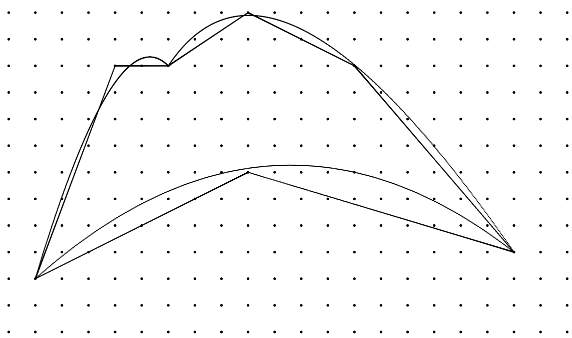
El total de puntos cubiertos por el cuadrado es: $I(P) + B(P)$, y se tiene:

$$I(P)+B(P) = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1 + \frac{B(P)}{2} + 1 = n^2 + \frac{B(P)}{2} + 1 < n^2 + \frac{4n}{2} + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

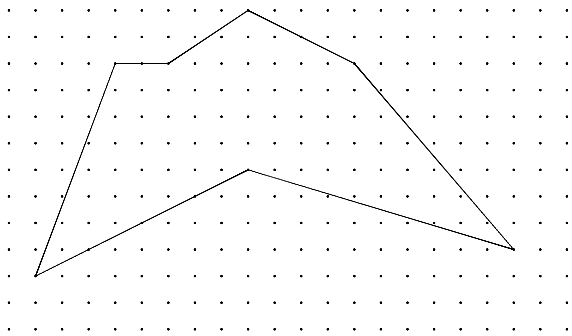
Problema 3.5. *Vamos a determinar, de forma aproximada, el área de una figura plana, no necesariamente reticular con el uso de retículas.*



En este caso consideramos una región polinomial que se ajuste a la figura en cuestión y calculamos el área de esta región polinomial. El valor obtenido será una aproximación al valor del área de la figura.



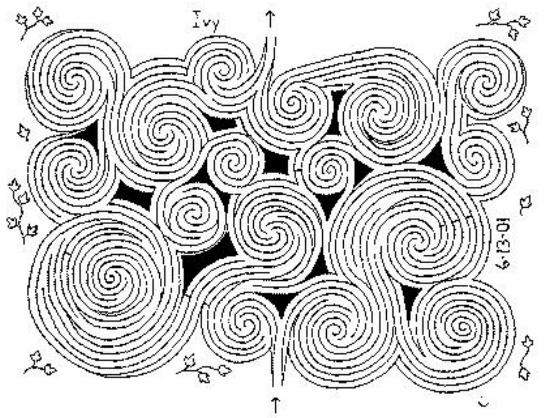
Tenemos pues que calcular el área de la región poligonal



$$\text{Área} = I + \frac{B}{2} - 1 = 72 + \frac{12}{2} - 1 = 77.$$

Podemos aproximar más el valor del área de la figura tomando retículas cada vez más densas, esto es, reduciendo la distancia entre los puntos de la retícula, de esa forma el área de la región poligonal y tiende al área de la figura.

Uno de los problemas que se plantea en la práctica para determinar el área de una figura es el de decidir qué región está en el interior o en el exterior de la figura. Analizar qué ocurre en el siguiente ejemplo si se pide calcular el área del camino que conduce de la entrada a la salida:



El resolver este problema es de interés para calcular el área de figuras de las que únicamente conocemos su contorno.

Un segundo problema, también motivado por las posibles aplicaciones prácticas es el medir la concentración de partículas en un fluido. Imaginar que tenemos una partícula distribuida en un líquido, por ejemplo los glóbulos rojos en la sangre, granos de oro en un fluido, personas en una concentración. El problema es determinar el número de glóbulos rojos, el número de granos de oro o el número de personas, etc.
El proceso a seguir es el considerar el proceso en el plano; en el caso de la sangre o del fluido basta con tomar una película fina, en el caso de la concentración de personas basta tomar una foto aérea.
Una vez que el proceso se ha reducido al plano basta calcular el área de la figura que forma; para ello basta considerar una retícula con la densidad que sea necesaria según la precisión que queramos obtener. Una vez calculada el área basta ver cual es la concentración (media) en las celdas de la retícula, de forma que un simple cálculo nos proporciona el dato que andamos buscando.

Estos son dos de los muchos problemas que se pueden plantear relativos a las aplicaciones del teorema de Pick a casos prácticos.

3.3. Polígonos regulares

Problema 3.6. *Prueba que no existe ningún triángulo equilátero que sea reticulado.*

Solución. Supongamos que existe un triángulo equilátero que sea reticulado, entonces su área es un número racional, ya que será $I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1$, y tanto $I(P)$ como $B(P)$ son números enteros.

Por otro lado, sea a el lado del triángulo, entonces el área del triángulo es $\frac{ah}{2}$, siendo $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ la altura del triángulo. Por lo tanto el valor del área es

$$A = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Tenemos que a^2 es el valor del área de un cuadrado reticulado, ya que dos de sus vértices están en la retícula. Por lo tanto a^2 es un número racional.
En conclusión, tenemos que $\sqrt{3} = \frac{4A}{a^2}$ es un número racional, lo que es una contradicción.

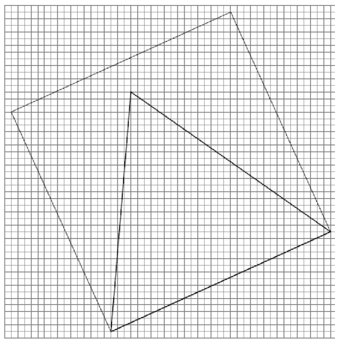


Figura 12

Problema 3.7. *Se considera una retícula $n \times n$ tal y como se indica en la figura. Sea A el punto $(0, n)$ y B el punto $(n, 0)$. Observa que la línea AB contiene $n-1$ puntos de la retícula, estos son: $(0, n)$, $(1, n-1)$, ..., $(n, 0)$. Dados dos puntos contiguos $(i-1, n-i+1)$ y $(i, n-i)$ se considera el triángulo $T_i = (0, 0)(i-1, n-i+1)(i, n-i)$, $i = 1, \ldots, n$. Contesta a las siguientes preguntas:*

(1) ¿Todos los triángulos tienen la misma área?

(2) Cuál es el área de cada uno de los triángulos T_i?

(3) ¿Hay triángulos T_i que no tienen puntos interiores?

(4) Si n es primo prueba que todos los triángulos T_i, salvo dos de ellos, tienen el mismo número de puntos interiores.

Solución.

(1) Todos los triángulos T_i tienen la misma área ya que tiene la misma base y la misma altura.

(2) Ya que el área del triángulo ABO es $n^2/2$, el área de cada triángulo T_i es $\frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$.

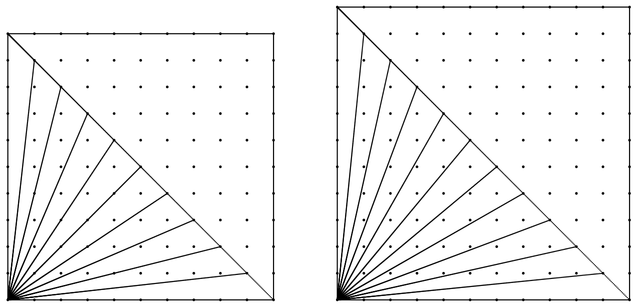
(3) Es claro que el triángulo T_1 y el triángulo T_n no tienen puntos interiores.

(4) Si n es primo, para cada $0 < i < n$ se tiene que i y $n-i$ son primos relativos; en efecto, ya que $0 < i < n$, existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = ai + bn$, y por tanto $1 = (a+b)i + b(n-I)$, luego i y $n-i$ son primos relativos. Como consecuencia los puntos $(i, n-i)$ se ven desde $(0, 0)$, en particular el segmento $(0, 0)(i, n-i)$ no contiene ningún punto de la retícula; esto es, los únicos puntos del borde del triángulo T_i, $i = 2, \ldots, n-1$, son los vértices, y como todos tiene la misma área, todos deben tener el mismo número de puntos interiores.

Como el área de T_i es $\frac{n}{2}$, se tiene la relación

$$\frac{n}{2} = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1 = I(P) + \frac{3}{2} - 1 = I(P) + \frac{1}{2},$$

se obtiene $I(P) = \frac{n-1}{2}$.



$n = 10$ $\qquad$ $n = 11$

Problema 3.8. *¿Es posible dibujar un pentágono regular reticulado?*

Si se puede dibujar un pentágono regular, es posible dibujar el triángulo ABC, siendo A, B y C vértices consecutivos del pentágono. Vamos a guiarnos por la siguiente figura:

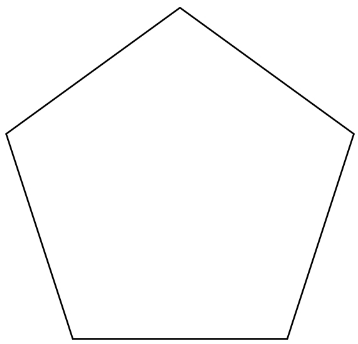


Figura 13

y consideramos la diagonal $\overline{AC}$.

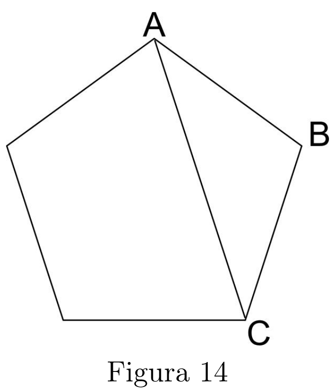


Figura 14

Vamos a completar esta figura trazando las otras diagonales, que cortan a $\overline{AC}$ en los puntos E y F.

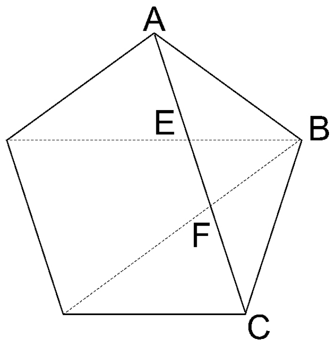


Figura 15

Consideramos ahora los siguientes triángulos:

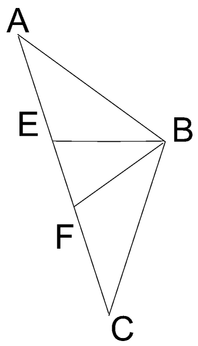


Figura 16

Se tienen las siguientes relaciones entre los ángulos:

$$\begin{aligned}
&\widehat{B} = 108 = \widehat{AEB} = \widehat{BFC};\\
&\widehat{A} = \widehat{C} = 36 = \widehat{ABE} = \widehat{FBC} = \widehat{EBF};\\
&\widehat{FEB} = \widehat{EFB} = 72.
\end{aligned}$$

Al tratar el triángulo

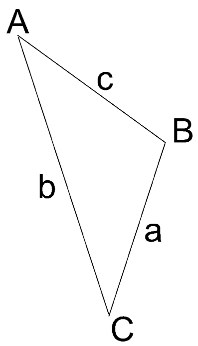


Figura 17

se tiene la relación

$$\begin{aligned}
\frac{b}{sen(B)} &= \frac{a}{sen(A)};\\
\frac{b}{sen108} &= \frac{a}{sen36}.
\end{aligned}$$

Al tratar el triángulo

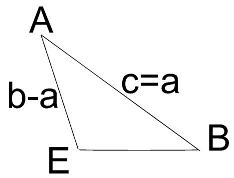


Figura 18

se tiene la relación

$$\frac{a}{sen(AEB)} = \frac{b-a}{sen(ABA)};$$
$$\frac{a}{sen108} = \frac{b-a}{sen36}.$$

Igualando estas expresiones se tiene

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a},$$

esto es, $b(b-a) = a^2$. Tomando a, el lado del pentágono, igual a 1 se tiene la relación $b^2 - b - 1 = 0$. Por tanto b es la raíz positiva del polinomio $X^2 - X - 1$, esto es, $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
El número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se llama el **número de oro** o **número áureo**, y se suele representar por ϕ.
Como el triángulo ABC es un triángulo reticulado, el lado $\overline{AC}$ es un segmento con extremos en la retícula, y podemos construir los cuadrados con lado $\overline{AC}$, siendo ambos reticulados. El área de cada uno de estos cuadrados es un número racional, pero su lado es $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o un múltiplo suyo, por ejemplo $k\phi$, ya que habíamos supuesto que el lado del pentágono es igual a 1. Entonces el área del cuadrado es $k^2\phi^2 = k^2\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
Sólo queda ver cómo debe de ser k. Tenemos que k es un segmento entre dos puntos de una retícula, por tanto es un entero, si los puntos están en la misma fila o columna, o es el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son números enteros, y por tanto k^2, que es la suma de los cuadrados de los catetos es u número entero. Obteniéndose que $k^2\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ es racional, lo que es una contradicción.
El número de oro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ aparece en muchas otras situaciones geométricas. Un rectángulo con lados a y b tales que $\frac{b}{a} = \phi$ se llama un **rectángulo áureo**. Los rectángulos áureos tienen la particularidad de que si se recorta un cuadrado de lado a, como se muestra en la figura, el rectángulo que resta es también un rectángulo áureo.

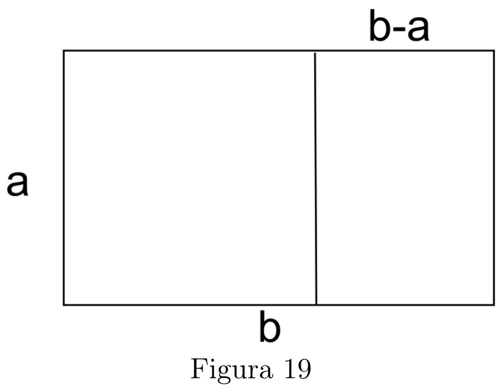


Figura 19

Surge entones el siguiente problema:

Problema 3.9. *¿Es posible dibujar, en una retícula, un rectángulo áureo reticulado?*

Si es posible dibujar un rectángulo áureo de lados a y b, éstos dos números verifican que sus cuadrados son enteros positivos, y de la relación $\frac{b}{a} = \phi$ se tiene que $\phi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ es un número racional, lo que es una contradicción.
Siguiendo de esta forma surge el problema:

Problema 3.10. *¿Es posible dibujar un hexágono regular reticulado?*

La respuesta es no, ya que en caso contrario se podría dibujar un triángulo equilátero.

Problema 3.11. *¿Es posible dibujar un octógono regular reticulado?*

Si la respuesta fuese afirmativa se tendría que $\sqrt{2}$ es un número racional, lo que es una contradicción.
Podemos entonces realizar la siguiente conjetura:
Conjetura. Salvo el cuadrado, no es posible dibujar en una retícula ningún otro polígono regular.
Una forma de abordar la demostración de esta conjetura pasaría por ver que para cualquier entero positivo $t \geq 5$ se tiene que $sen(2\pi/t)$ no es un número racional.
Actividades:
Ver Actividad (7.4)

4. Generalizaciones del Teorema de Pick

4.1. Regiones poligonales con agujeros

Un región del plano delimitada por un polígono simple se llama una **región poligonal**. Un **agujero** A de una región poligonal P es una region poligonal delimitada por un polígono simple contenido en P, Una región poligonal P tiene t **agujeros** si existen t agujeros, $A_1, \ldots, A_t$, en P tales que para cada par A_i, A_j, con $i \neq j$, los polígonos que delimitan A_i y A_j son disjuntos y para todo índice i el agujero A_i no es un agujero de ningún A_j, para todo $j \neq i$.
Una región poligonal se dirá reticulada si los vértices del polígonos no puntos de la retícula, y una región reticular con agujeros será una en la que los agujeros están delimitados por polígonos reticulados.

Problema 4.1. *Determinar el área de una región poligonal reticulada P con agujeros $A_1, \ldots, A_t$.*

Solución. Llamamos P_0 a la región poligonal delimitada por el polígono que define P, llamamos I_0 al número de puntos de la retícula interiores a P_0 y B_0 al número de puntos de la retícula en el borde o frontera de P_0. Tenemos entonces que el área de P_0 es: $I_0 + \frac{B_0}{2} - 1$.
Para determinar el área de P debemos restar las áreas de los agujeros. Si para cada índice i llamamos I_i y B_i a los puntos de la retícula interiores y en el borde de A_i, respectivamente, entonces el área del agujero A_i es: $I_i + \frac{B_i}{2} - 1$.
Por lo tanto el área de P es:

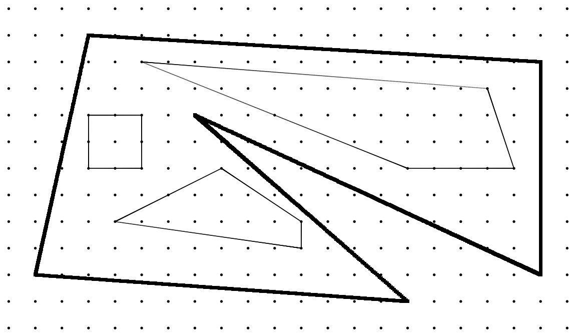
$$I_0 + \frac{B_0}{2} - 1 - \sum_{i=1}^{t}(I_i + \frac{B_i}{2} - 1) = I_0 + \frac{B_0}{2} - \sum_{i=1}^{t} I_i - \sum_{i=1}^{t} \frac{B_i}{2} + (t-1). \tag{1}$$

Se trata ahora de reordenar estas cantidades con objeto de obtener una fórmula sencilla.
Observa que los puntos interiores a A_i son interiores a P_0, pero no a P, por lo tanto debemos reducir I_0 en estas cantidades. Por la misma razón los puntos en el borde de A_i son puntos interiores a P_0, pero no a P. En consecuencia los puntos interiores a P son: $I = I_0 - \sum_{i=1}^{t} I_i - \sum_{i=1} B_i$. Los puntos en el borde de P son los del borde de P_0 más los del borde de cada uno de los agujeros, esto es: $B = B_0 + \sum_{i=1}^{t} B_i$.
Observa que podemos ahora escribir la fórmula en (1) como

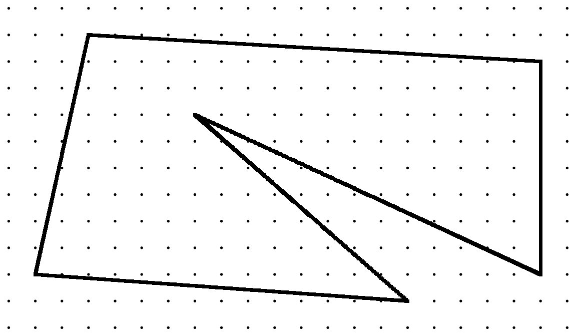
$$\left(I_0 - \sum_{i=1}^{t} I_i - \sum_{i=1} B_i\right) + \frac{B_0 + \sum_{i=1}^{t} B_i}{2} + (t-1) = I + \frac{B}{2} + (t-1).$$

Si la región poligonal reticulada P no tiene agujeros, entonces $t = 0$, y se obtiene exactamente la fórmula de Pick.
En el siguiente ejemplo tenemos una región poligonal reticulada con tres agujeros. El número de puntos de la retícula interiores a esta región es: $I = 81$. El número de puntos en el borde es: $B = 34$. El número de agujeros es $t = 3$. Por lo tanto el área es:

$$I + \frac{B}{2} + (t-1) = 81 + \frac{34}{2} + (3-1) = 100.$$

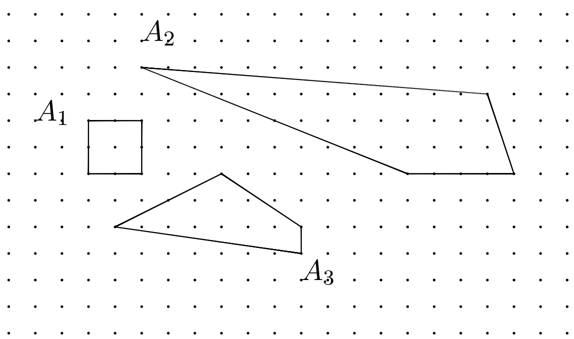


La siguiente figura representa a la región polinómica P_0. en este caso tenemos: $I_0 = 136$, $B_0 = 13$, luego el área es: $136 + \frac{13}{2} - 1 = 141,5$.



La siguiente figura representa los agujeros de nuestra región poligonal, supongamos que son A_1, A_2 y A_3. Se tiene:

$I_1 = 1$	$B_1 = 8$	El área de A_1 es: $1 + \frac{4}{2} - 1 = 4$
$I_2 = 24$	$B_2 = 8$	El área de A_2 es: $24 + \frac{8}{2} - 1 = 27$
$I_3 = 9$	$B_3 = 5$	El área de A_3 es: $9 + \frac{5}{2} - 1 = 10,5$



De esta forma el área de la región poligonal con agujeros es el área de la región total menos el área de los agujeros:

$$141,5 - 27 - 4 - 10,5 = 100.$$

Retículas no cuadradas

Actividades:
Ver Actividad (7.5)

Retículas no ortogonales

5. Zapatero a tus zapatos

Vamos a tratar un problema en el que el uso de una retícula plana nos va a dar una solución sencilla. Se trata de determinar el modo de colocar los cordones a unos zapatos para reducir al mínimo la longitud de cordón utilizada.

Consideramos un zapato en el que observamos la puntera y los agujeros para colocar los cordones, en este caso tenemos dos columnas de seis agujeros.

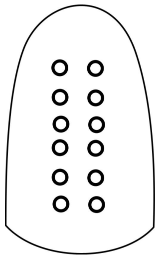


Figura 11. Zapato

Un modo de colocar los cordones en el zapato es el siguiente

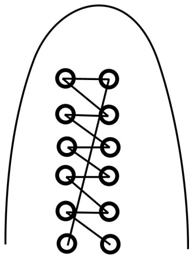


Figura 12. Modo clásico

Conocemos este modo de acordonar los zapatos, el **modo clásico**. Otra forma tradicional de acordonar los zapatos es el llamado **modo deportivo**, que presenta el siguiente aspecto.

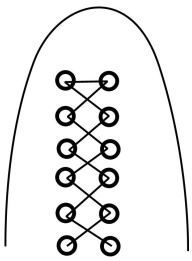


Figura 13. Modo deportivo

Observa que prescindimos del resto de cordón, pues en todos los casos el cordón sobrante tiene siempre la misma función.

Vamos a fijar el número de pares de agujeros que vamos a usar, pongamos que como en los ejemplos, este número es seis, y en general es n. Hay otros dos parámetros que son necesarios para estudiar el problema; el primo es la distancia d entre pares de agujeros, y el segundo es la distancia D entre las dos filas de agujeros.

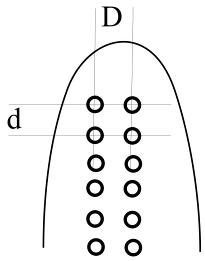


Figura 14. Parámetros

Es un problema sencillo determinar la longitud del cordon en cada uno de los encordados propuestos. Veamos el caso de la Figura 12. Desarrollado el cordon tenemos:

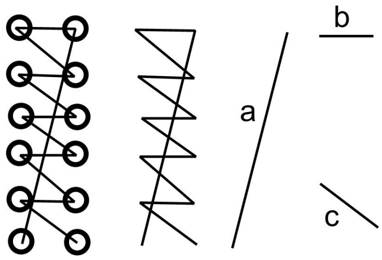


Figura 15. Modo clásico. II

De donde las longitudes a medir se reflejan en la siguiente figura:

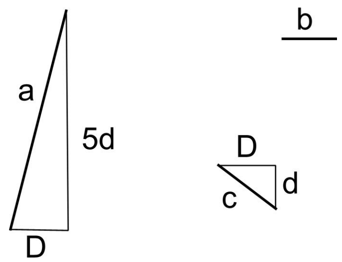


Figura 16. Modo clásico. III

En consecuencia tenemos:

$$\begin{aligned} &a = \sqrt{d^5 + (5d)^2}, \\ &b = D, \\ &c = \sqrt{D^2 + d^2}. \end{aligned}$$

La longitud total es:

$$a + 5b + 5c = \sqrt{d^5 + (5d)^2} + 5D + \sqrt{D^2 + d^2}.$$

Para el modo deportivo podemos hacer un desarrollo similar:

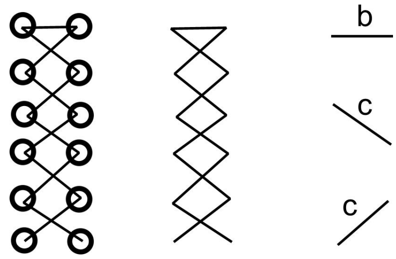


Figura 17. Modo deportivo. II

De donde las longitudes a medir se reflejan en la siguiente figura:

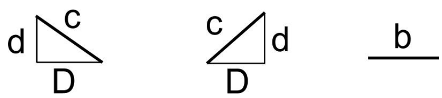


Figura 18. Modo deportivo. III

En consecuencia tenemos:

$$b = D,$$
$$c = \sqrt{D^2 + d^2}.$$

La longitud total es:

$$b + 10c = D + 10\sqrt{D^2 + d^2}.$$

¿Cómo podemos averiguar cuál de estas cantidades es la más grande?
Antes de seguir leyendo pasar a la Actividad (7.6).

Hacemos la diferencia:

$$\sqrt{d^5+(5d)^2}+5D+\sqrt{D^2+d^2}-(D+10\sqrt{D^2+d^2})=\sqrt{D^2+(5d)^2}+4D-5\sqrt{D^2+d^2}$$

Esta cantidad es positiva si se tiene

$$\sqrt{D^2+25d^2}+4D>5\sqrt{d^2+D^2}.$$

Como en esta expresión las dos cantidades son positivas, elevando al cuadrado se mantiene la desigualdad:

$$D^2+25d^2+16D^2+8D\sqrt{D^2+25d^2}>25(D^2+d^2),$$

O equivalentemente

$$8D\sqrt{d^2+25d^2}>8D^2.$$

Como $D\neq 0$, tenemos $\sqrt{d^2+25d^2}>D$, o equivalentemente $D^2+25d^2>D^2$, esto es, $25d^2>0$, que siempre es positivo.
En consecuencia siempre se tiene la desigualdad

$$\sqrt{d^5+(5d)^2}+5D+\sqrt{D^2+d^2}-(D+10\sqrt{D^2+d^2})>0,$$

y por tanto el modo clásico utiliza más cordón que el modo deportivo.

Vamos a ver un método gráfico para abordar este problema. Éste consiste en desarrollar todo el acordonado en un plano. Veamos el caso del acordonamiento en el modo clásico.

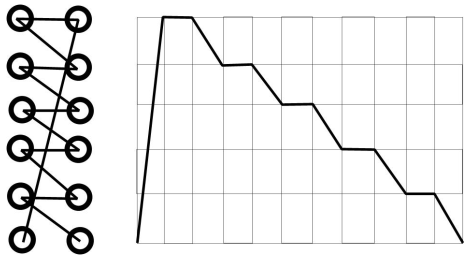


Figura 19. Modo clásico. IV

De esta forma podemos medir longitudes: la del cordon utilizado que es la línea gruesa que aparece en la retícula, y relacionarlas con las áreas que encierran junto con la línea horizontal de la base de la retícula. Al suponer la retícula entera, esto es, $D = d$, el área que encierra esta línea, por el teorema de Pick, es:

$$I = 20. \quad B = 22. \quad \text{Área} = 20 + \frac{22}{2} - 1 = 30.$$

¿Qué ocurre con el acordonamiento según el modo deportivo. En este caso tenemos:

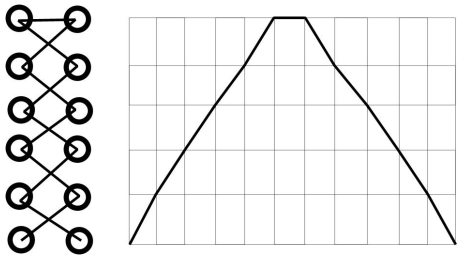


Figura 20. Modo deportivo. IV

El área que encierra esta figura es:

$$I = 20. \quad B = 22. \quad \text{Área} = 20 + \frac{22}{2} - 1 = 30.$$

Tenemos que los dos polígonos encierran el mismo área, sin embargo sus perímetros son diferentes.
Comentario.
Comentar sobre la fórmula de Herón que relaciona el área de un triángulo y el perímetro del mismo. Este resultado no es cierto para polígonos de más de tres lados.
Ver Actividad (7.7).
Analicemos otros modos de acordonar un zapato. Para ello lo primero que tenemos que perfilar es qué entendemos por un **acordonado correcto**. Vamos a exigirle a un acordonado las siguientes condiciones:

1. Debe unirse cada agujero de la fila izquierda con al menos un agujero de la fila derecha y viceversa y
2. por cada agujero el cordón pasa una sola vez.

Por ejemplo en la figura siguiente, solo el acordonado (a) es correcto.

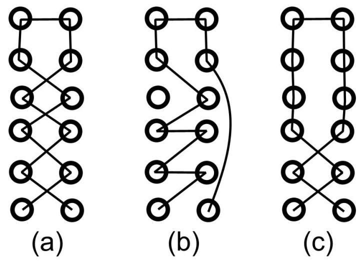


Figura 21. Ejemplos de acordonados.

Ver Actividad(7.8)
Nos planteamos el problema de determinar un modo de acordonar zapatos de forma que la longitud de cordón empleada sea mínima. Traducido a la retícula se trata de determinar un polígono que tenga por base la fila inferior de la retícula y que tenga exactamente dos vértices en cada fila de la retícula. Como consecuencia de estas condiciones, resulta que la longitud de la base debe ser, al menos de 5, esto es, debe involucrar al menos a seis columnas de vértices de la retícula.
Veamos un ejemplo en el que este límite se alcanza.

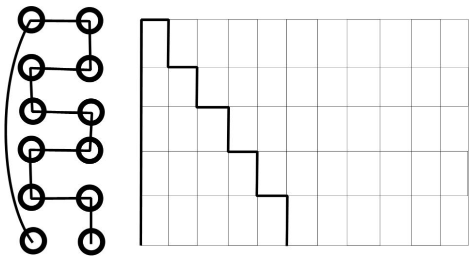


Figura 22. Acordonado 1.

Otra posible configuración es:

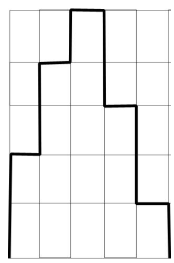


Figura 23. Acordonado 2.

No debe ser difícil de probar que cualquier otra configuración que requiera más de 6 columnas es necesariamente más larga, por lo tanto nos restringimos a considerar el caso de 6 columnas.
¿Cuántos puntos tendremos en la frontera? Contando los de la base debemos tener como mínimo 16 puntos en la frontera.
¿Cuántos puntos tendremos en el interior? Observa que en la primera fila tenemos siempre un trazo vertical, luego no hay puntos en el interior. En la segunda fila podemos no tener ninguno, en la tercera fila tendremos mínimo 1, y así sucesivamente hasta llegar a la fila quinta. En total tendremos al menos 0+0+1+2+3=6 puntos en el interior. En consecuencia el área que encierra esta línea poligonal es, como mínimo,

$$6 + \frac{16}{2} - 1 = 15.$$

Se trata pues de determinar si existe un polígono de área 15 que cumpla con las condiciones propuestas. Observa que un posible ejemplo aparece en la Figura 22.
¿Cuál es el acordonado de menor longitud? Como el cruce en diagonal, frente al doble cruce en paralelo, hace que aumente la longitud del cordon, deberíamos utilizar el menor número de cruces en diagonal.
Hacer tres cruces en diagonal nos aporta una solución que no es mínima.

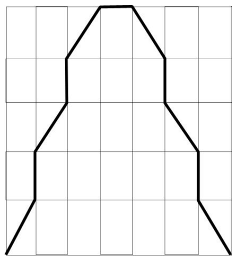


Figura 24. Acordonado 3.

como podemos apreciar al comparar con la siguiente que tiene dos cruces en diagonal.

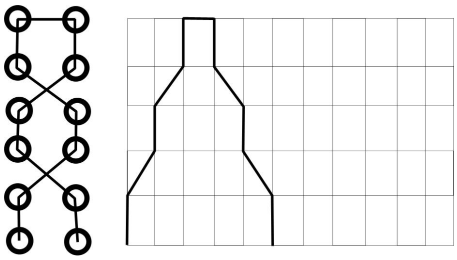


Figura 25. Acordonado 4.

Vamos a calcular las longitudes de estos dos acordonamientos suponiendo que existe la relación $D?kd$ par algún $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$.
Para el acordonado de la figura 24 la longitud es:

$$4d + D + 6\sqrt{d^2 + D^2} = 4dkd + 6d\sqrt{1 + k^2}.$$

En cambio, en el acordonamiento de la figura 25 éste es:

$$6d + D + 4\sqrt{d^2 + D^2} = 6d + kd + 4d\sqrt{1 + k^2}.$$

Restando ambos se tiene la relación $\sqrt{1 + k^2} - 1$ a favor del acordonamiento de la figura 24. Como $k > 1$, se tiene que siempre ésta es más largo.
Proponemos pues como acordonado de menor longitud el que proporciona la figura 25.
Ver Actividad (7.9).

6. El Stomachion de Arquímedes

El Stomachion es un juego de combinación de formas que se atribuye a Arquímedes. Se construye sobre un cuadrado reticulado 12×12 y consta de dies piezas. El siguiente dibujo representa el Stomachion.

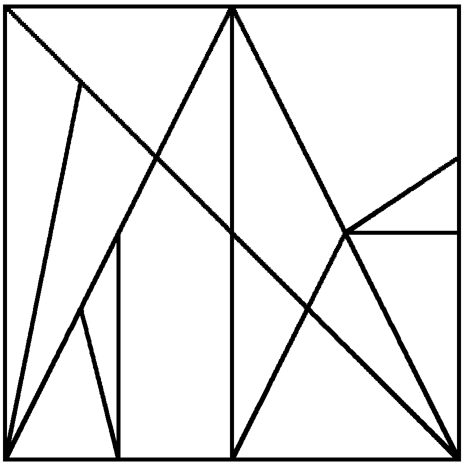
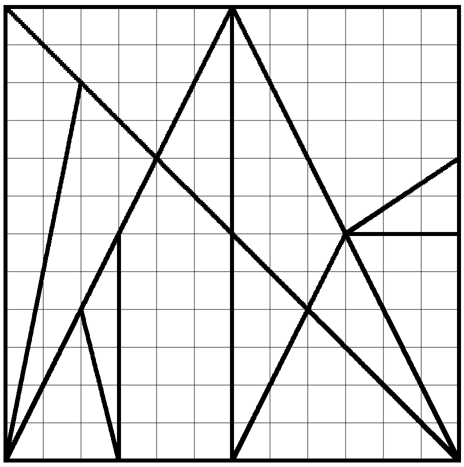
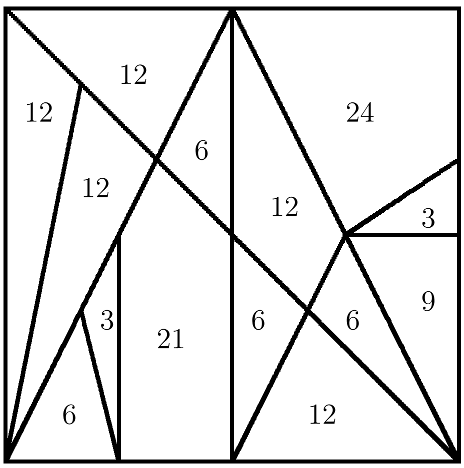


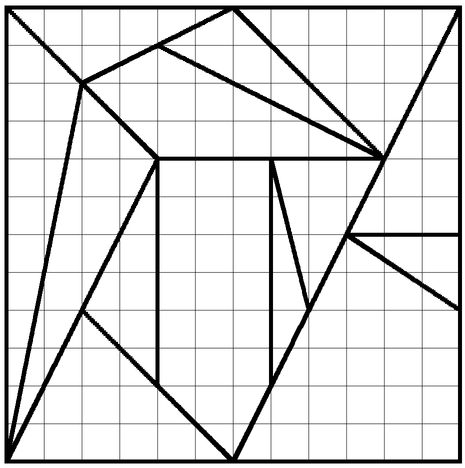
Figura 31. Stomachion.

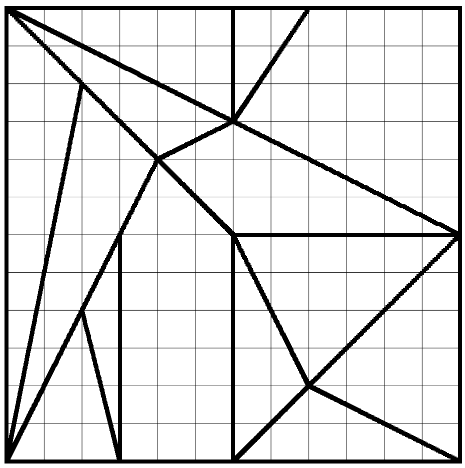


El uso de la retícula nos permite calcular el área de cada una de las piezas del Stomachion. Estas son:



Como un juego de combinatoria que es, una de las primeras actividades que se puede hacer con el Stomachion es formar diversas figuras.
Formar cuadrados 12×12 con todas las piezas del Stomachion.
Aquí tenéis dos de esta configuraciones:

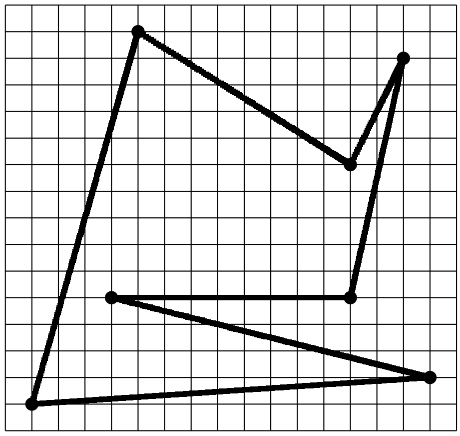




Ver Actividad (7.10)
Otro de los usos de las piezas del Stomachion es el construir figuras a partir de ellas. En lo que sigue proponemos una actividad consistente en construir las figuras indicadas utilizando las piezas del Stomachion.
Ver Actividad (7.11)

7. Actividades

Actividad 7.1. Determina el área encerrada por el polígono.



Actividad 7.2. Calcula la media racional de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

Actividad 7.3. Construye la sucesión de Farea F_8.

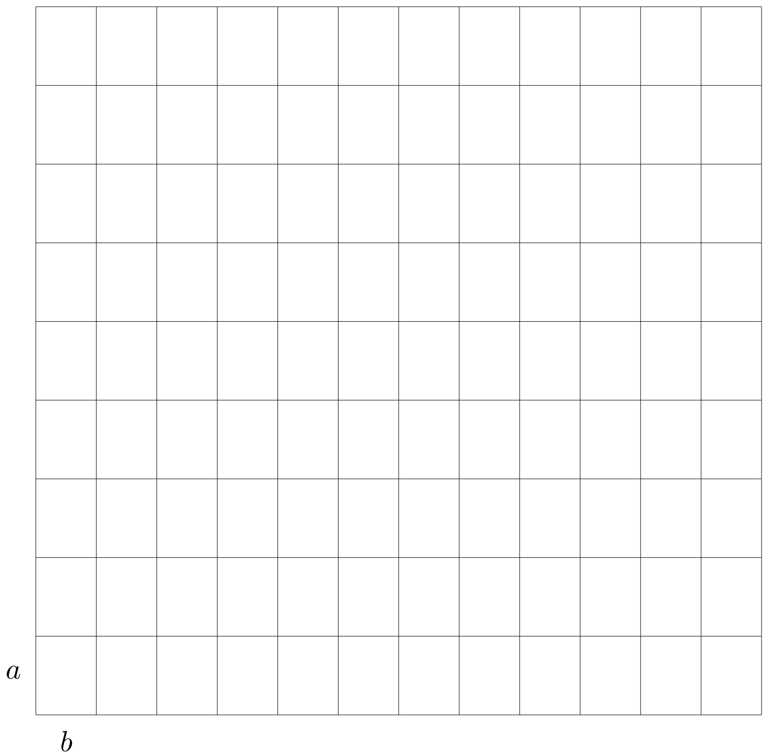
Actividad 7.4. Se considera un círculo con centro un punto de la reticula y radio n. Observa que si $n = 1$, entonces el círculo cubre 5 puntos. Si $n = 2$, entonces cubre 13 puntos. Si $n = 3$, entonces cubre 29 puntos. Si llamamos $p(n)$ al número de puntos que cubre el círculo de radio n se tiene la siguiente relación:

$$\begin{array}{lllll} p(1) = 5 & = 4 + 1 & = 4 + 1^2 & = 4 + (2n - 1)^2, & n = 1. \\ p(2) = 13 & = 4 + 9 & = 4 + 3^2 & = 4 + (2n - 1)^2, & n = 2. \\ p(3) = 29 & = 4 + 25 & = 4 + 5^2 & = 4 + (2n - 1)^2, & n = 3. \end{array}$$

¿Ocurre que $p(4) = 4 + (2n - 1)^2$ con $n = 4$, esto es, $p(4) = 4 + 7^2 = 53$?

¿Es cierto el resultado general $p(n) = 4 + (2n - 1)^2$ para todo n? ¿Por qué?

Actividad 7.5. Estudiar la fórmula de Pick para retículas no cuadradas, esto es, en retículas del tipo



Conociendo los valores de a y de b. ¿Es posible calcular el área que encierra un polígono simple reticulado conociendo los puntos interiores y los puntos del borde?

Actividad 7.6. De las dos formas de acordonar un zapato, ¿cuál utiliza más cordón?

Actividad 7.7. Recordar la fórmula de Herón que relaciona el área de un triángulo con el perímetro. Comprobar que este resultado no es cierto para cuadriláteros.

Actividad 7.8. Desarrolla en una retícula los acordonados de la siguiente figura.

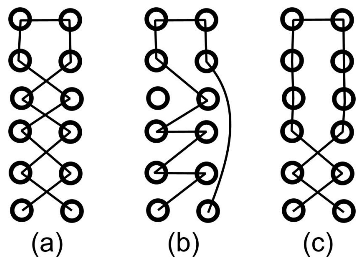
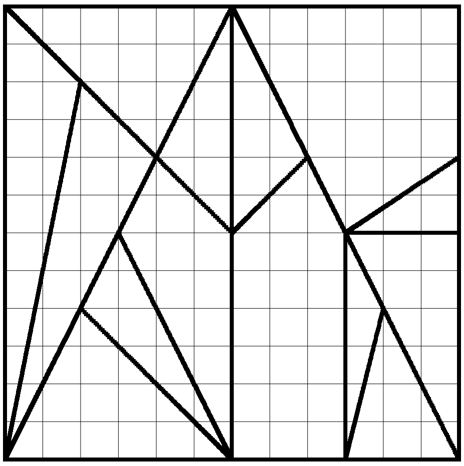


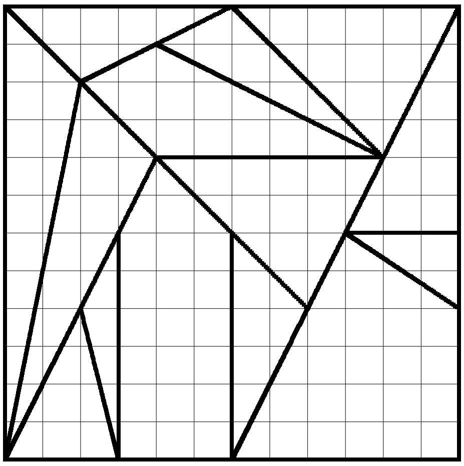
Figura 21. Ejemplos de acordonados.

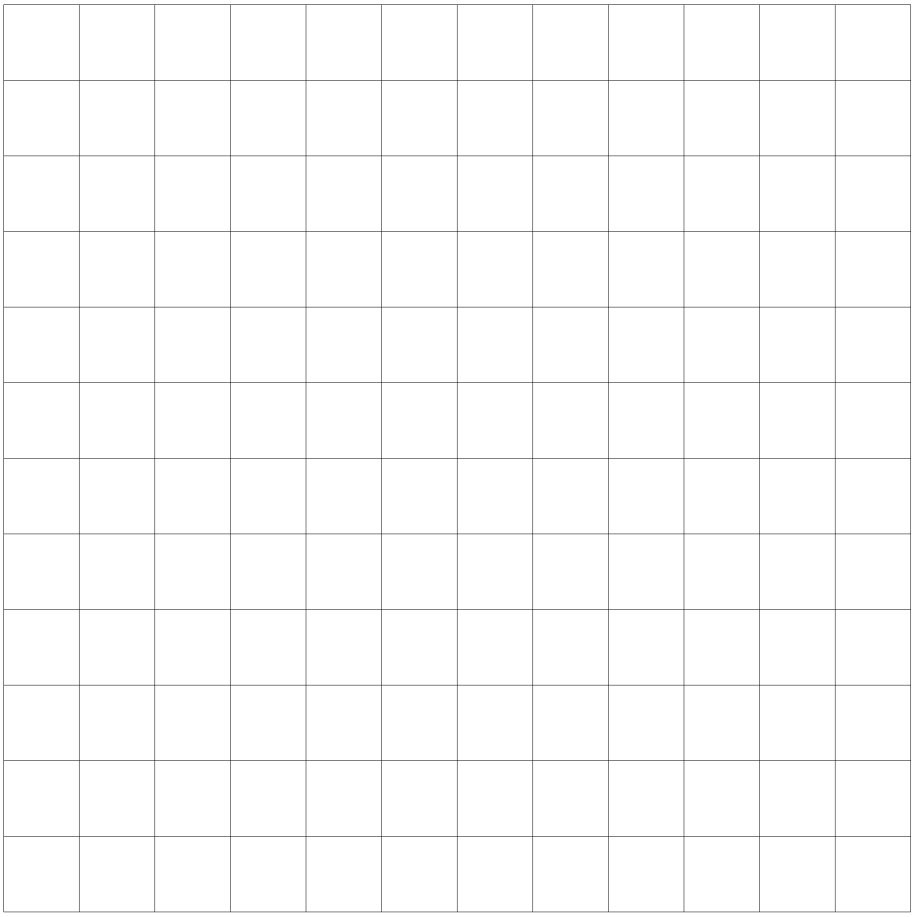
Para ello ayúdate de la siguiente retícula:

Actividad 7.9. Determinar el acordonamiento que utilice menor longitud de cordón para el caso de 6 agujeros en paralelo. Extender en resultado a otras configuraciones con mayor o menor número de agujeros.

Actividad 7.10. Utilizar la siguiente retícula para construir un juego de Stomachion de forma que podáis completar el cuadrado de otras formas distintas. Primero presentamos dos nuevos ejemplos.

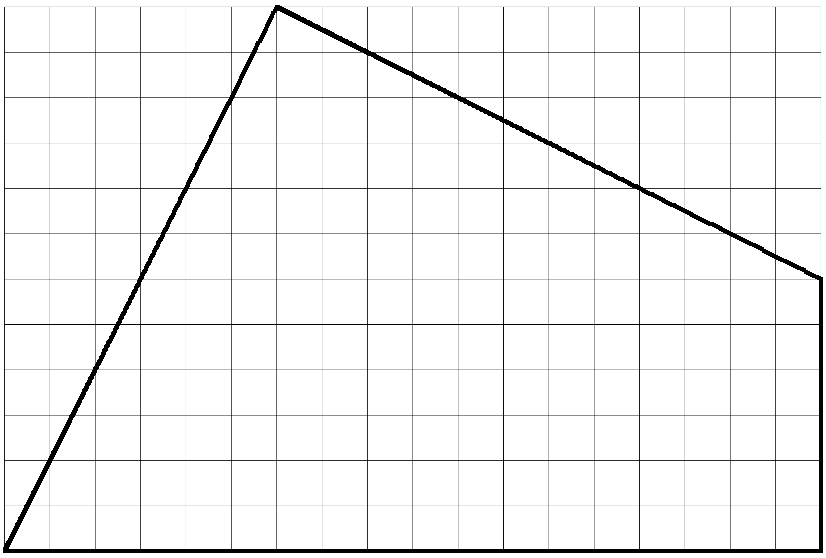




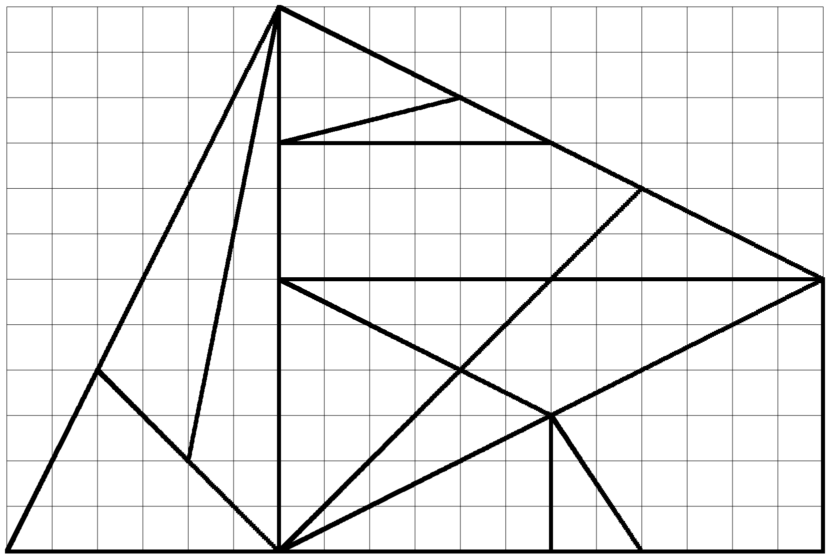


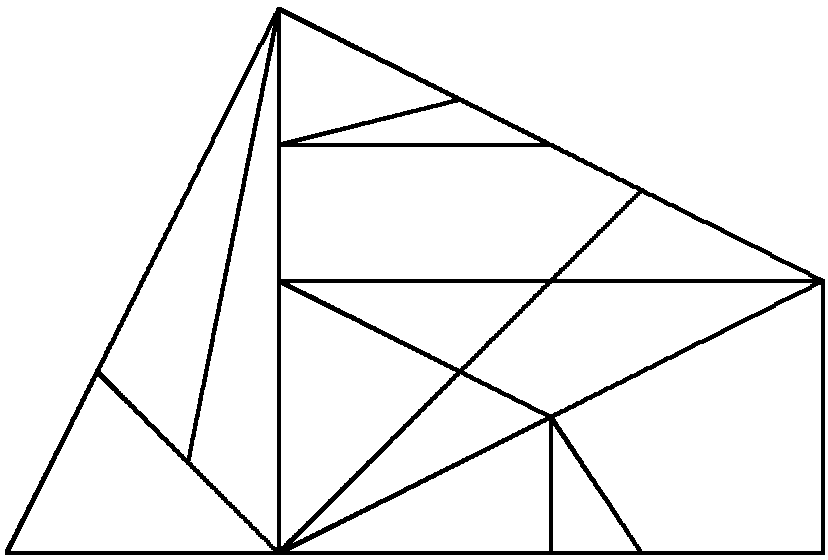
Actividad 7.11. A continuación presentamos algunas figuras que se pueden construir con las piezas del Stomachion. Reproducirlas con éstas piezas. Podéis diseñar otras muchas por vuestra cuenta. Utilizar la reticula libre para dibujarlas una vez construidas.

El trapecio:

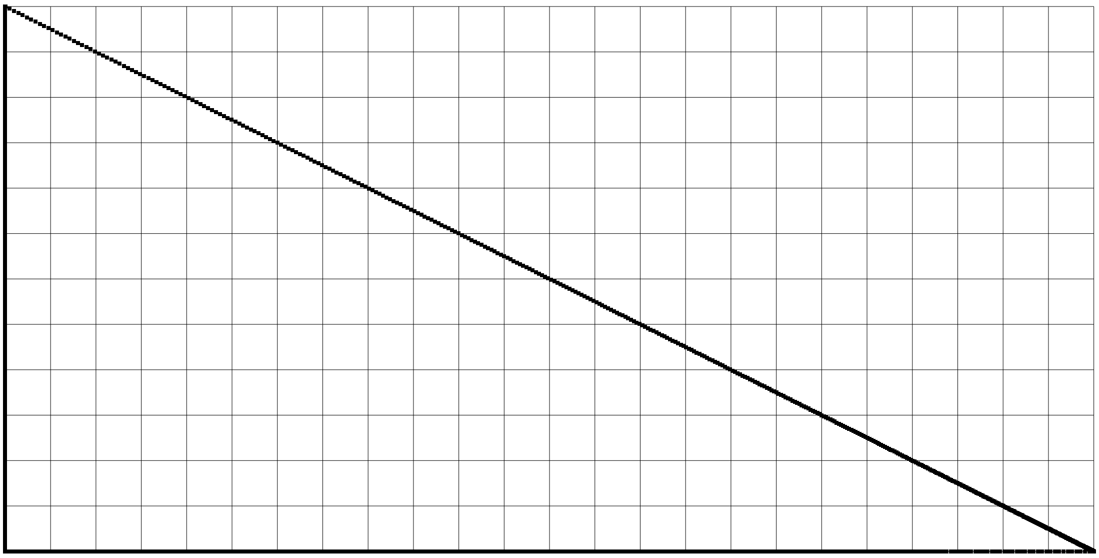


Solución:

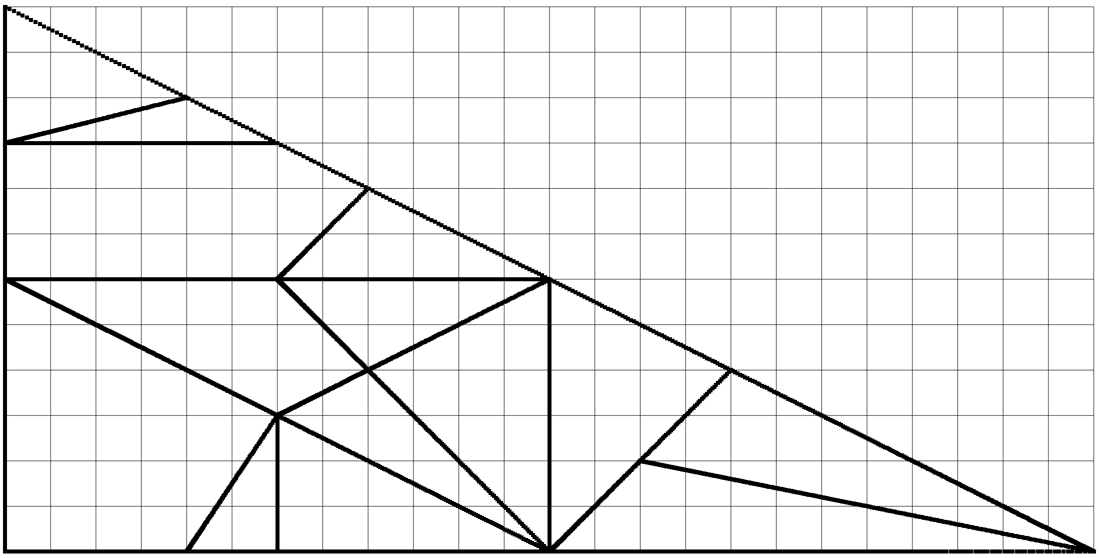


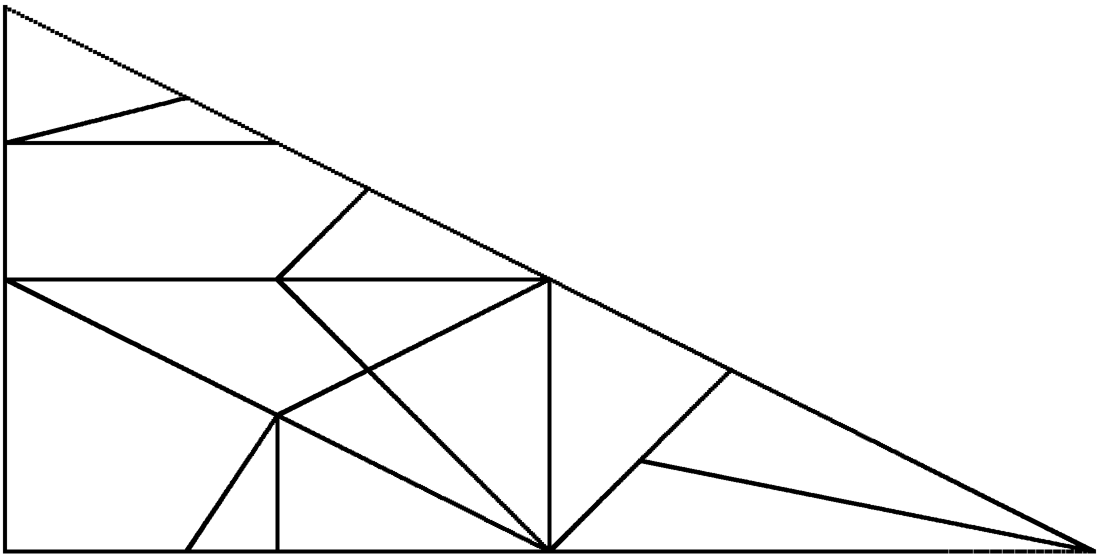


El triángulo:

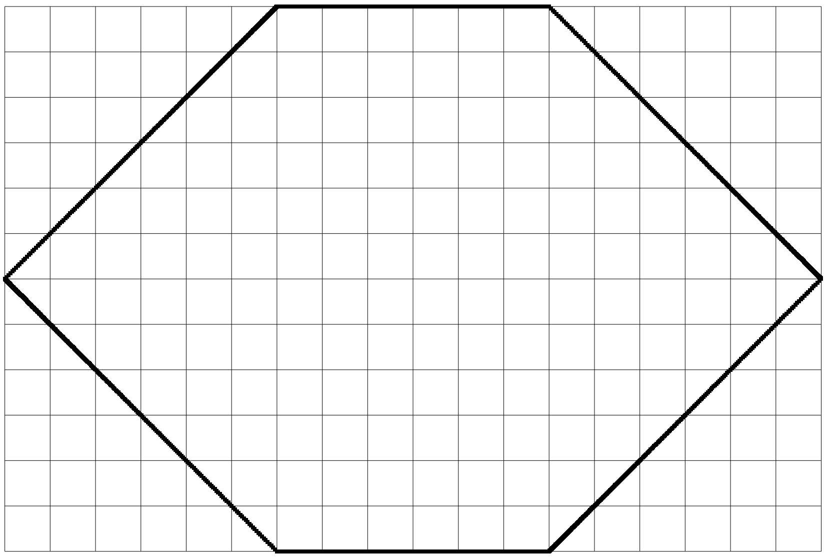


Solución:

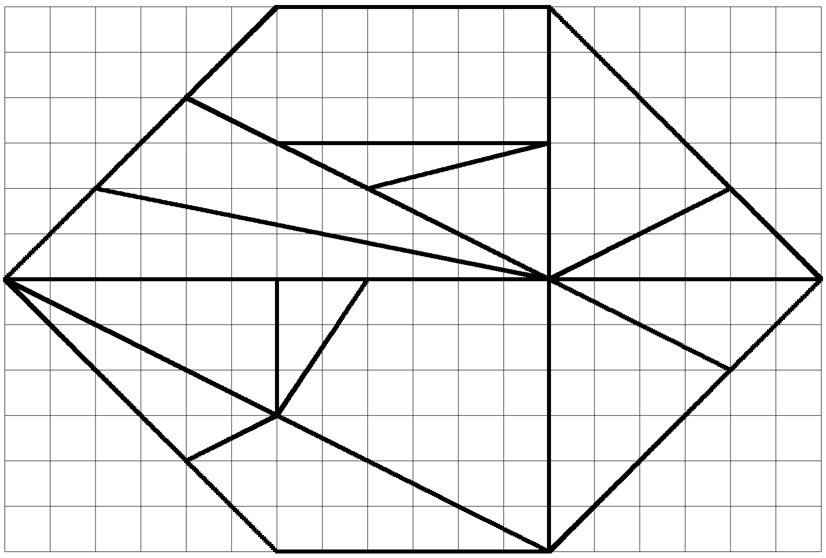


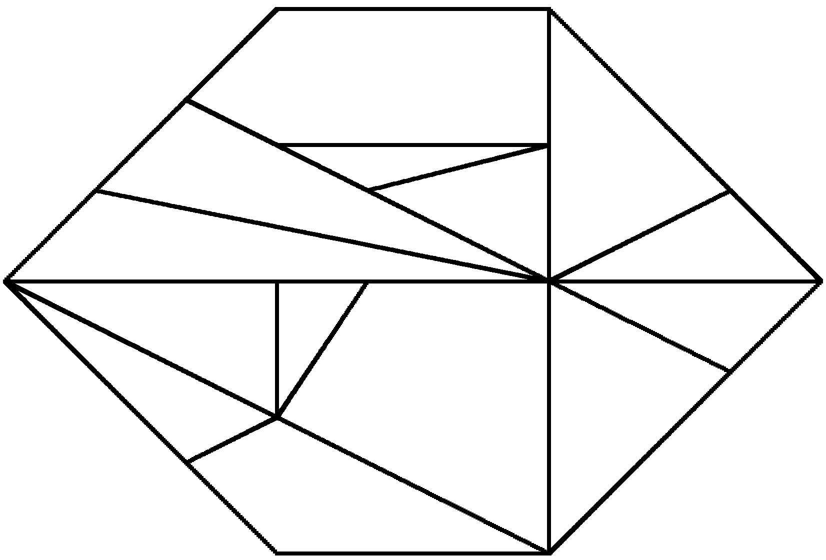


El hexágono:

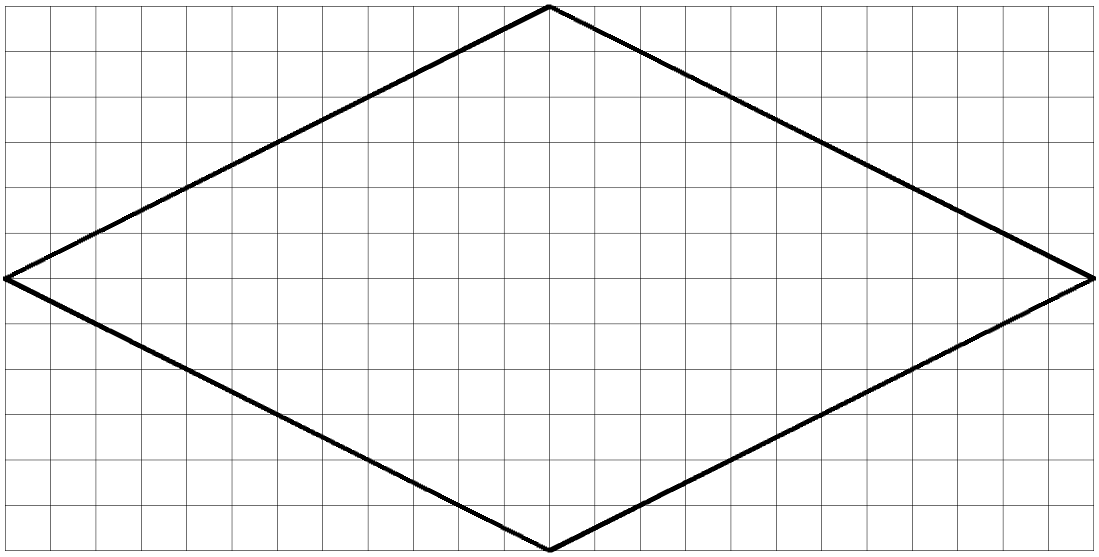


Solución:

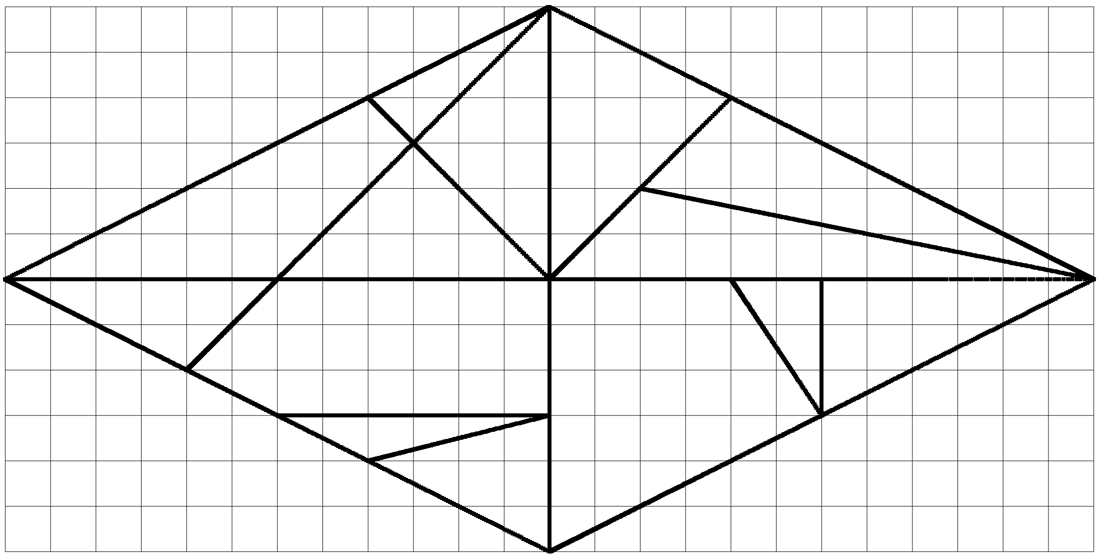


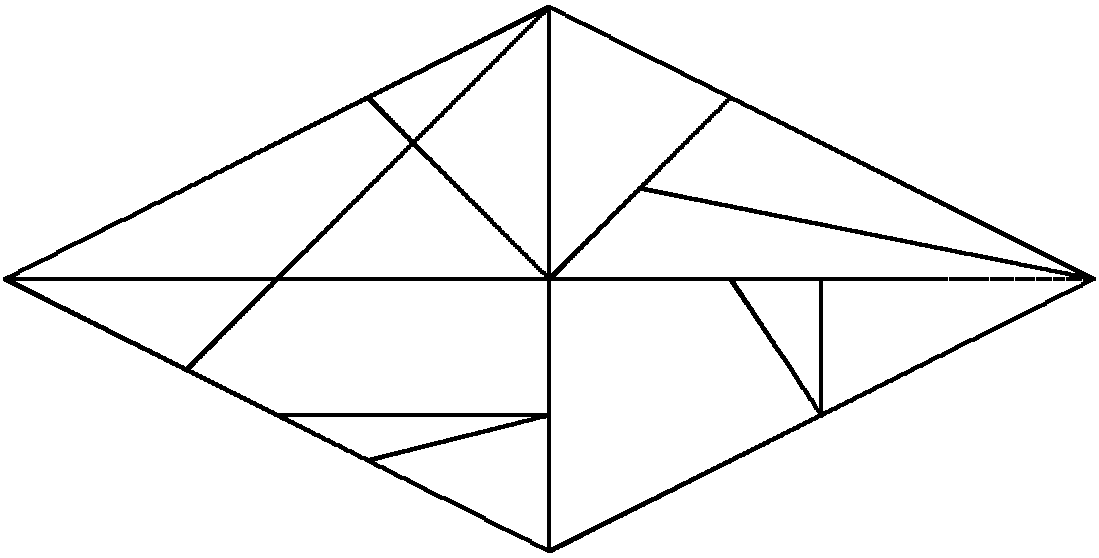


El rombo:



Solución:





Referencias

[1] Apostol, , 1997

[2] Conway and Guy, , 1996.

[3] Hardy and Wright, , 1979.

[4] Ross Honsberger, *El ingenio de las matemáticas*, .

[5] Vardi, , 1991.

Pascual Jara. Departamento de Álgebra. Universidad de Granada
Ceferino Ruiz. Departameneo de Geometría y Topología. Universidad de Granada
.