UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de ciencias

Trabajo Fin de Máster

Máster en Matemáticas

Ideales Primos en Anillos Conmutativos

Autor
Carlos Atero González

Curso Académico

2023-2024

Departamento de Álgebra

Tutor
Pascual Jara Martínez

Declaración de originalidad

Carlos Atero González

Declaro explícitamente que el trabajo presentado es original, entendido en el sentido de que no he utilizado fuentes para la elaboración del mismo sin citarlas debidamente.

En Granada a 31 de julio de 2024

Índice general

Introducción

mm A

El objetivo de este trabajo es estudiar la relación que existe entre un anillo cualquiera A y su espectro $\operatorname{Spec}(A)$, esto es, el conjunto de los ideales primos de dicho anillo. Para ello veremos que dado cualquier anillo se puede inducir en su espectro una estructura de espacio topológico a través de la topología de Zariski, cuyos conjuntos cerrados son:

veremos que

$$\{V(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \subseteq A\} \text{ siendo } V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

De esta forma, el que un anillo verifique ciertas propiedades algebraicas conlleva que su espectro cumpla a su vez ciertas propiedades topológicas y viceversa.

La motivación para estudiar el espectro de un anillo conmutativo se puede encontrar en diversas disciplinas. Consideremos por ejemplo la geometría algebraica. Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces existe una conexión de Galois entre los conjuntos algebraicos del espacio afín $\mathbb{K}^n$ y los ideales del anillo de polinomios $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$.

Cada ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$, determina el conjunto algebraico de los ceros comunes a todos los polinomios de $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} \longrightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathbb{K} \mid F(x) = 0 \text{ para todo } F \in \mathfrak{a}\}$$

Dado un subconjunto de puntos $C \subseteq \mathbb{K}^n$ podemos considerar el ideal de $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ determinado por los polinomios que se anulan en todos los puntos de C.

$$C \longrightarrow \mathcal{I}(C) = \{F \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n] \mid F(c) = 0 \text{ para todo } c \in C\}$$

Se tiene que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) = \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$ y $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})))$ para cada ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$. Los subconjuntos algebraicos irreducibles (aquellos que no son unión de subconjuntos algebraicos propios) corresponden a ideales primos, y en concreto, los puntos corresponden a ideales maximales. De esta forma obtenemos conjuntos algebraicos mediante ideales radicales y viceversa.

La topología natural en este contexto tiene como cerrados a los conjuntos algebraicos $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$, para algún ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$, que mediante la parametrización anterior corresponde al conjunto de ideales primos $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$, esto es, el conjunto de ideales primos que se obtienen de cada subconjunto algebraico irreducible formado por los ceros comunes a los polinomios de $\mathfrak{a}$. Por ejemplo, si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal, este es de la forma

$$\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$$

que corresponde al punto $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$, y a su vez, $(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{V}(\mathfrak{a})$ si $F(a_1, ..., a_n) = 0$ para todo polinomio $F \in \mathfrak{a}$, esto es, si $F \in (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$, y por tanto si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$.

Para alcanzar el objetivo impuesto, dedicaremos la primera parte de este texto a establecer los conceptos, ideas y herramientas algebraicas fundamentales para el desarrollo teórico posterior. En particular destacamos la importancia de los siguientes resultados:

Proposición 1.1.2. Sean un anillo A y un ideal suyo $\mathfrak{a}$. Existe una correspondencia biyectiva, conservando el orden dado por la inclusión, entre el conjunto de los ideales $\mathfrak{b}$ de A que contienen al ideal $\mathfrak{a}$ y el conjunto de los ideales $\overline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ de $A/\mathfrak{a}$, dada por $\mathfrak{b} = p^{-1}(\overline{\mathfrak{b}})$.

Corolario 1.3.2. Sea A un anillo y sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo. Entonces los ideales primos del anillo $A_{\mathfrak{p}}$ están en correspondencia biyectiva con los ideales primos de A contenidos en $\mathfrak{p}$.

Así, la reducción al anillo cociente y la localización nos permiten, respectivamente, centrar la atención en los ideales primos que contienen a un determinado ideal y los ideales primos contenidos en un determinado ideal primo.

En la segunda parte de este escrito presentaremos los conceptos topológicos que abordaremos al estudiar la topología de Zariski. En concreto, se definirán:

- **Cuasi-compacidad**: pues el espectro de cualquier anillo es cuasi-compacto.
- **Irreductibilidad**: pues si el espectro de un anillo es irreducible, entonces el conjunto de todos los elementos nilpotentes, que denotaremos $\mathrm{Nil}(A)$, es el único ideal primo minimal del anillo.
- **Conexión**: pues cada idempotente del anillo genera en el espectro un conjunto abierto y cerrado, y por tanto un anillo no tiene idempotentes no triviales si, y solo si, su espectro es conexo.
- **Axiomas de separación**: nos servirán para caracterizar los anillos de dimensión 0 y distinguir clases dentro de los mismos.

La tercera y última parte se subdivide a su vez en dos secciones. Primeramente se estudian las propiedades comunes que cumple el espectro de cualquier anillo, de entre las cuales destaca el siguiente resultado:

Corolario 3.1.4. $\mathrm{Spec}(A)$ y $\mathrm{Spec}(A/\mathrm{Nil}(A))$ son homeomorfos para todo anillo A.

Finalmente nos centraremos en el estudio de anillos de dimensión 0, distinguiendo dentro de los mismos anillos que cumplan condiciones interesantes. Caracterizaremos los anillos de dimensión 0 mediante las condiciones equivalentes:

(a) $\mathrm{Spec}(A)$ es un espacio topológico T_2.

(b) $\mathrm{Spec}(A)$ es un espacio topológico T_1.

(c) A es un anillo π-regular.

Además, el espectro de todo anillo π-regular A es isomorfo al espectro del anillo $A/\mathrm{Nil}(A)$, que es un anillo regular (en el sentido von Neumann), esto es, $A/\mathrm{Nil}(A)$ es un anillo de dimensión cero sin elementos nilpotentes distintos de 0. Por este motivo es natural estudiar los anillos regulares, obteniendo así los siguientes resultados:

Proposición 3.4.5. Si A es un producto directo finito de cuerpos, entonces $\mathrm{Spec}(A)$ es finito y la topología de Zariski coincide con la topología discreta.

Proposición 3.4.9. Si A es un anillo "strongly zero–dimensional", entonces $\mathrm{Spec}(A)$ es finito y la topología de Zariski en $\mathrm{Spec}(A)$ es discreta. Además, $A/\mathrm{Nil}(A)$ es un anillo regular isomorfo a un producto finito de cuerpos.

Concluiremos el estudio de los anillos de dimensión 0, estudiando los anillos cuyo espectro sea "strongly zero–dimensional" (SZD), y los relacionaremos con los anillos de Gelfand, aunque estos últimos no tienen por qué ser de dimensión 0. Resaltamos el siguiente resultado:

Proposición 3.4.3. En todo anillo A los siguientes enunciados son equivalentes:

(*a*) A es un anillo "clean".

(b) Spec(A) es SZD.

(c) A es un anillo “exchange”.

Entre las fuentes utilizadas para la elaboración de este trabajo se destacan:

- [2]: Principal referencia para el desarrollo del primer capítulo en el que se fundamentan con el álgebra conmutativa básica. En especial se destacan los capítulos “1. Anillos e ideales” y “3. Anillos y módulos de fracciones”.
- [5]: Principal referencia para el estudio de los anillos “strongly zero–dimensional”.
- [10]: Principal referencia para el estudio de los anillos π-regulares.

Capítulo 1

Anillos conmutativos e ideales

En este primer capítulo se establecerán las definiciones y propiedades elementales en relación a los anillos conmutativos así como la notación que se utilizará a lo largo del texto. Con objeto de posteriormente estudiar la estructura de los ideales primos de un anillo, fundamentaremos las operaciones de reducción de un anillo módulo un ideal y localización de un anillo en un ideal primo. Además, estudiaremos el concepto de ideal radical, nilradical y radical de Jacobson pues nos permitirán simplificar el estudio del espectro de un anillo. Por último se revisará el concepto de dimensión de un anillo.

1.1 Definiciones y propiedades básicas.

Definición 1.1.1. Un **anillo** es una cuaterna $(A, +, \cdot, 1)$ formada por un conjunto A y dos leyes de composición internas, llamadas suma y producto, que verifican:

(i) $(A, +, 0)$ es un grupo conmutativo.

Llamamos **cero** al elemento neutro de la suma, que denotamos por 0. Para cualquier $x \in A$ denotaremos a su elemento **opuesto** por $-x$.

(ii) $(A, \cdot, 1)$ es un **monoide**, es decir:

(a) El producto es asociativo, esto es, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para todo $x, y, z \in A$.

(b) Existe elemento neutro, esto es, existe $e \in A$ tal que $x \cdot e = e \cdot x = x, \forall x \in A$.

Llamamos **uno** al elemento neutro del producto, que representamos por 1.

(iii) Se cumplen las dos propiedades distributivas del producto respecto de la suma;

$$\text{Para todo } x, y, z \in A, \text{ se cumple que: } \begin{cases} x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \\ (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \end{cases}$$

Si la segunda operación es conmutativa, esto es, para todo $x, y \in A$, se cumple que $x \cdot y = y \cdot x$, se dice que el anillo es **conmutativo**.

En un anillo A, si para un elemento $x \in A$, existe otro elemento $y \in A$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = 1$ se dice que y es un elemento **inverso** de x. Si un elemento tiene inverso, se dice que es **invertible**.

En un anillo A, el conjunto $A^\times$ formado por los elementos invertibles de A, junto con el producto definido en dicho anillo, es un grupo (si A es conmutativo, entonces $(A^\times, \cdot)$ también lo será).

En un anillo A, un elemento $x \in A$ se llama **divisor de cero** si existe un elemento no nulo $y \in A$ tal que $x \cdot y = 0$.

Si el único divisor de cero de un anillo A es el elemento cero, entonces se dice que A es un **dominio de integridad**.

En un dominio de integridad D, un elemento distinto de cero $0 \neq x \in A$ se llama **irreducible** si no es invertible y en cada factorización $x = x_1 x_2$ se tiene que x_1 ó x_2 es invertible. Un dominio de integridad en el que todo elemento distinto de 0 y no invertible se puede escribir como producto de elementos irreducibles se llama **dominio de factorización única**.

Un anillo en el que todo elemento no nulo tiene inverso se dice **anillo de división**. Si un anillo de división es conmutativo, se dice que es **cuerpo**. Nótese que todo cuerpo es dominio de integridad (el recíproco es falso, por ejemplo $\mathbb{Z}$ es dominio de integridad pero no es cuerpo).

A partir de este momento, salvo que se diga lo contrario, en este texto solamente se trabajará con anillos conmutativos, por lo que cuando aparezca la palabra "anillo", se estará haciendo referencia a un anillo conmutativo. Además, dados dos elementos de un anillo $x, y \in A$, representaremos el elemento $x \cdot y$ por xy y le llamaremos **producto** de a por b.

Proposición 1.1.1. *En un anillo A, los siguientes enunciados son ciertos:*

(1) *Los elementos cero y uno son únicos.*

(2) *Para cada elemento $a \in A$, el opuesto y el inverso (si existe este último), son únicos.*

(3) *Para todo $x \in A$ se tiene que $x0=0$.*

(4) *A está compuesto de un sólo elemento si, y sólo si, $0 = 1$.*

*(En este caso, $A = \{0\}$ y recibe el nombre de anillo **trivial** que representamos por 0.)*

(5) *Para todo $x, y \in A$, se cumple que $(-x)\,y = -\,(xy) = x\,(-y)$.*

(6) ***Fórmula de Newton**: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$, para todo $x, y \in A$ y $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

(1) Si $x, y \in A$ son dos ceros, entonces $x = x + y = y$. De igual forma, si $x, y \in A$ fuesen unos, entonces $x = xy = y$.

(2) Sean $x, y \in A$ dos opuestos de $a \in A$, entonces $x = x+0 = x+(a+y) = (x+a)+y = 0+y = y$. De igual forma, si $x, y \in A$ son inversos de $a \in A$, entonces $x = x1 = x(ay) = (xa)y = 1y = y$.

(3) Para todo $x \in A$ se cumple que: $x = x1 = x(1+0) = x1 + x0 = x + x0 \Longrightarrow x0 = 0$.

(4) Si A tiene un único elemento, al tener elemento cero y elemento identidad estos deben de ser iguales, luego $0 = 1$. Si suponemos que $0 = 1$, entonces cualquier $x \in A$ cumple que $x = x1 = x0 = 0$, de lo que se sigue que $A = 0$.

(5) Para todo $x, y \in A$ se tiene $0 = x0 = x(y + (-y)) = xy + x(-y) \Longrightarrow x(-y) = -xy$. Análogamente, $(-x)y = -xy$.

(6) Se demuestra mediante inducción en n. □

Definición 1.1.2. Sea A un anillo. Un A**-módulo** es un grupo conmutativo M junto con un homomorfismo de anillos $\beta : A \longrightarrow \mathrm{End}(M)$.

Dados $a \in A$ y $m \in M$, representaremos el elemento $\beta(a)(m)$ por am.

Dados $a_1, a_2 \in A$ y $m_1, m_2 \in M$, se verifican las siguientes propiedades:

Hablar de elemento primo:

$p \in A$ es primo si $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ ó $p \mid b$

en un DI todo primo es irreducible. El recíproco no es cierto

en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ el elemento

$$(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}) = 6 = 2 \times 3$$

el 2 no es primo pero es irreducible

$$N(a+b\sqrt{-5}) = a^2+5b^2$$

Si $(a+b\sqrt{-5}) \mid 2$ entonces $N(a+b\sqrt{-5}) \mid N(2) = 4$

$$a^2+5b^2 = \begin{cases} 4 & \text{imposible } a=2 \; b=0 \text{ es } 2 \\ 2 & \text{imposible} \\ 1 & \text{imposible} \end{cases}$$

(i) $a_1(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$

(ii) $(a_1 + a_2)m_1 = a_1m_1 + a_2m_1$

(iii) $a_1(a_2m_1) = (a_1a_2)m_1$

(iv) $1m_1 = m_1$

Estas cuatro propiedades caracterizan los A-módulos, pues es equivalente que M sea A-módulo mediante el homomorfismo $\beta :\longrightarrow \mathrm{End}(M)$ a que exista una aplicación $\alpha : A \times M \longrightarrow M$ de forma que para todo $a \in A$ y para todo $m \in M$ siempre sucede que $\alpha(a, m) = \beta(a)(m)$, es decir, se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $\alpha(a_1, m_1 + m_2) = \alpha(a_1, m_1) + \alpha(a_1, m_2)$

(ii) $\alpha(a_1 + a_2, m_1) = \alpha(a_1, m_1) + \alpha(a_2, m_1)$

(iii) $\alpha(a_1, \alpha(a_2, m_1)) = \alpha(a_1, m_1) + \alpha(a_1a_2, m_1)$

(iv) $\alpha(a, m_1) = m_1$

$\rightarrow$ $\beta(a_1)(m_1+m_2) = \beta(a_1)(m_1) + \beta(a_2)(m_2)$

$\beta(a_1+a_2)(m_1) = \beta(a_1)(m_1) + \beta(a_2)(m_2)$

$\beta(a_1a_2)(m_1) = \beta(a_1)(\beta(a_2)(m_1))$

$\beta(1)(m) = m$

La aplicación α recibe el nombre de **acción** de A sobre M y el homomorfismo β recibe el nombre de **homomorfismo acción**.

Definición 1.1.3. Se dice que un subconjunto S de un anillo A es un **subanillo** si es cerrado para las dos operaciones, adición y producto, y contiene al elemento uno de A.

Nótese que la intersección de subanillos de un anillo A es también un subanillo de A.

Definición 1.1.4. Dado un subconjunto X de un anillo A, definimos el subanillo de A **generado** por X como el menor subanillo de A que contiene al subconjunto X.

Notemos que el subanillo generado por X coincide con la intersección de todos los subanillos de A que contienen al subconjunto X.

Definición 1.1.5. Un **ideal** de un anillo A es un subconjunto, $\mathfrak{a} \subseteq A$, que es un subgrupo aditivo de A y tal que $A\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, es decir, si $x \in A$ e $y \in \mathfrak{a}$, entonces $xy \in \mathfrak{a}$.

Definición 1.1.6. Dado un subconjunto X de un anillo A, se define el **ideal generado** por X como la intersección de todos los ideales que contienen a X.

Representamos este ideal por AX ó (X), y bajo estas condiciones, diremos que X es un **conjunto de generadores** del ideal (X). Si X es finito, decimos que (X) está **finitamente generado**. En el caso $X = \{x\}$, indicaremos el ideal generado por X simplemente como (x) ó Ax y en este caso diremos que es un ideal **principal** generado por x. Notemos que $x \in A$ es invertible si, y solo si, $(X) = (1) = A$.

Sea A un anillo y $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ ideales. Definimos su **suma** como $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{a + b \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$. De igual forma podemos definir la suma de una familia cualquiera de ideales como

$$\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i = \{\sum_{j=1}^{k} a_{i_j} \mid a_{i_j} \in \mathfrak{a}_{i_j} \text{ para un número finito de índices } \{i_1, ..., i_k\} \subseteq I\}$$

Además, esta suma es el menor ideal de A que contiene a todos los ideales $\mathfrak{a}_i$. Para demostrarlo, consideremos un ideal $\mathfrak{b}$ que contenga todos los ideales $\mathfrak{a}_i$, con $i \in I$. Todo elemento $x \in \sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ se puede expresar como una suma finita de la forma $\sum_{i\in I} x_i$ con $x_i \in \mathfrak{a}_i$, para todo $i \in I$. Acabamos de ver que $x \in \mathfrak{b}$ y por tanto $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{b}$.

La intersección de una familia cualquiera de ideales $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ es el mayor ideal que está contenido en todos los ideales $\mathfrak{a}_i$. Sin embargo, la unión de ideales no es, en general, un ideal.

La inclusión induce una relación de orden parcial en el conjunto de todos los ideales de un anillo A; decimos que un ideal $\mathfrak{a}$ es menor que un ideal $\mathfrak{b}$ si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$.

Dados dos ideales, $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, de un anillo A, se define su **producto**, $\mathfrak{ab}$, como el conjunto de todas las sumas finitas de productos de elementos de $\mathfrak{a}$ y de $\mathfrak{b}$, que coincide con el ideal generado por el conjunto $\{xy \mid x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}\}$. De igual forma, podemos definir el producto de una familia finita cualquiera de ideales. Nótese que $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Sea un anillo A y tres ideales $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subseteq A$. Se cumplen las siguientes propiedades para las operaciones intersección, suma y producto de ideales:

- Las tres operaciones son asociativas y conmutativas entre sí.
- Se cumple además la distributiva del producto respecto de la suma, esto es:

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{ab} + \mathfrak{ac}$$

- No se cumple en general la distributiva de la intersección respecto de la suma; sin embargo se conocen condiciones bajo las que sí se cumple (**ley modular**):

$$\text{si } \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \Longrightarrow \mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{b} + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})$$

  Ver la referencia [2]

- $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{ab}$.

  Si aplicamos esta propiedad conjuntamente con $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, obtenemos:

entonces

$$\text{Si } \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1) \cancel{\Longrightarrow} \mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$$

Ejemplo. Consideramos el anillo de los enteros, $\mathbb{Z}$, el cual es un **dominio de ideales principales**, esto es, un dominio de integridad en el que todos sus ideales están generados por un único elemento. Dos elementos cualesquiera $n, m \in \mathbb{Z}$ generan ideales (n) y (m). Su ideal suma $(n) + (m)$ es el ideal generado por m.c.d(n, m), su ideal intersección $(n) \cap (m)$ es el generado por m.c.m(n, m) y su ideal producto $(n)(m)$ es el generado por nm.

Definición 1.1.7. Dados dos ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, de un anillo A, se define su **ideal cociente** como:

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \{x \in A \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$$

Nótese que dados dos ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de un anillo A, se tiene que $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$.

En particular, el ideal $(0 : \mathfrak{b})$ se llama **anulador** de $\mathfrak{b}$ y se representa como $\operatorname{Ann}(\mathfrak{b})$. El anulador $\operatorname{Ann}(\mathfrak{b})$ es el conjunto de todos los elementos $x \in A$ tales que $x\mathfrak{b} = 0$. De esta forma podemos escribir el conjunto de todos los divisores de cero del anillo A como:

$$D = \bigcup_{x \neq 0} \operatorname{Ann}(x)$$

Definición 1.1.8. Dados dos anillos A y B, una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se dice **homomorfismo de anillos** si verifica las siguientes condiciones:

(i) Para todo $x, y \in A$, se tiene $f(x+y) = f(x)+f(y)$. (Nótese que f es un homomorfismo de grupos conmutativos, por lo que, para todo $x, y \in A$, se tiene $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$, $f(x - y) = f(x) - f(y)$.)

(ii) Para todo $x, y \in A$, se tiene $f(xy) = f(x)f(y)$.

(iii) $f(1) = 1$.

Es decir, un homomorfismo de anillos es una aplicación entre anillos que preserva las dos operaciones y el elemento uno.

Cabe resaltar que si A, B y C son anillos y existen dos homomorfismos de anillos $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, entonces la composición $g \circ f : A \longrightarrow C$ es un homomorfismo de anillos.

Dado un ideal $\mathfrak{a}$ de un anillo A, podemos dotar al grupo cociente $A/\mathfrak{a}$ de una operación binaria:

$$(a+\mathfrak{a})(b+\mathfrak{a}) = ab + \mathfrak{a}$$

Esta operación induce la estructura de anillo en $A/\mathfrak{a}$ con elemento uno $1+\mathfrak{a}$. Este anillo $A/\mathfrak{a}$ se conoce como **anillo cociente** de A por el ideal $\mathfrak{a}$.

Podemos construir este anillo cociente definiendo en A una relación de equivalencia $\sim$, donde dos elementos $x, y \in A$ están relacionados si $x - y \in \mathfrak{a}$. De esta forma, considerando las clases de equivalencia de $A/\sim$:

$$\begin{aligned}[x] &= \{y \in A \mid y \sim x\} = \{y \in A \mid y - x \in \mathfrak{a}\} = \{y \in A \mid y - x = r, \text{ para algún } r \in \mathfrak{a}\} = \\ &= \{x + r \mid r \in \mathfrak{a}\} = x + \mathfrak{a}\end{aligned}$$

Donde se dota al conjunto de clases de equivalencia $A/\sim$ de estructura de anillo tomando $[1]$ como elemento uno y definiendo las operaciones suma y producto de clases como sigue:

$$[x] + [y] = [x+y]$$
$$[x] \cdot [y] = [xy]$$

La aplicación **proyección canónica**, $p : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ que envía cada elemento $x \in A$ a su clase $x + \mathfrak{a}$ es un homomorfismo sobreyectivo de anillos.

Dado un homomorfismo cualquiera de anillos, $f : A \longrightarrow B$, se tiene que el **núcleo** de f es un ideal de A y que la **imagen** de f es un subanillo de B. Por lo tanto, por el primer teorema de isomorfía, f induce un isomorfismo de anillos $A/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$. Teniendo esto en cuenta, llegamos al siguiente resultado:

Proposición 1.1.2. *Sean un anillo A y un ideal suyo $\mathfrak{a}$. Existe una correspondencia biyectiva, conservando el orden dado por la inclusión, entre el conjunto de los ideales $\mathfrak{b}$ de A que contienen al ideal $\mathfrak{a}$ y el conjunto de los ideales $\overline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ de $A/\mathfrak{a}$, dada por $\mathfrak{b} = p^{-1}(\overline{\mathfrak{b}})$.*

Dada una familia de anillos $\{A_i \mid i \in I\}$, podemos dotar al producto cartesiano $\Pi_{i\in I} A_i$ de estructura de anillo considerando dos operaciones definidas componente a componente como:

$$(a_i)_i + (b_i)_i = (a_i + b_i)_i$$
$$(a_i)_i \times (b_i)_i = (a_i \times b_i)_i$$

Su elemento uno es $1 = (1_i)_i$ siendo $1_i \in A_i$ el elemento uno de cada anillo A_i.

Para cada índice $j \in I$ definimos:

$$\alpha_j : A_j \longrightarrow \Pi_{i\in I} A_i, \quad \alpha_j(x) = (x\delta_{ij})_i, \quad \text{siendo } \delta_{ij} = \begin{cases} 1_i \in A_i & \text{si j=i} \\ 0 \in A_i & \text{si } j \neq i \end{cases}.$$

$$\beta_j : \Pi_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j, \quad \beta_j((a_i)_i) = a_j$$

α_j es un homomorfismo de grupos inyectivo. Nótese que no es homomorfismo de anillos salvo que I sea unitario.

β_j es un homomorfismo de anillos.

Llamamos **producto directo** de la familia de anillos $\{A_i \mid i \in I\}$ al par $(\Pi_{i\in I} A_i, \{\beta_i \mid i \in I\})$.

Proposición 1.1.3 (Propiedad universal del anillo producto). *Dado un anillo B y una familia de homomorfismos de anillos $\{f_i : B \longrightarrow A_i \mid i \in I\}$, existe un único homomorfismo de anillos $f : B \longrightarrow \Pi_{i\in I} A_i$ tal que $f_i = \beta_i \circ f$.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \Pi_{i\in I} A \arrow[r, "\beta_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

Proposición 1.1.4 (Teorema chino del resto). *Sean A un anillo, $\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_n \subseteq A$ ideales y f la aplicación definida como sigue:*

$$f : A \longrightarrow \Pi_{i\in I}^{n} A/\mathfrak{a}_i \quad \textit{definida por } f(a) = (a + \mathfrak{a}_i)_i$$

Las siguientes afirmaciones son ciertas:

(1) *Si $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = A$ para todo $i \neq j$, entonces $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_n$.*

(2) *f es sobreyctiva si, y solo si, $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = A$ para todo $i \neq j$*

(3) *f es inyectiva si, y solo si, $\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_n = 0$.*

Demostración.

(1) Procedemos por inducción sobre n. Para $n = 2$, es cierto. Supongamos que se cumple para $n-1$ y demostramos para n. Como $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_n = A$ para $i = 1, ..., n-1$, tomamos $x_i \in \mathfrak{a}_i$ e $y_i \in \mathfrak{a}_n$ tal que $x_i + y_i = 1$. De este modo, $x_1 \cdots x_{n-1} = (1 - y_1) \cdots (1 - y_{n-1}) = 1 + y$ para algún $y \in \mathfrak{a}_n$. Luego $(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{n-1}) + \mathfrak{a}_n = A$ y por tanto:

$$(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{n-1}) + \mathfrak{a}_n = (\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{n-1}) \cap \mathfrak{a}_n = (\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_{n-1}) \cap \mathfrak{a}_n$$

(2) Si f es sobreyectiva existe $x \in A$ tal que $f(x) = (0, ..., 1, ..., 0)$, luego $x - 1 \in \mathfrak{a}_i$ y $x \in \mathfrak{j}$ si $i \neq j$. Por tanto $1 = x - (x-1) \in \mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j$.

Para el recíproco, si $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_j = A$ para $i = 2, ..., n$, entonces existen $x_i \in \mathfrak{a}_1$ e $y_i \in \mathfrak{a}_j$ tales que $x_i + y_i = 1$. Tomando $x = y_i \cdots y_n = (1 - x_1) \cdots (1 - x_n) = 1 - x'$, para algún $x' \in \mathfrak{a}_1$, luego $f(x') = (1, 0, ..., 0)$

(3) Basta tener en cuenta que $\mathrm{Ker}(f) = \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_n$. □

Proposición 1.1.5. *Sea A un anillo distinto del anillo cero. Son equivalentes:*

(*a*) *A es un cuerpo.*

(*b*) *A no tiene ideales propios, esto es, los únicos ideales de A son el ideal 0 y (1).*

(*c*) *Todo homomorfismo de anillos entre A y un anillo $B \neq 0$ es inyectivo.*

Demostración.

(*a*)$\Rightarrow$(*b*) Sea $\mathfrak{a} \neq 0$ un ideal de A. Consideremos un elemento no nulo $x \in \mathfrak{a}$, que debe ser elemento invertible en A por ser cuerpo. De esta forma, $\mathfrak{a} \supseteq (x) = (1) = A$.

(*b*)$\Rightarrow$(*c*) Consideremos un homomorfismo de anillos $f : A \longrightarrow B$. Como $B \neq 0$, y el núcleo de f es un ideal, $\mathrm{Ker}(f) = 0$, por lo que f es un homomorfismo inyectivo.

(*c*)$\Rightarrow$(*a*) Si consideramos x un elemento no invertible de A, se tiene que $(x) \neq (1) = A$ y por lo tanto, el anillo cociente $A/(x)$ no es el anillo cero. De esta forma, como por hipótesis todo homomorfismo es inyectivo, la proyección canónica $p : A \longrightarrow A/(x)$ tiene que ser inyectiva y su núcleo debe ser 0; luego $(x) = 0$ y por tanto, $x = 0$. Es decir, el único elemento no invertible de A es el cero, por lo que se trata de un cuerpo. □

Definición 1.1.9. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal de un anillo A. Se dice que $\mathfrak{p}$ es **primo** si verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

(i) $\mathfrak{p} \neq A$.

un elemento $p \in A$ es primo si, y solo si, $(p) \subseteq A$ es un ideal primo.

(ii) Para todo $x, y \in A$, si $xy \in \mathfrak{p}$, entonces o bien $x \in \mathfrak{p}$, o bien $y \in \mathfrak{p}$.

Definición 1.1.10. Sea $\mathfrak{m}$ un ideal de un anillo A. Se dice que $\mathfrak{m}$ es **maximal** si verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

(i) $\mathfrak{m} \neq A$.

(ii) No existe ningún ideal $\mathfrak{a}$ tal que $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq A$.

Sea un anillo A y un ideal primo $\mathfrak{p}$. El anillo cociente, $A/\mathfrak{p}$ es dominio de integridad, pues si $[0] = [x][y] = [xy] = xy + \mathfrak{p} \Longrightarrow xy \in \mathfrak{p}$, y por tanto, o bien $[x] = [0]$, o bien $[y] = [0]$. Esta misma cuenta sirve para ver el recíproco.

Sea un anillo A y un ideal maximal $\mathfrak{m}$. El anillo cociente, $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo, pues por la Proposición 1.1.2, el homomorfismo p^{-1} respeta el orden de inclusión para los ideales, y por tanto los únicos ideales de anillo cociente son el 0 y el (1). Un argumento similar nos da el recíproco. Resumimos esta información en las siguientes afirmaciones:

- $\mathfrak{p}$ es primo $\Longleftrightarrow$ $A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad.
- $\mathfrak{m}$ es maximal $\Longleftrightarrow$ $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo.

Debido a esto, todo ideal maximal es primo, pero el recíproco no es cierto en general. Además, el ideal 0 es primo si, y solo si, A es un dominio de integridad.

Consideremos un homomorfismo de anillos $f : A \longrightarrow B$. Si tenemos un ideal primo $\mathfrak{q}$ en B, entonces $f^{-1}(\mathfrak{q})$ es un ideal primo de A, pues $A/f^{-1}(\mathfrak{q})$ es isomorfo a un subanillo de $B/\mathfrak{q}$ que no tiene divisores de cero por ser $\mathfrak{q}$ primo. Sin embargo, si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de B, lo único que puedo asegurar de $f^{-1}(\mathfrak{m})$ es que es un ideal primo de A.

Ejemplos.

(1) Sea $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ el anillo de polinomios en las indeterminadas $\{x_1, ..., x_n\}$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Todo polinomio irreducible f de $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ genera un ideal primo (f) de este anillo.

(2) En $\mathbb{Z}$, todos los ideales generados por un primo $p \in \mathbb{Z}$ son maximales pues el anillo cociente $\mathbb{Z}/(p)$ es un cuerpo.

(3) En un dominio de ideales principales todo ideal primo no nulo ~~trivial~~ es maximal. En efecto, si para $x \in A$ se tiene que $(x) \neq 0$ es un ideal primo tal que $(x) \subset (y)$, entonces $x \in (y) \Longrightarrow x = yz$ para algún $z \in A$, por lo que $yz \in (x)$ pero como $y \notin (x)$, debe ocurrir $z \in (x) \Longrightarrow z = xt$ para algún $t \in A$. Podemos escribir entonces $x = yz = yxt$, de forma que $yt = 1$ y por lo tanto concluimos $(y) = 1$.

Por ejemplo, si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, entonces $\mathbb{K}[x]$ es un dominio de ideales principales, donde sus ideales primos, y por tanto maximales, son de la forma $(f(x))$ siendo $f(x)$ irreducible. Para más indeterminadas, el anillo de polinomios $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ no es un dominio de ideales principales.

Teorema 1.1.1. *Todo anillo A no trivial tiene, al menos, un ideal maximal.*

Demostración.

Consideremos Γ el conjunto de todos los ideales de A distintos del ideal ~~trivial~~ total A. La inclusión induce un orden parcial en dicho conjunto y además es no vacío pues $0 \in \Gamma$. Sea $(\mathfrak{a}_i)_i$ una cadena de ideales en Γ, esto es, $(\mathfrak{a}_i)_i$ conforma un subconjunto totalmente ordenado dentro de Γ. El conjunto $\mathfrak{a} = \cup_i \mathfrak{a}_i$ es un ideal pues la unión de una cadena de subgrupos es un subgrupo y además $\mathfrak{a}$ absorbe el producto (si $a \in \mathfrak{a} \Rightarrow a \in \mathfrak{a}_i$ para algún índice i, y al ser $\mathfrak{a}_i$ un ideal, para todo $x \in A$ se tiene que $xa \in \mathfrak{a}_i \Rightarrow xa \in \mathfrak{a}$). El ideal $\mathfrak{a}$ es un elemento de Γ, pues $1 \notin \mathfrak{a}$ debido a que $1 \notin \mathfrak{a}_i$ para todo índice i. Hemos encontrado por tanto una cota superior para toda cadena del conjunto Γ por lo que podemos aplicar el lema de Zorn para deducir que Γ tiene un elemento maximal. $\square$

Corolario 1.1.1. *Todo ideal $\mathfrak{a} \neq (1)$ de un anillo A está contenido en un ideal maximal de A.*

Corolario 1.1.2. *En un anillo A, todo elemento no invertible pertenece a un ideal maximal.*

Proposición 1.1.6. *En todo anillo A, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(1) *Si $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n \subseteq A$ son ideales primos y $\mathfrak{a} \subseteq A$ es otro ideal tal que $\mathfrak{a} \subseteq \cup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$, entonces se tiene que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ para algún i.*

(2) *Si $\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_n \subseteq A$ son ideales y $\mathfrak{p} \subseteq A$ es ideal primo tal que $\cap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$ para algún i. Si $\mathfrak{p} = \cap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$, entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$ para algún i.*

Demostración.

(1) Procedemos por inducción sobre n. En el caso base $n = 1$, el resultado es evidentemente cierto. Supongamos cierto el resultado para $n-1$ y veamos que se cumple para n, para lo cual razonamos por reducción al absurdo. Si $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ para todo índice $i = 1, ..., n$, entonces $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_{i-1} \cup \mathfrak{p}_{i+1} \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_n$ (pues en caso contrario aplicaríamos la hipótesis de inducción y habríamos terminado). De esta forma, para cada índice i, debe existir un elemento $x_i \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_{i-1} \cup \mathfrak{p}_{i+1} \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_n$. Si $x_i \notin \mathfrak{p}_i$, llegamos al absurdo $\mathfrak{a} \not\subseteq \cup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$, por lo que $x_i \in \mathfrak{p}_i$. Considerando el elemento $y = \sum_{i=1}^n x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n$ nos damos cuenta de que $y \in \mathfrak{a}$ pero que $y \notin \mathfrak{p}_i$ para todo $i = 1, ..., n$, por lo que llegamos al absurdo $\mathfrak{a} \not\subseteq \cup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$.

(2) Procedemos por reducción al absurdo. Si $\mathfrak{a}_i \not\subseteq \mathfrak{p}$ para todo $i = 1, ..., n$, entonces ha de existir $x_i \in \mathfrak{a}_i$ tal que $x_i \notin \mathfrak{p}$ para cada índice i. De esta forma, $\prod_{i=1}^n x_i \in \prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subseteq \cap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$, pero al ser $\mathfrak{p}$ ideal primo, $\prod_{i=1}^n x_i \notin \mathfrak{p}$, llegando así al absurdo $\cap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \not\subseteq \mathfrak{p}$.

Si $\mathfrak{p} = \cap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$, entonces $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}_i$ para todo $\forall i = 1, ..., n$ y realizando el mismo razonamiento anterior, deducimos $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$ para algún índice i. $\square$

Definición 1.1.11. Un anillo A se dice **local** si tiene un único ideal maximal y **semilocal** si tiene un número finito de ideales maximales.

Equivalentemente, se puede definir anillo local como aquel en el que los elementos no invertibles conforman un ideal.

Dado un anillo local A con ideal maximal $\mathfrak{m}$, el cuerpo $A/\mathfrak{m}$ se llama **cuerpo residual** de A.

Nótese que todo cuerpo es un anillo local (su ideal maximal es 0), sin embargo, el recíproco no es cierto. Como contraejemplo basta considerar el anillo $\mathbb{Z}/(4) = \{[0], [1], [2], [3]\}$, el cual no es un cuerpo pero tiene un único ideal maximal, $([2])$. Es más, si $p \in \mathbb{N}$ es primo y $n \in N$, el anillo $\mathbb{Z}/(p^n)$ no es un cuerpo, pero se trata de un anillo local con ideal maximal $([p])$.

Proposición 1.1.7. *Sea A un anillo y $\mathfrak{m} \neq (1)$ un ideal de dicho anillo. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(1) *Si todo elemento $x \in A \setminus \mathfrak{m}$ es invertible, entonces A es un anillo local y su único ideal maximal es $\mathfrak{m}$.*

(2) *Si $\mathfrak{m}$ es maximal y todo elemento $x \in 1 + \mathfrak{m}$ es invertible, entonces A es un anillo local.*

Demostración.

(1) Todo ideal propio de A está formado por elementos que no son invertibles, por lo que debe de estar contenido en $\mathfrak{m}$.

(2) Si demostramos que cualquier $x \in A \setminus \mathfrak{m}$ es invertible, aplicando (1) obtendríamos el resultado buscado. De la definición de ideal maximal se sigue que $\mathfrak{m} + Ax = A$, por lo tanto, existen $m \in \mathfrak{m}$ e $y \in A$ tales que $m + yx = 1$, de lo que deducimos $yx = 1 - m \Longrightarrow xy \in 1 + \mathfrak{m} \Longrightarrow xt$ es invertible y por tanto x es invertible. □

1.2 Extensión y contracción de ideales.

Sean A y B dos anillos y sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos. Es claro que, en general, la imagen de un ideal no es un ideal (como contraejemplo basta considerar el homomorfismo inyección $i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$). Sin embargo, si $\mathfrak{b} \subseteq B$ es un ideal del segundo anillo, $f^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq A$ es siempre un ideal del primer anillo (si $a \in A$ y $x \in f^{-1}(\mathfrak{b})$, entonces $f(a) \in B$ y $f(x) \in \mathfrak{b}$, al ser $\mathfrak{b}$ un ideal, tenemos que $f(a)f(x) = f(ax) \in \mathfrak{b}$, y por tanto, $ax \in f^{-1}(\mathfrak{b})$). Este hecho motiva las siguientes definiciones:

Definición 1.2.1. Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ ideales de los anillos A y B respectivamente y sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos. Definimos la **extensión** del ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ como el ideal de B generado por $f(\mathfrak{a})$, al que notaremos $\mathfrak{a}^e$. Análogamente, definimos la **contracción** del ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$ como el ideal $f^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq A$, al que notaremos $\mathfrak{b}^c$.

Notemos que si $\mathfrak{a} \subseteq A$ es primo, $\mathfrak{a}^e$ no tiene por qué ser primo (como contraejemplo tomemos el homomorfismo inclusión $I : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ y consideremos cualquier ideal propio $\mathfrak{a} \neq (0)$, entonces $\mathfrak{a}^e = \mathbb{Q}$, que no es primo). Sin embargo, si $\mathfrak{b} \subseteq B$ es un ideal primo, entonces $\mathfrak{b}^c$ es ideal primo (si $xy \in f^{-1}(\mathfrak{b}) \Longrightarrow f(xy) = f(x)f(y) \in \mathfrak{b}$, como $\mathfrak{b}$ es primo, o bien $f(x) \in \mathfrak{b}$ o bien $f(y) \in \mathfrak{b}$, en cualquier caso, $f^{-1}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^c$ es primo).

Proposición 1.2.1. *En las condiciones de la definición anterior* (1.2.1) *se tiene que:*

(1) $\mathfrak{a} \subseteq a^{ec}$ *y* $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$

(2) $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$ *y* $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$

(3) *El conjunto $C = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\}$ es el conjunto de los ideales contraídos en A y el conjunto $E = \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}^{ce} = b\}$ es el conjunto de los ideal extendidos en B. Además, la aplicación $f : C \longrightarrow E$ definida como $f(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^e$ es una biyección y su recíproca queda definida como $f^{-1}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^c$*

Demostración.

(1) Consecuencia inmediata de la definición.

(2) Ocurren simultáneamente las dos inclusiones de (1) anteriores.

(3) Si $\mathfrak{a}$ es un ideal contraído en A, entonces existe un ideal $\mathfrak{b}$ en B de forma que:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{a}^{ec}$$

Análogamente obtenemos la expresión general de los elementos de E. □

Proposición 1.2.2. *Sea un homomorfismo de anillos $f : A \longrightarrow B$, donde A y B son dos anillos con ideales $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subseteq A$ de A y $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subseteq B$ de B. Entonces se verifican:*

(1) $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e$ *y* $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$

(2) $(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e \subseteq \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e$ *y* $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c$

(3) $(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e \mathfrak{a}_2^e$ *y* $(\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c \mathfrak{b}_2^c$

(4) $(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e \subseteq (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e)$ *y* $(\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c \subseteq (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c)$

1.3 Localización.

Definición 1.3.1. Sea un anillo A. Un subconjunto $\Sigma \subseteq A$ es **multiplicativo** si es cerrado para el producto y contiene al elemento uno, es decir, si cumple simultáneamente las condiciones:

(i) Si $x, y \in \Sigma$, entonces $xy \in \Sigma$. y no al elemento cero

(ii) $1 \in \Sigma$.

(iii) $0 \notin \Sigma$

Sea un anillo A y un subconjunto multiplicativo de dicho anillo $\Sigma \subseteq A$. Podemos establecer en $A \times \Sigma$ una relación de equivalencia como sigue:[1]

$$(a_1, s_1) \equiv (a_2, s_2) \text{ si existe } t \in \Sigma \text{ tal que } t(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$$

Podemos dotar al conjunto cociente $(A \times \Sigma)/\equiv$ de estructura de anillo considerando las operaciones suma y producto definidas como sigue:

$$\overline{(a_1, s_1)} + \overline{(a_2, s_2)} = \overline{(a_1 s_2 + a_2 s_1, s_1 s_2)}$$
$$\overline{(a_1, s_1)} \cdot \overline{(a_2, s_2)} = \overline{(a_1 a_2, s_1 s_2)}$$

En este anillo, el elemento cero es $\overline{(0,1)}$ y el elemento uno es $\overline{(1,1)}$.

El anillo $((A \times \Sigma)/\equiv, +, \cdot)$ se conoce como el **anillo de fracciones**[2] de A respecto de Σ. Para simplificar la notación, a partir de este momento representaremos este anillo simplemente por $\Sigma^{-1}A$. A su vez, representaremos el elemento $\overline{(a, s)}$ como $\frac{a}{s}$.

La aplicación $\lambda_{\Sigma,A} : A \longrightarrow \Sigma^{-1}A$ definida por $\lambda_{\Sigma,A}(a) = \frac{a}{1}$ es un homomorfismo de anillos, conocido como **homomorfismo canónico**. El núcleo de este homomorfismo es:

y

$$\operatorname{Ker}(\lambda_{\Sigma,A}) = \{a \in A \mid \text{ existe } s \in \Sigma \text{ para el cual } as = 0\}$$

Este homomorfismo es inyectivo si, y solo si, Σ no tiene divisores de cero. En efecto, si $\lambda_{\Sigma,A}$ es inyectivo y $s \in \Sigma$ es un divisor de cero, entonces existe un elemento no nulo $0 \neq x \in A$ de forma que $sx = 0$, por lo que $\lambda_{\Sigma,A}(x) = 0 \Longrightarrow \lambda_{\Sigma,A}$ no es inyectivo, lo cual supone una contradicción con la hipótesis inicial. Por otro lado, si Σ no tiene divisores de cero y $\operatorname{Ker}(\lambda_{\Sigma,A}) \neq 0$, entonces existe $x \in A$ tal que $xs = 0$ para algún $s \in \Sigma$, es decir, $s \in \Sigma$ es divisor de cero, lo cual se contradice con la hipótesis de partida.

[1] Nótese que esta construcción es válida para cualquier anillo, no solo para dominios de integridad. Si no incluyésemos t al definir la relación de equivalencia y $0 \neq a \in A$ fuese un un divisor de cero tal que $as = 0$ para algún $s \in \Sigma$, entonces $\frac{a}{1} = \frac{as}{s} = \frac{0}{s} = \frac{0}{1}$, llegando así a la contradicción $0 \neq a = 0$.

[2] Si $0 \in \Sigma$, entonces todos los elementos estarían relacionados entre sí, por lo que el anillo de fracciones resultante sería el anillo trivial.

Teorema 1.3.1 (Propiedad universal del anillo de fracciones). *Dado un anillo A y un subconjunto multiplicativo $\Sigma \subseteq A$, para todo homomorfismo de anillos $f : A \longrightarrow B$ que lleve elementos $s \in \Sigma$ en elementos invertibles $f(s) \in B$, existe un único homomorfismo de anillos $f' : \Sigma^{-1}A \longrightarrow B$, tal que $f = f' \circ \lambda_{\Sigma,A}$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\lambda_{\Sigma,A}"] \arrow[dr, "f"'] & & \Sigma^{-1}A \arrow[dl, dashed, "f'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Demostración. En caso de existir, todo homomorfismo $f' : \Sigma^{-1}A \longrightarrow B$ debe de cumplir:

$$f'\left(\frac{a}{s}\right) = f'\left(\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{s}\right) = f'\left(\frac{a}{1}\left(\frac{s}{1}\right)^{-1}\right) = f'\left(\frac{a}{1}\right)f'\left(\left(\frac{s}{1}^{-1}\right)\right) = f'\left(\frac{a}{1}\right)\left(f'\left(\frac{s}{1}\right)\right)^{-1}$$

Imponiendo ahora que $f' \circ \lambda_{\Sigma,A} = f$, obtenemos:

$$f'\left(\frac{a}{s}\right) = f'\left(\frac{a}{1}\right)\left(f'\left(\frac{s}{1}\right)\right)^{-1} = f'\left(\lambda_{\Sigma,A}(a)\right)f'\left(\lambda_{\Sigma,A}(s)\right)^{-1} = f(a)f(s)^{-1}$$

Luego el único homomorfismo que cumple las condiciones es $f'\left(\frac{a}{s}\right) = f(a)f(s)^{-1}$. □

Corolario 1.3.1. *Sea A un anillo y un subconjunto multiplicativo $\Sigma \subseteq A$. Para todo homomorfismo de anillos $f : A \longrightarrow B$ verificando simultáneamente:*

(1) *Para todo $s \in \Sigma$, $f(s)$ es un elemento invertible de B.*

(2) *Si $f(a) = 0$, entonces existe un elemento $s \in \Sigma$ tal que $sa = 0$.*

(3) *Para todo $b \in B$ existen $a \in A$ y $s \in \Sigma$ de forma que $b = f(a)f(s)^{-1}$.*

Existe un único isomorfismo $f' : \Sigma^{-1}A \longrightarrow B$ tal que $f = \lambda_{\Sigma,A} \circ f'$.

existe

Demostración.

Tan sólo debemos comprobar que el homomorfismo f' definido en el Teorema 1.3.1 es un isomorfismo. f' es inyectiva, pues si existe $\frac{a}{s} \in \Sigma^{-1}A$ tal que $f'\left(\frac{a}{s}\right) = 0$, entonces $f(a) = 0$ luego $\exists t \in \Sigma$ tal que $at = 0$ y de esta forma, $\frac{a}{s} = \frac{0}{1}$. f' es sobreyectiva pues para cada elemento $b \in B$ existen $a \in A$ y $s \in \Sigma$ tales que $b = f(a)f(s)' = f'\left(\frac{a}{s}\right)$. □

Observación. *Sea A un anillo y sea Σ el grupo multiplicativo de los elementos invertibles de A. Siguiendo la construcción anterior, el homomorfismo identidad $Id : A \longrightarrow A$ induce un isomorfismo $f' : \Sigma^{-1}A \longrightarrow A$ dado por $f'\left(\frac{a}{s}\right) = as^{-1}$.*

Lema 1.3.1. *Dado un anillo A y un ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$, se tiene que $A \setminus \mathfrak{p}$ es un subconjunto multiplicativo. Bajo estas condiciones el anillo de fracciones $(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$ es un anillo local que se representa como $A_\mathfrak{p}$. Además, su único ideal maximal es:*

$$\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \left\{\frac{a}{s} \in A_\mathfrak{p} \mid a \in \mathfrak{p}, s \in A \setminus \mathfrak{p}\right\}$$

Demostración.

Sin más que considerar el homomorfismo canónico $\lambda_{A\setminus\mathfrak{p},A} : A \longrightarrow A_\mathfrak{p}$, se hace evidente que $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^e = \left\{\frac{a}{s} \in A_\mathfrak{p} \mid a \in \mathfrak{p}, s \in A \setminus \mathfrak{p}\right\}$ es un ideal de $A_\mathfrak{p}$. Además, si $\frac{b}{1} \notin \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \Longrightarrow b \notin \mathfrak{p}$, y por tanto $\frac{1}{b} \notin \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ es su inverso. Aplicando ahora la Proposición 1.1.7 concluimos que $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ es el único ideal maximal de $A_\mathfrak{p}$. □

Definición 1.3.2. El anillo de fracciones $A_\mathfrak{p}$ se llama **localizado** de A en $\mathfrak{p}$. El proceso de pasar de A a $A_\mathfrak{p}$ se conoce como **localización** de A en $\mathfrak{p}$.

Ejemplos.

(1) Dado un anillo A, denotamos por Σ_0 al conjunto multiplicativo de los elementos de A que no son divisores de cero. El anillo $\Sigma_0^{-1}A$ se llama **anillo total de fracciones** de A. Además, en este caso, el homomorfismo canónico $\lambda_{\Sigma_0,A}$ es inyectivo, y por tanto podemos identificar A con un subanillo del anillo total de fracciones.

En el caso de que A sea dominio de integridad, $\Sigma_0 = A \setminus 0$ y el anillo total de fracciones se llama **cuerpo de fracciones** de A. El ejemplo por antonomasia es el del anillo de los enteros $\mathbb{Z}$, el cual tiene al cuerpo de los racionales $\mathbb{Q}$ como su cuerpo de fracciones.

Recordamos que, para cada subconjunto multiplicativo $\Sigma \subseteq A$, el homomorfismo canónico $\lambda_{\Sigma,A} : A \longrightarrow \Sigma^{-1}A$ es inyectivo si, y solo si, Σ no contiene divisores de cero. Por este motivo, $\Sigma_0^{-1}A$ es el mayor anillo de fracciones de A que contiene al anillo A como subanillo.

Dado un dominio de integridad A, se tiene que su **anillo de polinomios** en las indeterminadas $X_1, X_2, ..., X_n$, que denotamos $A[X_1, ..., X_n]$, es a su vez un dominio de integridad, y por lo tanto podemos construir su cuerpo de fracciones, que denotaremos $A(X_1, ..., X_n)$.

(2) Dado un anillo A y un elemento $a \in A$, podemos construir el conjunto multiplicativo $\Sigma_a = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Así, el anillo de fracciones $\Sigma_a^{-1}A$, que a partir de ahora denotaremos A_a, es el conjunto de todas las fracciones con denominador una potencia de a.

Nótese que si a tiene alguna potencia nula, entonces $0 \in \Sigma$ y por tanto el anillo de fracciones A_a es el anillo nulo.

(3) Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros, y consideremos el ideal primo (2). Entonces $A_{(2)}$ es el anillo formado por todas las fracciones con denominador impar, que se trata de un anillo local donde su único ideal maximal está formado por todas las fracciones con denominador impar y numerador par.

Definición 1.3.3. Sea A un anillo, sea Σ un subconjunto multiplicativo y sea $\lambda_{\Sigma,A}$ el homomorfismo canónico. Para cada ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$, llamamos a $\mathfrak{a}^{ec}$ la **Σ-Saturación** del ideal $\mathfrak{a}$. Claramente:

existe

$$\mathfrak{a}^{ec} = \{a \in A \mid \nexists s \in \Sigma \text{ tal que } sa \in \mathfrak{a}\}$$

Proposición 1.3.1. *Sea A un anillo y sea Σ un subconjunto multiplicativo. Existe una biyección entre los ideales de $\Sigma^{-1}A$ y los ideales Σ-saturados de A conservando el orden.*

Además, $\mathfrak{a}^{ec} = A$ si, y solo si, $\mathfrak{a} \cap \Sigma \neq \emptyset$.

En particular, existe una correspondencia biyectiva conservando el orden entre los ideales primos de $\Sigma^{-1}A$ y los ideales primos de A tales que tienen intersección vacía con Σ.

Demostración. Sea $\mathfrak{b}$ un ideal de $\Sigma^{-1}A$, entonces $\lambda_{\Sigma,A}^{-1}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^c$ es un ideal Σ-saturado de A (pues $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$), y considerando $\lambda_{\Sigma,A}(\mathfrak{b}^c) = \mathfrak{c}^{ce} = \mathfrak{b}$, tenemos que la biyección buscada es la que lleva los ideales contraídos en los extendidos.

Sea $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal tal que $\mathfrak{a} \cap \Sigma \neq \emptyset$. Si $x \in \mathfrak{a} \cap \Sigma$, entonces $xa \in \mathfrak{a}$ para todo $a \in A$, y por tanto, $\mathfrak{a}^{ec} = A$.

Veamos ahora la correspondencia entre los ideales primos de $\Sigma^{-1}A$ y los ideales primos de A que no cortan a Σ:

Sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ es un ideal primo de A tal que $\mathfrak{p} \cap \Sigma = \emptyset$. Si $x \in \mathfrak{p}^{ec}$, entonces existe $s \in \Sigma$ de forma que $xs \in \mathfrak{p}$, por ser $\mathfrak{p}$ primo y $s \notin \mathfrak{p}$ deducimos que $x \in \mathfrak{p}$. Por tanto $\mathfrak{p}^{ec} \subseteq \mathfrak{p}$. Por otro lado, la Proposición 1.2.1, indica que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}^{ec}$. Por lo tanto $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$, es decir, todo ideal primo de A que no corta a Σ es Σ-saturado. La biyección anterior entre los ideales Σ-saturados y los ideales de $\Sigma^{-1}A$ es la biyección buscada. □

Corolario 1.3.2. *Sea A un anillo y sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo. Entonces los ideales primos del anillo $A_{\mathfrak{p}}$ están en correspondencia biyectiva con los ideales primos de A contenidos en $\mathfrak{p}$.*

Observación. *Sea A un anillo y sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo. Anteriormente hemos demostrado que pasar de A a $A/\mathfrak{p}$ elimina todos los ideales primos que no contienen a $\mathfrak{p}$ y ahora hemos demostrado que pasar de A a $A_{\mathfrak{p}}$ elimina todos los ideales primos que no están contenidos en $\mathfrak{p}$. De esta forma, si $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ son dos ideales primos, localizando respecto de $\mathfrak{p}$ y proyectando al cociente $A/\mathfrak{q}$, obtenemos un anillo cuyos ideales primos están biyección y respetando el orden con los ideales primos entre $\mathfrak{q}$ y $\mathfrak{p}$. En particular, si $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, localizando y proyectando al cociente obtenemos un cuerpo, llamado **cuerpo residual en** $\mathfrak{p}$, este cuerpo es el cuerpo de fracciones del dominio de integridad $A/\mathfrak{p}$ y el cuerpo residual del anillo local $A_{\mathfrak{p}}$.*

1.4 Radicales.

Definición 1.4.1. Dado un anillo A, llamamos **nilradical** de A al conjunto de todos los elementos nilpotentes, es decir, el conjunto de los elementos de A con alguna potencia nula. Representamos el nilradical de A como $\mathrm{Nil}(A)$.

Nótese que para todo anillo A siempre existe el nilradical y este es no vacío, pues $0 \in \mathrm{Nil}(A)$.

Si $\mathrm{Nil}(A) = 0$, entonces A no tiene elementos nilpotentes distintos del 0, y en este caso decimos que A es un anillo **reducido**.

Proposición 1.4.1. *Sea A un anillo. El conjunto $\mathrm{Nil}(A)$ es un ideal y el anillo cociente $A/\mathrm{Nil}(A)$ no tiene ningún elemento nilpotente aparte del cero.*

Demostración.

Si $x \in \mathrm{Nil}(A)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$. Es claro por tanto que para cualquier $y \in A$, se cumple que $(xy)^n = x^n y^n = 0y^n = 0$. Si $x, y \in \mathrm{Nil}(A)$, entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x^n = y^m = 0$. Aplicando la fórmula de Newton:

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} x^i y^{n+m-i} =$$
$$= \binom{n+m}{0} x^0 y^{n+m} + \cdots + \binom{n+m}{n} x^n y^m + \cdots + \binom{n+m}{n+m} x^{n+m} y^0 = 0$$

Esta expresión se anula por ser suma de productos en los cuales uno de sus factores es nulo. Por lo tanto $\mathrm{Nil}(A)$ es un ideal.

Para probar la segunda afirmación, consideremos un elemento $[x] \in A/\mathrm{Nil}(A)$. Si $[x]^n = [x^n] = [0] \Longrightarrow x^n \in \mathrm{Nil}(A) \Longrightarrow \exists t \in \mathbb{N}$ tal que $(x^n)^t = 0$, y por tanto, $x \in \mathrm{Nil}(A)$. □

Proposición 1.4.2. $\mathrm{Nil}(A)$ *es la intersección de todos los ideales primos de A.*

Demostración.

Sea $\mathfrak{P}$ la intersección de todos los ideales primos de A. Razonamos por doble inclusión:

Sea $x \in \mathrm{Nil}(A)$ y un ideal primo $\mathfrak{p}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0 \in \mathfrak{p}$. De la definición de ideal primo se deduce que $x \in \mathfrak{p}$, luego $\mathrm{Nil}(A) \subseteq \mathfrak{p}$. Como esto ocurre para cualquier ideal primo de A, es claro que $\mathrm{Nil}(A) \subseteq \mathfrak{P}$.

Sea $x \in A \setminus \mathrm{Nil}(A)$ y consideremos el conjunto:

$$\Gamma = \{\mathfrak{a} \subseteq A \mid \mathfrak{a} \text{ es ideal de } A \text{ tal que para todo } n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } x^n \notin \mathfrak{a}\}$$

Este conjunto es no vacío pues $0 \in \Gamma$ y, considerando el orden inducido por la inclusión, toda cadena $(\mathfrak{a}_i)_i$ de ideales de Γ tiene una cota superior en Γ dada por $\bigcup_i \mathfrak{a}_i$. Por tanto se cumplen las hipótesis del lema de Zorn y podemos concluir que existe un elemento maximal $\mathfrak{p} \in \Gamma$.

Veamos que $\mathfrak{p}$ es primo. Sean $a, b \in A$ elegidos de forma que $a, b \notin \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{p}+(a), \mathfrak{p}+(b) \notin \Gamma$, pues contienen al ideal $\mathfrak{p}$ de forma estricta, y por tanto existen naturales $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x^n \in \mathfrak{p} + (a)$ y $x^m \in \mathfrak{p} + (b)$. De esta forma, $x^{n+m} \in \mathfrak{p} + (ab)$, y como $\mathfrak{p} + (ab) \notin \Gamma$, se tiene que $ab \notin \mathfrak{p}$, de lo que deducimos que $\mathfrak{p}$ es primo.

Hemos visto que si $x \in A \setminus \mathrm{Nil}(A)$, entonces existe un ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$ tal que $x \notin \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $x \notin \mathfrak{P}$. De esta forma se tiene que:

$$A \setminus \mathrm{Nil}(A) \subseteq A \setminus \mathfrak{P} \Rightarrow \mathfrak{P} \subseteq \mathrm{Nil}(A)$$

□

Corolario 1.4.1. *Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de un anillo A, entonces $\mathrm{Nil}(A) \subseteq \mathfrak{p}$.*

Corolario 1.4.2. *Sean A un anillo y Σ un subconjunto multiplicativo. Entonces*

$$\mathrm{Nil}(\Sigma^{-1}A) = \Sigma^{-1}\mathrm{Nil}(A)$$

Demostración.

Téngase en cuenta que $\Sigma \cap \mathrm{Nil}(A) = \emptyset$, pues en caso contrario 0 pertenecería a Σ. Utilizando este hecho conjuntamente con la Proposición 1.3.1, el resultado es inmediato. □

La Proposición 1.4.2, motiva la siguiente definición.

Definición 1.4.2. En un anillo A, definimos el **radical de Jacobson**[3], que representamos $\mathrm{Rad}(A)$, como la intersección de todos los ideales maximales de A.

Ejemplos.

(1) Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, entonces $\mathrm{Nil}(\mathbb{K}) = 0$.

(2) $\mathrm{Nil}(\mathbb{Z}) = 0$.

(3) Si A es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$, entonces $\mathrm{Rad}(A) = \mathfrak{m}$.

(4) Si A es un anillo y $\mathfrak{p} \subsetneq A$ es un ideal primo de dicho anillo. Entonces $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Por tanto, $\mathrm{Rad}(A_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

(5) Hemos visto anteriormente que $\mathbb{Z}/(4)$ es un anillo local, y su único ideal primo coincide con su único ideal maximal que es $([2])$. Por tanto, $\mathrm{Nil}(\mathbb{Z}/(4)) = \mathrm{Rad}(\mathbb{Z}/(4)) = ([2])$.

[3] El radical de Jacobson también es denotado en algunos textos como $\mathrm{Jac}(A)$.

Proposición 1.4.3. *En todo anillo A, se tiene que:*

$$x \in \mathrm{Rad}(A) \textit{ si, solo si, para todo } y \in A, \textit{ el elemento } 1 - xy \textit{ es invertible en } A.$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Si $1 - xy$ no fuese invertible en A para algún $y \in A$, entonces existiría un ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $1 - xy \in \mathfrak{m}$. Como $x \in \mathrm{Rad}(A) \subseteq \mathfrak{m}$, sabemos que $xy \in \mathfrak{m}$ de lo que se deduce que $1 \in \mathfrak{m}$, llegando así a un absurdo.

$\Leftarrow$) Si $x \notin \mathrm{Rad}(A)$, entonces ha de existir un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A de forma que $x \notin \mathfrak{m}$ y por tanto $\mathfrak{m} + (x) = A$. Deben existir entonces $m \in \mathfrak{m}$ e $y \in A$ tales que $m + xy = 1$, pero entonces $1 - xy \in \mathfrak{m}$ y no sería invertible. □

Lema 1.4.1. *En todo anillo A, son equivalentes:*

(*a*) *A es un anillo local.*

(*b*) *$A \setminus Rad(A)$ es el conjunto de todos los elementos invertibles de A.*

(*c*) *Existe $(1) \neq \mathfrak{a} \subset A$ ideal del anillo, tal que $A \setminus \mathfrak{a}$ está contenido en el conjunto de todos los elementos invertibles de A.*

Demostración.

(*a*)$\Rightarrow$(*b*) Si A es un anillo local, entonces su único ideal maximal será $\mathrm{Rad}(A)$, por lo que $A \setminus \mathrm{Rad}(A)$ será el conjunto de sus elementos invertibles.

(*b*)$\Rightarrow$(*c*) Basta tomar $\mathfrak{a} = \mathrm{Rad}(A)$.

(*c*)$\Rightarrow$(*a*) Como $A \setminus \mathfrak{a}$ está contenido en el conjunto de los elementos invertibles de A, todo elemento no invertible está contenido en $\mathfrak{a}$, por lo tanto $\mathfrak{a}$ es maximal y todo ideal distinto de A está contenido en $\mathfrak{a}$. Concluimos entonces que $\mathfrak{a}$ es el único ideal maximal de A, lo que convierte A en un anillo local. □

Definición 1.4.3. Sea $\mathfrak{a}$ ideal de un anillo A. Definimos el **radical** del ideal $\mathfrak{a}$ como el conjunto:

$$\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in \mathfrak{a}\}$$

Recordando la Proposición 1.1.2, si $\mathfrak{a} \subseteq A$ es un ideal de un anillo A, entonces el homomorfismo proyección canónica $p : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ establece una biyección entre ideales de $A/\mathfrak{a}$ y los ideales de A que contienen el ideal $\mathfrak{a}$. De esta forma, $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = p^{-1}(\mathrm{Nil}(A/\mathfrak{a}))$, por lo que se trata de un ideal de A que contiene a $\mathfrak{a}$. Podemos por tanto escribir:

Lema 1.4.2. *Sea $\mathfrak{a} \neq (1)$ ideal de un anillo A. Entonces se verifica que $\mathrm{rad}(\mathfrak{a})/\mathfrak{a} = Nil(A/\mathfrak{a})$*

Corolario 1.4.3. *Sea $\mathfrak{a} \neq (1)$ ideal de un anillo A. Entonces:*

$$rad(\mathfrak{a}) = \cap\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \textit{ es ideal primo de } A \textit{ y } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

Propiedades 1.4.1. *Sean A un anillo, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ dos ideales y $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo. Entonces se verifican los siguientes enunciados:*

(1) *$\mathfrak{a} \subseteq rad(\mathfrak{a})$.*

(2) *Si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, entonces $rad(\mathfrak{a}) \subseteq rad(\mathfrak{b})$.*

(3) *$rad(rad(\mathfrak{a})) = rad(\mathfrak{a})$.*

(4) $rad(\mathfrak{a}) = A \iff \mathfrak{a} = A$.

(5) $rad(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = rad(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = rad(\mathfrak{a}) \cap rad(\mathfrak{b})$.

(6) $rad(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}\ \forall \mathbb{N}^*$ para todo

(7) $rad(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = rad(rad(\mathfrak{a}) + rad(\mathfrak{b}))$.

Demostración.

Por la definición de radical de un ideal son evidentes las primeras 4 propiedades.

(5) De la inclusión $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ se tiene $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{b})$. Por otro lado, es claro que para todo $x \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{b})$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, luego $x \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ y además $x^n x^n = x^{2n} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, por lo que $x \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.

(6) Por la propiedad anterior, $\mathrm{rad}(\mathfrak{p}^n) = \mathrm{rad}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.

(7) Por la propiedad (1) sabemos que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) + \mathrm{rad}(\mathfrak{b})$ y por ende $\mathrm{rad}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) + \mathrm{rad}(\mathfrak{b}))$. Por otro lado, si $x \in \mathrm{rad}(\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) + \mathrm{rad}(\mathfrak{b}))$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) + \mathrm{rad}(b)$. Puedo tomar por tanto $x^n = a + b$ con $a \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$ y $b \in \mathrm{rad}(\mathfrak{b})$, existirá entonces $m \in \mathbb{N}$ tal que $a^m \in \mathfrak{a}$ y $b^m \in \mathfrak{b}$, y de esta forma, aplicando la fórmula de Newton, $(x^n)^{2m} = x^{2mn} = (a+b)^{2m} \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, es decir, $x \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$. □

Lema 1.4.3. *Sea A un anillo y sea $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal. Son equivalentes:*

(*a*) *$\mathfrak{a}$ es un ideal radical.*

(*b*) *$A/\mathfrak{a}$ es un anillo reducido.*

Demostración.

(*a*)⇒(*b*) Si $(a + \mathfrak{a})^n = 0 + \mathfrak{a}$, entonces $a^n + \mathfrak{a} = 0 + \mathfrak{a}$, por lo que $a^n \in \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a}$ es un ideal radical, entonces $a^n \in \mathfrak{a}$ implica que $a \in \mathfrak{a}$, por lo que $a\mathfrak{a} = 0 + \mathfrak{a}$.

(*b*)⇒(*a*) Tomemos $x^n \in \mathfrak{a}$, entonces $0 + \mathfrak{a} = a^n + \mathfrak{a} = (a + \mathfrak{a})^n$, y como por hipótesis $A/\mathfrak{a}$ es reducido, entonces $a + \mathfrak{a} = 0 + \mathfrak{a}$, por lo que $a \in \mathfrak{a}$. □

1.5 Dimensión de un anillo.

Definición 1.5.1. Sea A un anillo. Una **cadena ascendente de ideales primos** en A de longitud n es una sucesión finita de ideales primos distintos de A ordenados estrictamente por inclusión:

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

Una cadena ascendente de ideales primos se dice que está **saturada** si no existen ideales primos estrictamente contenidos entre dos términos consecutivos de dicha cadena.

Definición 1.5.2. Se define la **dimensión de Krull de un anillo** A como el supremo de las longitudes de las cadenas ascendentes de ideales primos de A, y se denota por $\dim(A)$.

Se define la **altura de un ideal primo** $\mathfrak{p} \subsetneq A$ como el supremo de las cadenas ascendentes de ideales primos de A de la forma:

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$$

Denotamos la altura de un ideal primo $\mathfrak{p}$ por $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$.

Se define la **altura de un ideal** cualquiera $\mathfrak{a} \subsetneq A$ como el ínfimo de las alturas de los ideales primos de A que contienen al ideal $\mathfrak{a}$, y se denota por $\mathrm{ht}(\mathfrak{a})$.

Se define la **co-altura de un ideal primo** $\mathfrak{p}$ de un anillo A como el supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos de A de la forma:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

Denotamos la co-altura de un ideal primo $\mathfrak{p}$ por $\mathrm{cht}(\mathfrak{p})$.

Observación. *Un anillo tiene dimensión* 0 *si, y solo si, todo ideal primo es maximal.*

Observación. *Todo dominio de integridad de dimensión* 0 *es cuerpo. En efecto, si* A *es un dominio de integridad, entonces el ideal* 0 *es primo, y si además* A *tiene dimensión* 0*, entonces* A *no tiene ideales propios, por lo que se trata de un cuerpo. Por otro lado, todo cuerpo tiene dimensión* 0*. Sin embargo esto no quiere decir que todo anillo de dimensión* 0 *es cuerpo, por ejemplo* $\mathbb{Z}/(4)$ *tiene un único ideal primo, por lo que tiene dimensión* 0*.*

Observación. *Se puede extender el concepto de dimensión de anillos a módulos como sigue:*

Sea A *un anillo y sea* M *un* A*-módulo. Se define la dimensión de* M *como:*

$$\dim(M) = \dim\left(A/\mathrm{Ann}(M)\right)$$

Teorema 1.5.1. *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo. Entonces* $\dim(\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]) = n$*.*

Demostración.

En $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ podemos considerar la siguiente cadena ascendente de ideales primos:

$$0 \subsetneq (X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (X_1, ..., X_n)$$

Como la longitud de esta cadena es n, sabemos que $\dim(\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]) \geq n$.

Para ver que $\dim(\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]) \leq n$ demostraremos que $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ tiene, a lo sumo, n elementos algebraicamente independientes.

Para cada extensión de cuerpos $A/\mathbb{K}$, definimos $\tau(A)$ como el máximo de los s tales que existe un subconjunto $\{a_1, ..., a_s\} \subset A$ de elementos algebraicamente independientes. Para probar la desigualdad, demostraremos previamente que si $0 \neq \mathfrak{p} \subsetneq A$ es un ideal primo y $\tau(A/\mathfrak{p}) \geq s$, entonces $\tau(A) \geq s + 1$.

Si $\tau(A/\mathfrak{p}) = s$ entonces existe $\{a_1, ..., a_s\} \subseteq A$ de forma que $\{\overline{a_i} = a_i + \mathfrak{p} \mid i = 1, ..., s\}$ es algebraicamente independiente. Además, si tomamos $0 \neq a \in \mathfrak{p}$, entonces $\{a_1, ..., a_s, a\}$ es algebraicamente independiente. En caso contrario existiría $0 \neq F \in \mathbb{K}[Y_1, ..., Y_s, Y_{s+1}]$ tal que $F(a_1, .., a_s, a) = 0$ por lo que reduciendo módulo $\mathfrak{p}$ obtenemos $F(\overline{a_1}, ..., \overline{a_s}, 0) = 0$ y al ser $\{\overline{a_i} \mid i = 1, ..., s\}$ algebraicamente independiente, deducimos que $F(Y_1, ..., Y_s, 0) = 0$ y por tanto $Y_{s+1}|F$, pero si tomamos F irreducible, entonces $F = Y_{s+1}$ y $a = 0$, contradicción.

Consideremos ahora $0 = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_t$ una cadena de ideales primos de $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$. Por el resultado anterior sabemos que:

$$n \geq \tau\left(\frac{\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]}{\mathfrak{p}_0}\right) > \tau\left(\frac{\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]}{\mathfrak{p}_1}\right) > \cdots > \tau\left(\frac{\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]}{\mathfrak{p}_t}\right) \geq 0$$

Luego $n \geq t$, y por tanto $\dim(\mathbb{K}(X_1, ..., X_n)) \leq n$. $\square$

Proposición 1.5.1. *Sea A un anillo local con único ideal maximal $\mathfrak{m}$. Entonces:*

$$\dim(A) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$$

Demostración.

Supongamos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = n$. Entonces no puede existir otro ideal primo, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, con altura $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) > n$, pues en caso de existir, debe de estar contenido en un ideal maximal, y como $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal de A, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$, de forma que $n < \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = n$, contradicción. Por tanto, todo ideal primo de A tiene altura menor o igual que $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = n$, luego $\dim(A) = n$. □

Proposición 1.5.2. *Sea A un anillo y sea $\mathfrak{p} \subset A$ ideal primo de A. Entonces:*

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(A_{\mathfrak{p}})$$

Demostración.

Supongamos que $\dim(A_{\mathfrak{p}}) = n$. Sabemos por el Lema 1.3.1 que $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Luego $\dim(A_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) = n$, por lo que existe una cadena ascendente saturada de ideales primos de $A_{\mathfrak{p}}$ de la forma:

$$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$$

En primer lugar, por la propiedad 1.3.1 sabemos que existe una correspondencia manteniendo el orden entre los ideales primos de A que no cortan a $A \setminus \mathfrak{p}$ y los ideales primos de $A_{\mathfrak{p}}$, luego contrayendo los ideales de la cadena anterior obtenemos una cadena ascendente saturada de ideales primos de A de longitud n que acaba en $\mathfrak{p}$, por lo que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq n$. En segundo lugar, si existiese en A una cadena ascendente saturada de ideales primos con longitud mayor que n y terminada en $\mathfrak{p}$, sus ideales extendidos determinan otra cadena ascendente y saturada de ideales primos de $A_{\mathfrak{p}}$ con longitud mayor que n, lo cual es imposible. Por tanto, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = n$. □

Lema 1.5.1. *En un dominio de factorización única, todo ideal primo con altura* 1 *es principal.*

Demostración.

Sea A un dominio de factorización única y sea $\mathfrak{p} \subsetneq A$ un ideal primo con $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$. Como $\mathfrak{p}$ tiene altura 1, y todo dominio de factorización única es dominio de integridad, entonces $\mathfrak{p} \neq 0$, luego tiene al menos un elemento no nulo $0 \neq x \in \mathfrak{p}$. Como A es un dominio de factorización única, podemos expresar x de forma única como producto de irreducibles, es decir, $x = a_1 a_2 \ldots a_n$, y como $\mathfrak{p}$ es primo, alguno de estos irreducibles debe estar a su vez en $\mathfrak{p}$; podemos suponer sin perder generalidad que $a_1 \in \mathfrak{p}$. Nuevamente, por ser A dominio de factorización única, todos sus elementos irreducibles tienen como únicos divisores el uno y a sí mismos, por lo que (a_1) es un ideal primo. Teniendo todo lo anterior en cuenta, podemos construir la siguiente cadena ascendente de ideales primos:

$$0 \subsetneq (a_1) \subset \mathfrak{p}$$

Por tanto, teniendo en cuenta que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, se deduce que $(a_1) = \mathfrak{p}$, luego, $\mathfrak{p}$ es principal. □

Lema 1.5.2. *Sea A un dominio de integridad en el que todo ideal primo es principal. Entonces A es un dominio de ideales principales.*

Demostración.

Sea J el conjunto de ideales de A que no son principales. Si J fuese no vacío, se trataría de un conjunto parcialmente ordenado mediante la relación de inclusión de conjuntos. Consideremos $(I_i)_i$ una cadena de ideales de J y consideremos $I = \bigcup_i I_i$. Si $I = (x)$, entonces $x \in I_j$ para algún índice j, luego $I = (x) \subseteq I_j \Longrightarrow (x) = I = I_j$, por lo que I_j es principal, contradicción. Como I no es principal, se trata de una cota para todos los elementos de J, y aplicando el lema de Zorn, existe un elemento maximal M en J.

M no puede ser ideal primo pues entonces sería principal. Por tanto, existen elementos $a, b \in A$ tales que $ab \in M$ pero $a, b \notin M$. Así, $M \subsetneq (M, a)$ y $M \subsetneq (M, b)$, y como M es elemento maximal de J, tanto (M, a) como (M, b) son principales. Supongamos que $(M, a) = (\alpha)$ y que $(M, b) = (\beta)$. De igual forma, $M \subsetneq (M : a)$, luego $(M : a) = (\gamma)$. Así, $M = (M, a)(M : a)$, luego es principal por ser producto de ideales principales. Pero esto es una contradicción, pues M es no principal. Por tanto J debe de ser vacío. □

Teorema 1.5.2. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(*a*) *A es un dominio de ideales principales y no es cuerpo.*

(*b*) *A es un dominio de factorización única de dimensión* 1.

Demostración.

(*a*)⇒(*b*) Como A es dominio de ideales principales, es un dominio de factorización única. Nuevamente, como A es dominio de ideales principales y no es cuerpo, todos los ideales primos no nulos de A son maximales y por tanto, A tiene dimensión 1.

(*b*)⇒(*a*) Para todo ideal primo de A, $\mathfrak{p} \subsetneq A$, se tiene que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$. Si $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$, entonces $\mathfrak{p} = 0$, mientras que si $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, sabemos que $\mathfrak{p}$ es principal por el Lema 1.5.1. Por tanto, todo ideal primo es principal, y como todo dominio de factorización única es a su vez un dominio de integridad, por el Lema 1.5.2, concluimos que A es un dominio de ideales principales, que al tener dimensión 1 no puede ser un cuerpo. □

Capítulo 2

Espacios topológicos

2.1 Preliminares de topología.

En este capítulo fundamentaremos los conceptos topológicos que posteriormente aparecerán de manera natural al estudiar el espectro de un anillo como espacio topológico. De este breve repaso teórico, se resaltan los conceptos de cuasi-compacidad, irreductibilidad y conexión. Terminaremos este capítulo estableciendo diversos axiomas de separación, algunos de los cuales no serán utilizados posteriormente pero suponen una posible vía de ampliación de este trabajo.

Definición 2.1.1. Un **espacio topológico** es un par $(X, \mathscr{T})$, donde X es un conjunto y $\mathscr{T}$ es una familia de subconjuntos de X verificando simultáneamente:

(i) $\emptyset, X \in \mathscr{T}$.

(ii) Dada una subfamilia, $\{O_i \mid i \in I\} \subseteq \mathscr{T}$, entonces $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathscr{T}$.

(iii) Dados dos elementos $O_1, O_2 \in \mathscr{T}$, entonces $O_1 \cap O_2 \in \mathscr{T}$.

$\mathscr{T}$ se conoce como la **topología** de $(X, \mathscr{T})$. Los elementos del conjunto $\mathscr{T}$ se les llaman **conjuntos abiertos** del espacio topológico $(X, \mathscr{T})$.

Un subconjunto $F \subseteq X$ se dice que es un **cerrado** del espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ si $X \setminus F \in \mathscr{T}$. Denotamos por $\mathscr{F}$ al conjunto de todos los conjuntos cerrados. Las propiedades elementales de los abiertos inducen las siguientes propiedades elementales en los cerrados:

(i) $\emptyset, X \in \mathscr{F}$.

(ii) Dada una subfamilia, $\{F_i \mid i \in I\} \subseteq \mathscr{F}$, entonces $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathscr{F}$.

(iii) Dados dos elementos $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$, entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}$.

Se puede definir equivalentemente la noción de espacio topológico a partir de las propiedades elementales de los cerrados y obteniendo las de los abiertos como consecuencia.

Definición 2.1.2. Sea X un conjunto y sean $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ dos topologías en X. Se dice que la topología $\mathscr{T}_1$ es más **fina** que $\mathscr{T}_2$ si $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$.

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X. El espacio topológico $(X, \mathcal{P}(X))$ se llama **espacio topológico discreto**, y $\mathcal{P}(X)$ se llama **topología discreta** del conjunto X. Cabe resaltar que la topología discreta es la topología más fina sobre un conjunto dado.

Definición 2.1.3. Sean X e Y espacios topológicos. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es **continua** si para todo abierto $O \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(O) \subseteq X$ es abierto.

Equivalentemente, f es continua si $f^{-1}(C) \subseteq X$ es cerrado para todo cerrado $C \subseteq X$.

Un **homeomorfismo** es una función continua con inversa continua

Definición 2.1.4. Una **base de la topología** de un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{T}$ tal que todo abierto se puede expresar como unión de elementos de $\mathcal{B}$. Esto es, para todo abierto $O \in \mathscr{T}$ existe $\{B_i \in \mathcal{B} \mid i \in I\}$ tal que $O = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Definición 2.1.5. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico, y sea $x \in X$. Un subconjunto $U \subseteq X$ se dice que es **entorno** de x si existe un abierto $O \in \mathscr{T}$ tal que $x \in O \subseteq U$.

Observación. *Un conjunto es abierto si, y solo si, es entorno de todos sus puntos.*

Definición 2.1.6. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ un subconjunto. Se llama **topología inducida** en A por $\mathscr{T}$ a la familia $\mathscr{T}_{|A} = \{O \cap A \mid O \in \mathscr{T}\}$. En estas condiciones se dice que $(A, \mathscr{T}_{|A})$ es **subespacio topológico** de $(X, \mathscr{T})$.

El conjunto de los cerrados de $(A, \mathscr{T}_{|A})$ es $\mathscr{F}_{|A} = \{F \cap A \mid F \in \mathscr{F}\}$. A su vez, si $\mathcal{B}$ es base de la topología $\mathscr{T}$, entonces el conjunto $\mathcal{B}_{|A} = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base de la topología inducida $\mathscr{T}_{|A}$. Además, las siguientes afirmaciones son ciertas:

(1) Sea $O \subseteq A$. Si $O \in \mathscr{T}$, entonces $O \in \mathscr{T}_{|A}$.

(2) Sea $F \subseteq A$. Si $F \in \mathscr{F}$, entonces $F \in \mathscr{F}_{|A}$.

(3) Sea $A \in \mathscr{T}$ y $O \in \mathscr{T}_{|A}$. Entonces $O \in \mathscr{T}$.

(4) Sea $A \in \mathscr{T}$ y $F \in \mathscr{F}_{|A}$. Entonces $F \in \mathscr{F}$.

Definición 2.1.7. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico, $A \subseteq X$ un subconjunto y $x \in X$. Se dice que x es un punto **adherente** del conjunto A si todo entorno de x tiene intersección no vacía con el conjunto A. El conjunto de todos los puntos adherentes de A se llama **adherencia** o **clausura**de A y se denota como $\overline{A}$.

Definición 2.1.8. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es **irreducible** si satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

(i) $X \neq \emptyset$.

(ii) Si $O_1, O_2 \in \mathscr{T}$ con $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, entonces o bien $O_1 = \emptyset$ o bien $O_2 = \emptyset$.

Esto es, si dos subconjuntos abiertos no vacíos cualesquiera tienen intersección no vacía.

Definición 2.1.9. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice que es **irreducible** si el subespacio topológico inducido $(A, \mathscr{T}_{|A})$ es irreducible.

Proposición 2.1.1. *En todo espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se verifican los siguientes enunciados:*

(1) *Si $A \subseteq X$ es un subconjunto irreducible, entonces $\overline{A}$ es irreducible.*

(2) *Todo subconjunto irreducible está contenido en un subconjunto irreducible maximal.*

Definición 2.1.10. En todo espacio topológico $(X, \mathscr{T})$, los subconjuntos irreducibles maximales son cerrados y se denominan las **componentes irreducibles** del espacio topológico $(X, \mathscr{T})$.

Definición 2.1.11. Definimos la **dimensión de Krull de un espacio topológico** $(X, \mathscr{T})$ como el supremo de las longitudes de cadenas de subconjuntos cerrados irreducibles de X.

Definición 2.1.12. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice que es **conexo** si la única partición por conjuntos abiertos de X es la partición trivial. Esto es, si existen dos subconjuntos abiertos $O_1, O_2 \in \mathscr{T}$ tales que $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ y $O_1 \cup O_2 = X$, entonces $O_1 = \emptyset$ y $O_2 = X$. y viceversa.

mejor $O_1 = \phi$ ó $O_2 = \phi$.

Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice que es **disconexo** si no es conexo.

Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice que es **totalmente disconexo** si dados dos puntos distintos cualesquiera $x, y \in X$ existen subconjuntos abiertos $x \in O_x$ y $y \in O_y$ tales que $O_x \cap O_y = \emptyset$ y $O_x \cup O_y = X$.

Nótese que un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es conexo si, y solo si, los únicos conjuntos abiertos y cerrados al mismo tiempo son X y $\emptyset$.

Definición 2.1.13. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice **cuasi-compacto** si para cualquier familia de subconjuntos abiertos $\{O_i \mid i \in I\}$ cuya unión sea el espacio total, $\bigcup\limits_{i \in I} O_i = X$, existe un subconjunto finito, $J \subseteq I$, de forma que $\bigcup\limits_{j \in J} O_j = X$.

Equivalentemente, se dice que un espacio topológico X es cuasi-compacto si para cualquier familia de subconjuntos cerrados $\{C_i \mid i \in I\}$ cuya intersección es vacía, existe una subfamilia finita $\{C_j \mid j \in J\}$ con intersección vacía.

Lema 2.1.1. *La unión y la intersección de dos conjuntos abiertos cuasi-compactos son también cuasi-compactos.*

Demostración.

Sean $Y_1, Y_2 \subseteq X$ conjuntos abiertos cuasi-compactos, por lo que podemos expresarlos como unión finita de abiertos; $Y_i = \cup_j (O_j \cap Y_i)$. Por tanto, su unión es:

$$Y_1 \cup Y_2 = (\cup_j (O_j \cap Y_1)) \cup (\cup_j (O_j \cap Y_2)) = \cup_j (O_j \cap (Y_1 \cup Y_2))$$

De igual forma, su intersección es:

$$Y_1 \cap Y_2 = (\cup_j (O_j \cap Y_1)) \cap (\cup_j (O_j \cap Y_2)) = \cup_j (O_j \cap (Y_1 \cap Y_2))$$

□

2.2 Axiomas de separación.

Definición 2.2.1. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice que es T_0 o de **Kolmogorov** si para dos puntos distintos cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$, existe un abierto $O \subseteq X$ de forma que o bien $x \in O$ e $y \notin O$, o bien $x \notin O$ e $y \in O$.

Definición 2.2.2. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice que es T_1 o de **Fréchet** si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$, $x \neq y$, existen subconjuntos abiertos de cada punto que no contienen al otro, esto es, existen abiertos $O_x \ni x$ y $O_y \ni y$ tales que $y \notin O_x$ y $x \notin O_y$.

Proposición 2.2.1. *Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es $T_1 \iff \forall x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si el conjunto $\{z\}$ no es cerrado para todo $z \in X$, entonces $X \setminus \{x\}$ no es abierto para un cierto $x \in X$, por lo que existe un punto $y \in X \setminus \{x\}$ para el cual no existe ningún abierto tal que $y \in O_y \subseteq X \setminus \{x\}$, luego el único abierto que contiene a y es el espacio total X. Como X es T_1, debe existir un abierto conteniendo a y pero no a x, lo cual supone una contradicción.

$\Leftarrow$) Si para todo $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es cerrado, entonces para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ se tienen que $X \setminus \{x\}$ y $X \setminus \{y\}$ son abiertos cumpliendo las condiciones de espacio topológico de Fréchet. $\square$

Proposición 2.2.2. *Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es T_1 si, y solo si, todo subconjunto finito de X es cerrado.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si $(X, \mathscr{T})$ es T_1, entonces $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$. Como todo conjunto finito A está compuesto por un número finito de elementos, se puede expresar como unión finita de cerrados:

$$A = \{x_1, ..., x_n\} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$$

$\Leftarrow$) Para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es finito, luego es cerrado. Por tanto $(X, \mathscr{T})$ es T_1. $\square$

Corolario 2.2.1. *Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es T_1 si, y solo si, todo subconjunto $A \subseteq X$ cumpliendo que $X \setminus A$ es finito, es abierto.*

Definición 2.2.3. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice T_2 o de **Hausdorff** si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$, $x \neq y$, existen abiertos de cada punto cuya intersección es vacía, esto es, existen abiertos $O_x \ni x$ y $O_y \ni y$ tales que $O_x \cap O_y = \emptyset$.

Proposición 2.2.3. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua entre dos espacios topológicos X e Y. Si X es cuasi-compacto e Y es Hausdorff, entonces f es cerrada, es decir, lleva subconjuntos cerrados de X en subconjuntos cerrados de Y.*

Definición 2.2.4. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice que es $T_{2\frac{1}{2}}$ o de **Urysohn** si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$, con $x \neq y$, existen entornos cerrados C_x y C_y (de x e y respectivamente) tales que $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Definición 2.2.5. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice que es **completamente** T_2 o **completamente de Hausdorff** si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$, $x \neq y$, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ con $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$.

Definición 2.2.6. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice que es T_3 o espacio de **Hausdorff regular** si para todo $x \in X$ y para todo subconjunto cerrado $C \subseteq X$ tal que $x \notin C$, existen abiertos $O_x \ni x$ y $O_C \supseteq C$ tales que $O_x \cap O_C = \emptyset$.

Definición 2.2.7. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice que es $T_{3\frac{1}{2}}$, de **Tychonoff** o **completamente regular** si para todo $x \in X$ y para todo subconjunto cerrado $C \subseteq X$ tal que $x \notin C$, existe una función continua y acotada $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ y $f(C) = 0$.

Definición 2.2.8. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice que es **normal** si para cualesquiera dos subconjuntos cerrados, $C_1, C_2 \subseteq X$, con intersección vacía, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, existen abiertos $O_{C_1} \supseteq C_1$ y $O_{C_2} \supseteq C_2$ tales que $O_{C_1} \cap O_{C_2} = \emptyset$.

Un espacio topológico que sea simultáneamente T_1 y normal, se dice que es T_4. Además, ser T_4 es equivalente a ser normal y de Hausdorff.

Definición 2.2.9. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice que es **completamente normal** si todo subconjunto abierto es normal (como subespacio topológico inducido).

Un espacio topológico que sea simultáneamente T_1 y completamente normal se dice que es T_5. Además, ser T_5 es equivalente a ser completamente normal y T_4.

Definición 2.2.10. Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice que es **perfectamente normal** si para cualesquiera dos subconjuntos cerrados, $C_1, C_2 \subseteq X$, con intersección vacía, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f^{-1}(0) = C_1$ y $f^{-1}(1) = C_2$.

Un espacio topológico que sea simultáneamente T_1 y perfectamente normal se dice que es T_6. Además, ser T_6 es equivalente a ser perfectamente normal y T_4.

Capítulo 3

Espectro de un anillo

y relacionarlo con

Dado un espacio topológico X, existe un problema clásico en álgebra conmutativa ~~para~~ es determinar cuando existe un anillo A tal que X sea homeomorfo a $\mathrm{Spec}(A)$ con la topología de Zariski. Para resolver este problema, el paso previo es realizar un catálogo de las propiedades que cumple $\mathrm{Spec}(A)$ como espacio topológico según las propiedades algebraicas de A. Esta labor ha sido realizada por Hochster en numerosos trabajos, entre los que destaca [6].

Nos vamos a restringir a considerar $\mathrm{Spec}(A)$ únicamente con la topología de Zariski, pero es también posible considerar otras topologías en $\mathrm{Spec}(A)$ para las cuales el problema planteado por Hochster también se puede estudiar. Ejemplos de estas topologías pueden ser:

1. "Étale topology".
2. "Patch topology".
3. "Constructible topology".

En este capítulo demostraremos que el espectro de un anillo junto con la topología de Zariski es un espacio topológico y veremos sus propiedades generales. Posteriormente, estudiaremos bajo qué condiciones el espectro es irreducible y la relación entre la conexión del espectro como espacio topológico y la existencia de idempotentes no triviales. Por último, nos centraremos en el estudio de anillos 0 dimensionales relacionándolos con los anillos regulares.

3.1 Topología de Zariski.

Definición 3.1.1. El conjunto de todos los ideales primos de un anillo A se llama **espectro** de A, y se denota $\mathrm{Spec}(A)$.

A su vez el conjunto de todos los ideales maximales de A se llama **espectro maximal** de A, y se denota $\mathrm{Max}(A)$.

Proposición 3.1.1. *Sea un anillo A y un ~~subconjunto~~ ideal de dicho anillo $S \subseteq A$. Los ~~ideales~~ conjuntos de la forma $V(S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid S \subseteq \mathfrak{p}\}$ son los cerrados para la **topología de Zariski** en* $\mathrm{Spec}(A)$. *La familia de todos los cerrados de esta topología es*

$$\mathscr{C} = \{V(S) \mid S \subseteq A\}$$

para subconjuntos hay problemas
mejor poner ideal desde el
principio, decir que si
$S \subseteq A$ es un subconjunto con

Observación. *Cabe resaltar que $V(S) = V((S))$.*

$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \,/\, \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$

ideal $(S) = SA$,

$V((S)) = V(SA) = V(S)$

Demostración.

(1) $\emptyset \in \mathscr{C}$, pues $V(A) = \emptyset$.

(2) $\operatorname{Spec}(A) \in \mathscr{C}$, pues $V(0) = \operatorname{Spec}(A)$

(3) La unión finita de cerrados es un cerrado. Basta con probar que dados dos subconjuntos $S_1, S_2 \subseteq A$, se tiene que:

$$V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 \cap S_2) = V(S_1 S_2)^1$$

para subconjuntos está mal

Procederemos por doble inclusión:

Si $\mathfrak{p} \in V(S_1) \cup V(S_2)$, entonces o bien $S_1 \subseteq \mathfrak{p}$ o bien $S_2 \subseteq \mathfrak{p}$. En cualquier caso, $S_1 \cap S_2 \subseteq \mathfrak{p}$, y a su vez, $S_1 S_2 \subseteq S_1 \cap S_2 \subseteq \mathfrak{p}$. Es decir, se tiene la cadena de inclusiones:

$$V(S_1) \cup V(S_2) \subseteq V(S_1 \cap S_2) \subseteq V(S_1 S_2)$$

Si $\mathfrak{p} \in V(S_1 S_2)$, entonces $S_1 S_2 \subseteq \mathfrak{p}$ y por la Proposición 1.1.6, o bien $S_1 \subseteq \mathfrak{p}$ o bien $S_2 \subseteq \mathfrak{p}$, de lo que se deduce que o bien $S_1 S_2 \subseteq S_1 \cap S_2 \subseteq S_1 \subseteq \mathfrak{p}$ o bien $S_1 S_2 \subseteq S_1 \cap S_2 \subseteq S_2 \subseteq \mathfrak{p}$. Teniendo esto en cuenta, concluimos $V(S_1 S_2) \subseteq V(S_1 \cap S_2) \subseteq V(S_1) \cup V(S_2)$.

(4) La intersección (posiblemente infinita) de cerrados es un cerrado.

Basta probar que dada una familia cualquiera $\{S_i \mid i \in I\}$ de subconjuntos de A:

$$\bigcap_{i \in I} V(S_i) = V(\sum_{i \in I} S_i)$$

Procedemos por doble inclusión:

Recordamos que $\sum_{i \in I} S_i$ es el menor ideal que contiene a todos los ideales S_i, con $i \in I$. Por este motivo, si $\mathfrak{p} \in V(\sum_{i \in I} S_i)$, entonces $\sum_{i \in I} S_i \subseteq \mathfrak{p}$, y por tanto $S_i \subseteq \mathfrak{p}$ $\forall i \in I$, es decir, $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(S_i)$. Se sigue por tanto que $V(\sum_{i \in I} S_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} V(I_i)$.

Si $\mathfrak{p} \in \underset{i \in I}{V}(S_i)$, entonces, $S_i \subseteq \mathfrak{p}$ para cada índice $i \in I$. Como el menor ideal que contiene a todos estos ideales es $\sum_{i \in I} S_i$, se tiene que $\sum_{i \in I} S_i \subseteq \mathfrak{p}$, y por tanto, $\mathfrak{p} \in V\left(\sum_{i \in I} S_i\right)$. □

Dado un anillo A, podemos obtener los abiertos de la topología de Zariski como el conjunto $\mathscr{T} = \{X(S) \mid S \subseteq A\}$, siendo $X(S) = \operatorname{Spec}(A) \setminus V(S)$.

De la definición de los cerrados de la topología de Zariski nace el siguiente concepto:

Definición 3.1.2. Sea A un anillo y sea $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal. Se dice que un ideal es primo minimal sobre el ideal $\mathfrak{a}$ si es el menor de los ideales primos conteniendo a $\mathfrak{a}$.

Se pueden caracterizar los elementos invertibles y nilpotentes a través de los abiertos de la topología de Zariski.

Proposición 3.1.2. *Sea A un anillo y sea $a \in A$ un elemento de dicho anillo. Entonces:*

(1) $X(a) = \emptyset$ *si, y solo si,* $a \in \operatorname{Nil}(A)$.

(2) $X(a) = \operatorname{Spec}(A)$ *si, y solo si, a es invertible.*

[1] Nótese que se está cometiendo un abuso de notación, realmente deberíamos escribir $V((S_1)(S_2))$ en lugar de $V(S_1 S_2)$, pues estamos identificando subconjuntos de un anillo A con los ideales de A generados por dichos subconjuntos. Sin embargo esta notación no causa ninguna ambigüedad debido a que $V(S) = V((S))$.

Demostración.

(1) Si $X(a) = \emptyset$ entonces $a \in \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, luego $a \in \operatorname{Nil}(A)$ por la Proposición 1.4.2. Por otro lado, si $a \in \operatorname{Nil}(A)$ entonces por el Corolario 1.4.1, $a \in \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, lo cual implica que $X(a) = \emptyset$.

(2) Si $X(a) = \operatorname{Spec}(A)$ entonces $a \notin \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, lo cual junto con el Corolario 1.1.2, implica que a es invertible. Por otro lado, si a es invertible, es inmediato que $X(a) = \operatorname{Spec}(A)$. □

Proposición 3.1.3. *Sea A un anillo y sea $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Entonces $V(\mathfrak{a}) = V(\operatorname{rad}(\mathfrak{a}))$.*

Demostración.

Cómo $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$, es claro que $V(\operatorname{rad}(\mathfrak{a})) \subseteq V(\mathfrak{a})$. Por otro lado, como vimos en la Proposición 1.1.2, $p : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ mantiene el orden dado por la inclusión entre los ideales de A que contienen el ideal $\mathfrak{a}$ y los ideales de $A/\mathfrak{a}$. Así, si tomamos $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ obtenemos que $0 \subseteq p(\mathfrak{p})$. A su vez, se demuestra que $p(\mathfrak{p})$ es un ideal primo, lo cual junto con el Corolario 1.4.1 implica que $p(\operatorname{rad}(\mathfrak{a})) = \operatorname{Nil}(A/\mathfrak{a}) \subseteq p(\mathfrak{p})$. Por tanto:

$$p(\mathfrak{a}) \subseteq p(\operatorname{rad}(\mathfrak{a})) \subseteq p(\mathfrak{p}) \Longrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{p}$$

Luego si $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$, entonces $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{rad}(\mathfrak{a}))$, es decir, $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\operatorname{rad}(\mathfrak{a}))$. □

Corolario 3.1.1. *Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ ideales de un anillo A. Son equivalentes:*

(*a*) $\operatorname{rad}(\mathfrak{a}) = \operatorname{rad}(\mathfrak{b})$.

(*b*) $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b})$.

Lema 3.1.1. *Para todo anillo A se tiene que $\mathscr{B} = \{X(a) \mid a \in A\}$ es una base de la topología de Zariski.*

simplificamos con X(a) al conjunto X(aA)

Demostración.

Un conjunto es base de una topología cuando todo abierto puede expresarse como unión de elementos de dicho conjunto. Es fácil por tanto demostrar que $\mathscr{B}$ es base, pues todo ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ se puede expresar como $\mathfrak{a} = \sum \{aA \mid a \in \mathfrak{a}\}$, y por tanto:

$$X(\mathfrak{a}) = X\left(\sum \{aA \mid a \in \mathfrak{a}\}\right) = \cup \{X(a) \mid a \in \mathfrak{a}\}$$

□

Anteriormente se ha visto que si $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos y $\mathfrak{q} \subseteq B$ es un ideal primo de B, entonces $f^{-1}(\mathfrak{q})$ es un ideal primo de A. Es natural por tanto establecer una aplicación entre los correspondientes espectros de estos anillos; $f^* : \operatorname{Spec}(B) \longrightarrow \operatorname{Spec}(A)$ donde $f^*(\mathfrak{q}) = f^{-1}(\mathfrak{q})$.

Lema 3.1.2. *Dado un homomorfismo de anillos $f : A \longrightarrow B$, la aplicación anteriormente definida $f^* : \operatorname{Spec}(B) \longrightarrow \operatorname{Spec}(A)$ es continua.*

Además, para todo elemento $a \in A$, se tiene que $(f^*)^{-1}(X(a)) = X(f(a))$.

Demostración.

Consideremos $V(\mathfrak{a})$ un cerrado de $\operatorname{Spec}(A)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(f^*)^{-1}(V(\mathfrak{a})) &= (f^*)^{-1}(\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}) \\
&= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid f^*(q) \in \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A), \text{ con } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}\} \\
&= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid \mathfrak{a} \subseteq f^*(\mathfrak{q})\} \\
&= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid \mathfrak{a} \subseteq f^{-1}(\mathfrak{q})\} \\
&= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid f(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{q}\} \\
&= V(f(\mathfrak{a}))
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.1.2. *Sea A un anillo y $a \in A$ un elemento. Entonces el homomorfismo canónico $\lambda_{\Sigma_a,A} : A \longrightarrow A_a$ induce un homeomorfismo $\lambda^*_{\Sigma_a,A} : \operatorname{Spec}(A_a) \longrightarrow X(a)$.*

Demostración.

Por un razonamiento análogo al realizado en la demostración del Lema 3.1.2 se prueba que $(\lambda^*_{\Sigma_a,A})^{-1}$ es continua y que $\lambda^*_{\Sigma_a,A}\left(X\left(\frac{a}{1}\right)\right) = X(a)$.

Veamos de forma constructiva que $\lambda^{-1}_{\Sigma_a,A} : \operatorname{Spec}(A_a) \longrightarrow X(a)$ definido como $\lambda^{-1}_{\Sigma_a,A}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}^c$, con inversa $\lambda_{\Sigma_a,A}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^e$ es un isomorfismo:

En primer lugar, dado un elemento $xy \in \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, entonces se tiene:

- $\lambda_{\Sigma_a,A}(xy) = \frac{xy}{1} \in \lambda_{\Sigma_a,A}(\mathfrak{p})$.
- Por ser $\mathfrak{p}$ ideal primo de A, o bien $x \in \mathfrak{p}$, o bien $y \in \mathfrak{p}$, de lo que se deduce que: o bien $\frac{x}{1} \in \lambda_{\Sigma_a,A}(\mathfrak{p})$ o bien $\frac{y}{1} \in \lambda_{\Sigma_a,A}(\mathfrak{p})$.

Si $a \notin \mathfrak{p}$, se tiene que $(\lambda_{\Sigma_a,A}(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}^e \in \operatorname{Spec}(A_a)$.

En segundo lugar, dado un elemento $\frac{x}{a^n} \cdot \frac{y}{a^m} = \frac{xy}{a^{n+m}} \in \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A_a)$, entonces se tiene:

- $\frac{a}{1} \notin \mathfrak{q}$ (si no lo fuese, $\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{a} = 1 \in \mathfrak{q} \Longrightarrow \mathfrak{q} = (1)$, lo cual contradice que $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A_a)$).
- $\frac{xy}{1} \in \mathfrak{q} \Longrightarrow \lambda^{-1}_{\Sigma_a,A}(xy) \in \lambda^{-1}_{\Sigma_a,A}(\mathfrak{q}) \Longrightarrow xy \in \lambda^*_{\Sigma_a,A}(\mathfrak{q})$.
- Por ser $\mathfrak{q}$ ideal primo de A_a, o bien $\frac{x}{a^n} \in \mathfrak{q}$, o bien $\frac{y}{a^m} \in \mathfrak{q}$, de lo que se deduce que: o bien $x \in \lambda^*_{\Sigma_a,A}(\mathfrak{q})$, o bien $y \in \lambda^*_{\Sigma_a,A}(\mathfrak{q})$.

Como $\frac{a}{1} \notin \mathfrak{q}$, se tiene que $\lambda^*_{\Sigma_a,A}(\mathfrak{q}) = \lambda^{-1}_{\Sigma_a,A}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}^c \in \operatorname{Spec}(A)$.

Por lo tanto, $\lambda^*_{\Sigma_a,A}$ es una aplicación biyectiva (por la Proposición 1.2.1), continua y su recíproca es continua, por lo que se trata de un homeomorfismo. □

Corolario 3.1.3. *Sea A un anillo y sea $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal de dicho anillo. El homomorfismo dado por la proyección canónica $p : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ induce un homeomorfismo $p^* : \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \longrightarrow V(\mathfrak{a})$.*

Demostración.

Por un razonamiento análogo al realizado en la demostración del Lema 3.1.2 se prueba que $(p^*)^{-1}$ es continua y que $p^*(V[0]) = V(\mathfrak{a})$. Por otro lado, la Proposición 1.1.2 nos asegura que la aplicación p ~~se trata de~~ una biyección entre los ideales de A que contienen al ideal $\mathfrak{a}$ y los ideales de $A/\mathfrak{a}$, y por consiguiente, la aplicación inducida p^* también.

Por lo tanto, p^* es una aplicación biyectiva, continua y su recíproca es continua, por lo que se trata de un homeomorfismo. □

es

Utilizando conjuntamente este corolario y la Proposición 3.1.2 obtenemos:

Corolario 3.1.4. $\operatorname{Spec}(A)$ *y* $\operatorname{Spec}(A/\operatorname{Nil}(A))$ *son homeomorfos para todo anillo* A*.*

Lema 3.1.3. *El espacio topológico* $\operatorname{Spec}(A)$ *con la topología de Zariski es cuasi-compacto.*

Demostración.

Sea $\{X(\mathfrak{a}_i) \mid i \in I\}$ una familia de abiertos cuya unión sea $\operatorname{Spec}(A)$. Entonces,

$$\bigcup_{i\in I} X(\mathfrak{a}_i) = X\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right) = \operatorname{Spec}(A)$$

Por tanto, $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i = A$ y podemos expresar $1 = \sum_{j=1} a_j$ donde $a_j \in \mathfrak{a}_j$ para un conjunto de índices $J \subseteq I$ finito. Así, $X(\sum_{j\in J} \mathfrak{a}_j) = X(A) = \operatorname{Spec}(A)$. □

$\rightsquigarrow \bigcup_i X(\mathfrak{a}_j)$

Corolario 3.1.5. *El espacio topológico* $\operatorname{Spec}(A)$ *con la topología de Zariski tiene una base de la topología formada por subconjuntos abiertos cuasi-compactos. Además, todo abierto* $X(\mathfrak{a})$ *es cuasi compacto si, y solo si, es unión finita de abiertos cuasi-compactos de esta base.*

Demostración.

Por un lado, en el Corolario 3.1.2 probamos que $X(a) \cong \operatorname{Spec}(A)$, luego $X(a)$ es cuasi-compacto para todo elemento $a \in A$. Por otro lado, en el Lema 3.1.1 se prueba que $\{X(a) \mid a \in A\}$ es una base de la topología.

Para la segunda parte del corolario, tan sólo hay que tener en cuenta que la unión finita de conjuntos cuasi-compactos es ~~compacta~~ y que $X(\mathfrak{a}) = \cup\{X(a) \mid a \in \mathfrak{a}\}$. □

cuasi-compact

Corolario 3.1.6. *Sea* A *un anillo y* $\Sigma \subseteq A$ *un subconjunto multiplicativo. El homomorfismo* $\lambda_{\Sigma,A} : A \longrightarrow \Sigma^{-1}A$ *induce un homeomorfismo* $\lambda^*_{\Sigma,A} : \operatorname{Spec}(\Sigma^{-1}A) \longrightarrow \mathscr{K}(\Sigma)$*, donde* $\mathscr{K}(\Sigma) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap \Sigma = \emptyset\}$ *es cuasi-compacto.*

Demostración.

Por un razonamiento análogo al realizado en la demostración del Lema 3.1.2 se prueba que $(\lambda^*_{\Sigma,A})^{-1}$ es continua y que $\lambda^*_{\Sigma,A}\left(X\left(\frac{a}{1}\right)\right) = X(a)$.

Por la Proposición 1.2.1, sabemos que existe una biyección entre los ideales contraídos y los ideales extendidos. Veamos esta biyección detenidamente:

Los ideales $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(\Sigma^{-1}A)$ no pueden contener ningún elemento de la forma $\frac{x}{1}$ con $x \in \Sigma$, dado que, en caso contrario, $\frac{x}{1} \cdot \frac{1}{x} = 1 \in \mathfrak{q}$, llegando por tanto a la contradicción $\mathfrak{q} = \Sigma^{-1}A$. Así, $\mathfrak{q}^c = \lambda^{-1}_{\Sigma,A}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec(A)}$ y no contiene ningún elemento de Σ.

De igual forma, todo ideal primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ que no contenga ningún elemento de Σ se puede extender a $\mathfrak{p}^e = \mathfrak{p}\Sigma^{-1}A = \left\{\frac{a}{s} \in \Sigma^{-1}A \mid a \in \mathfrak{p}, s \in \Sigma\right\}$.

Luego, existe un homeomorfismo entre $\operatorname{Spec}(\Sigma^{-1}A)$ y $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap \Sigma = \emptyset\} = \mathscr{K}(\Sigma)$.

Además, es claro que $\mathscr{K}(\Sigma) = \cap\{X(s) \mid s \in \Sigma\}$, por lo que es intersección de abiertos cuasi-compactos, y de esta forma debe de ser necesariamente cuasi-compacto, aunque no tiene por qué ser abierto.

Por último, cabe resalta que el conjunto $\mathscr{K}(\Sigma)$ es **cerrado bajo generalizaciones**, esto es, todo ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, donde $\mathfrak{q} \in \mathscr{K}(\Sigma)$, cumple a su vez que $\mathfrak{p} \in \mathscr{K}(\Sigma)$. □

Lema 3.1.4. *Para todo anillo A, se tiene que* $\operatorname{Spec}(A)$ *es* T_0.

Demostración.

Consideremos dos ideales distintos $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$, con $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. Si $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$, entonces existe $a \in \mathfrak{q}$ tal que $a \notin \mathfrak{p}$, luego $\mathfrak{p} \in X(a)$ pero $\mathfrak{q} \notin X(a)$. Si $\mathfrak{p} \nsubseteq \mathfrak{q}$, entonces $\mathfrak{p} \in X(\mathfrak{q})$ pero $\mathfrak{q} \notin X(\mathfrak{q})$. □

Proposición 3.1.4. *En todo anillo A, las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) *Sean $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ dos ideales de A tales que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$. Entonces $V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$.*

(2) *Para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ se tiene que $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$.*

(3) *Un ideal primo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(A)$ es maximal si, y solo si, $\{\mathfrak{m}\}$ es cerrado.*

(4) *Para todo subconjunto $Z \subseteq \operatorname{Spec}(A)$, la clausura de Z es:*

$$\overline{Z} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \cap \{\mathfrak{q} \mid \mathfrak{q} \in Z\} \subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \cap Z \subseteq \mathfrak{p}\} = V(\cap Z)$$

(5) *Para todo subconjunto abierto $X(\mathfrak{a})$ se tiene que $\overline{X(\mathfrak{a})} = V(\cap X(\mathfrak{a}))$.*

Demostración.

(1) Se deduce de forma inmediata de la definición de los cerrados de la topología de Zariski.

(2) Procedemos por doble inclusión:

Si $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$, entonces todo entorno U de $\mathfrak{q}$ cumple que $U \cap \{\mathfrak{p}\} \neq \emptyset$. Distinguimos ahora dos casos; que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ y que $\mathfrak{p} \nsubseteq \mathfrak{q}$. En el primer caso, $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p})$ por definición. En el segundo caso, $X(\mathfrak{p})$ es un abierto para el cual $\mathfrak{p} \notin X(\mathfrak{p})$ y $\mathfrak{q} \in X(\mathfrak{p})$, pero entonces $X(\mathfrak{p})$ es entorno de $\mathfrak{q}$ y por tanto $(p) \in X(\mathfrak{p})$ llegando así a una contradicción.

Si $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{t} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{t}\}$, entonces $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. Si supongamos que $\mathfrak{q} \notin \overline{\{\mathfrak{p}\}}$, entonces existe un entorno U de $\mathfrak{q}$ tal que $U \cap \{\mathfrak{p}\} = \emptyset$, y por tanto, debe existir un abierto $X(\mathfrak{a})$ (donde $\mathfrak{a} \subseteq A$ es un ideal) de forma que $\mathfrak{q} \in X(\mathfrak{a}) \subseteq U$ y que $X(\mathfrak{a}) \cap \{\mathfrak{p}\} = \emptyset$. Así:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \notin X(\mathfrak{a}) &\Longrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \\ \mathfrak{q} \in X(\mathfrak{a}) &\Longrightarrow \mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{q} \end{aligned}$$

Luego llegamos a la contradicción $\mathfrak{p} \nsubseteq \mathfrak{q}$ y la única hipótesis realizada debe ser falsa, es decir, $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$.

(3) Se deduce de forma inmediata de la afirmación (2) anterior.

(4) Como para todo $\mathfrak{q} \in Z$ se tiene que $\overline{\{\mathfrak{q}\}} = V(\mathfrak{q})$, se tiene que:

$$\overline{Z} = \overline{\cup\{\{\mathfrak{q}\} \mid \mathfrak{q} \in Z\}} = \cup\{\overline{\{\mathfrak{q}\}} \mid \mathfrak{q} \in Z\} = \cup\{V(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in Z\} = V(\cap Z)$$

□

3.2 Puntos genéricos. Espectro irreducible.

Debido a los resultados Corolario 3.1.3 y Corolario 3.1.4, es lógico plantearse cuándo existe un ideal $\mathfrak{a}$ tal que $V(\mathfrak{a}) = \operatorname{Spec}(A)$. Para ello, primeramente realizamos la siguiente definición:

Definición 3.2.1. Sea A un anillo. Se dice que un ideal primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ es un **punto genérico** del espectro de A cuando $V(\mathfrak{p}) = \operatorname{Spec}(A)$.

Lema 3.2.1. *Sea A un anillo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(*a*) $\operatorname{Spec}(A)$ *es irreducible.*

(*b*) $X(a) \cap X(b) \neq \emptyset$ *para cualesquiera abiertos básicos no vacíos* $X(a), X(b) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$.

(*c*) $\operatorname{Nil}(A)$ *es un ideal primo (y por tanto se trata del único ideal primo minimal de A).*

(*d*) $\operatorname{Spec}(A)$ *tiene un punto genérico.*

Demostración.

(*a*)$\Leftrightarrow$(*b*) Es consecuencia inmediata de la definición de espacio topológico irreducible.

(*a*)$\Rightarrow$(*c*) Supongamos que existen $a, b \in A \setminus \operatorname{Nil}(A)$ de forma que $ab \in \operatorname{Nil}(A)$. Es claro que a y b son no invertibles, luego por la Proposición 3.1.2, sabemos que $X(a), X(b) \neq \operatorname{Spec}(A)$. Si $\mathfrak{p} \in X(a) \cap X(b)$, entonces $a, b \notin \mathfrak{p}$, pero como $ab \in \operatorname{Nil}(A)$, existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $(ab)^n = 0 \in \mathfrak{p}$, por lo que o bien $a \in \mathfrak{p}$ o bien $b \in \mathfrak{p}$, lo cual es una contradicción.

(*c*)$\Rightarrow$(*a*) Supongamos que existen dos abiertos básicos no vacíos $X(a), X(b) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ tales que $X(a) \cap X(b) = \emptyset$. Para cada $\mathfrak{p} \in X(a)$ se tiene que $b \in \mathfrak{p}$ y viceversa. Por tanto $a, b \notin \operatorname{Nil}(A)$. Como $\operatorname{Nil}(A)$ está contenido en todo ideal primo de A, se deduce que $a, b \notin \operatorname{Nil}(A)$ y como por hipótesis el nilradical es primo, entonces $ab \notin \operatorname{Nil}(A)$. Así, $\operatorname{Nil}(A) \in X(ab) = X(a) \cap X(b) = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

(*c*)$\Leftrightarrow$(*d*) Es claro que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ es un punto genérico si, y solo si, $\mathfrak{p} = \operatorname{Nil}(A)$. □

Lema 3.2.2. *En todo anillo A se cumplen los siguientes enunciados:*

(1) *Sea $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ un subconjunto cerrado de la topología de Zariski. Se tiene que Y es irreducible si, y solo si, existe $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ tal que $Y = V(\mathfrak{p})$.*

(2) *Las componentes irreducibles de $\operatorname{Spec}(A)$ son los subconjuntos cerrados de la forma $V(\mathfrak{p})$ con $\mathfrak{p}$ un ideal primo minimal.*

Demostración.

(1) Utilizando conjuntamente el Lema 3.2.1 y el Corolario 3.1.3, obtenemos que un subconjunto cerrado $Y = V(\mathfrak{a})$ es irreducible si, y solo si $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ es irreducible, lo que a su vez implica que $\operatorname{Nil}(A/\mathfrak{a}) = p(\operatorname{rad}(\mathfrak{a}))$ es un ideal primo. De esta forma, $\operatorname{rad}(\mathfrak{a}) \in \operatorname{Spec}(A)$ y es tal que $Y = V(\mathfrak{a}) = V(\operatorname{rad}(\mathfrak{a}))$.

(2) Si $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ es una componente irreducible, entonces es un cerrado y existe $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ tal que $Y = V(\mathfrak{p})$. Si $\mathfrak{p}$ no fuese primo minimal, existiría otro ideal primo $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ de forma que $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(\mathfrak{q})$, lo cual es una contradicción con la maximalidad de $Y = V(\mathfrak{p})$.

Si $\mathfrak{p} \subset A$ es un ideal primo minimal, entonces $V(\mathfrak{p})$ es irreducible. Si $V(\mathfrak{p})$ no fuese una componente irreducible, existe otro ideal primo $\mathfrak{q}$ de forma que $V(\mathfrak{p}) \subsetneq V(\mathfrak{q})$, luego $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$, lo cual es una contradicción con la hipótesis de que $\mathfrak{p}$ sea ideal primo minimal. □

Corolario 3.2.1. *Sea A un anillo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(*a*) *A es de dimensión n.*

(*b*) $\operatorname{Spec}(A)$ *es de dimensión n*

Demostración.

(*a*)$\Rightarrow$(*b*) Sea $\mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{p}_{n-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_0$ una cadena ascendente saturada de ideales primos de longitud n en A. Entonces $V(\mathfrak{p}_0) \subset V(\mathfrak{p}_1) \subset \cdots \subset V(\mathfrak{n})$ es una cadena ascendente de subconjuntos cerrados de $\operatorname{Spec}(A)$, que además son irreducibles por el Lema 3.2.2.

Si existiese una cadena ascendente saturada más larga de subconjuntos cerrados irreducibles $V(\mathfrak{q}_0) \subset V(\mathfrak{q}_1) \subset \cdots \subset V(\mathfrak{q}_m)$, entonces $\mathfrak{q}_m \subset \mathfrak{p}_{m-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_0$ sería una cadena de ideales primos de A de longitud mayor que n, lo cual es imposible.

(b)$\Rightarrow$(a) Análogo al razonamiento anterior. $\square$

3.3 Elementos idempotentes. Espectro conexo.

Definición 3.3.1. Un elemento $e \in A$ se dice **idempotente** si $e^2 = e$.

Proposición 3.3.1. *Sea A un anillo. Entonces, para todo subconjunto $Z \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) *Z es un subconjunto cerrado y abierto simultáneamente.*

(b) *$Z = V(e) = X(1-e)$ para algún elemento idempotente $e \in A$.*

Demostración.

(a)$\Rightarrow$(b) Si $Z \subseteq A$ es abierto y cerrado simultáneamente, deben existir ideales $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ tales que $Z = V(\mathfrak{a}) = X(\mathfrak{b})$. De lo que se deducen:

(1) $V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = \emptyset$, luego $V(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \emptyset$ y $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = A$.

(2) $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = \operatorname{Spec}(A)$, luego $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \operatorname{Spec}(A)$ y $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \operatorname{Nil}(A)$.

Por tanto, existen $a \in \mathfrak{a}$ y $b \in \mathfrak{b}$ tales que $a+b=1$ y $ab=0$, lo que implica $a^2 = a$. Además, se tiene que $V(a) = V(\mathfrak{a})$:

(1) Si $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$, entonces $a \in \mathfrak{p}$, y por tanto $\mathfrak{p} \in V(a)$

(2) Si $\mathfrak{p} \in V(a)$, entonces $a \in \mathfrak{p}$. Si suponemos que $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a}) = X(\mathfrak{b})$, entonces $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$. luego $b \in \mathfrak{p}$. Así llegamos a que $1 = a+b \in \mathfrak{p}$, por lo que $\mathfrak{p} = A$, lo cual es una contradicción pues $\mathfrak{p}$ es primo.

Teniendo todo en cuenta, $Z = V(\mathfrak{a}) = V(a)$ donde a es un elemento idempotente de A.

(b)$\Rightarrow$(a) Sea $e \in A$ un elemento idempotente. Bajo esta condición $V(e) = X(1-e)$, es decir, se trata de un subconjunto abierto y cerrado simultáneamente. $\square$

Lema 3.3.1. *En todo anillo A los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\operatorname{Spec}(A)$ *es disconexo.*

(b) *A tiene elementos idempotentes distintos de 0 y 1.*

(c) *A es el producto directo de dos anillos.*

Demostración.

(a)$\Rightarrow$(b) Si $\operatorname{Spec}(A)$ es disconexo, entonces existe una partición no trivial $\{O_1, O_2\}$, donde O_1 y O_2 son abiertos y cerrados al mismo tiempo y debe existir un elemento idempotente $e \in A$ tal que $O_1 = V(e)$ y $O_2 = V(1-e)$. Además, e tiene que ser distinto de 1 y de 0 pues en caso contrario la partición $\{V(e), V(1-e)\}$ sería trivial.

(b)$\Rightarrow$(c) Si $e \in A$ es un elemento idempotente distinto de 1 y de 0, entonces todo elemento $a \in A$ se puede expresar como $a = ae + a(1-e)$. Así, $A = Ae + A(1-e)$ y $Ae \cap A(1-e) = 0$. Además, Ae y $A(1-e)$ son anillos con elementos neutros e y $(1-e)$ respectivamente. Así, podemos expresar A como producto directo de dos anillos; $A = Ae \times A(1-e)$.

(c)⇒(a) Consideremos B y C anillos tales que $A = B \times C$. Entonces todos los ideales primos de A son de la forma $\mathfrak{p}_B \times C$ ó $B \times \mathfrak{p}_C$ donde $\mathfrak{p}_B$ y $\mathfrak{p}_C$ son ideales primos de B y de C respectivamente. Así, $\mathrm{Spec}(A) \cong \mathrm{Spec}(B) \cup \mathrm{Spec}(C)$. Además, si llamamos 0_B y 0_C a los elementos cero de B y de C respectivamente y 1_B y 1_C a los elementos uno de B y de C respectivamente, entonces $X(1_A, 0_B)$ y $X(0_A, 1_B)$ conforman una partición no trivial de $\mathrm{Spec}(A)$, por lo que es un espacio topológico disconexo. □

3.4 Anillos de dimensión 0. Anillos regulares.

Proposición 3.4.1. *En todo anillo A, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) $\mathrm{Spec}(A)$ *es* T_1.
(b) *A tiene dimensión* 0.

Demostración.

(a)⇒(b) Dado un ideal primo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, el conjunto $\{\mathfrak{p}\}$ es cerrado, luego $\mathfrak{p}$ es maximal.

(b)⇒(a) Si $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$, entonces $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ y como la dimensión de A es 0, $\mathfrak{p}$ es maximal y por tanto $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Luego para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, se tiene que $\{\mathfrak{p}\} = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ es un cerrado. □

Proposición 3.4.2. *En todo anillo A, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) $\mathrm{Spec}(A)$ *es* T_2.
(b) *A tiene dimensión* 0.

Demostración.

(a)⇒(b) Es suficiente recordar que todo espacio T_2 es T_1.

(b)⇒(a) Como A es de dimensión 0, $\mathrm{Spec}(A)$ es T_1. Consideremos dos ideales primos distintos $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$, con $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. Es claro que $\mathfrak{q} \notin \overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$, por lo que debe existir $a \in A$ tal que $\mathfrak{q} \in X(a)$ y tal que $\mathfrak{p} \notin X(A)$. En $A_\mathfrak{p}$, se tiene que para cualquier $\frac{a}{1} \in \mathfrak{p}A\mathfrak{p} = \mathrm{Nil}(A_\mathfrak{p})$ debe existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a^n}{1} = 0$, y por tanto existe $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $a^n s = 0$. Como $a \notin \mathfrak{q}$, debe ocurrir que $s \in \mathfrak{q}$. Por tanto, $\mathfrak{p} \in X(s)$ y $\mathfrak{q} \notin X(s)$. Veamos que tienen intersección vacía:

$$X(a) \cap X(s) = X(a^n) \cap X(s) = X(a^n s) = X(0) = \emptyset$$

□

Definición 3.4.1. Sea A un anillo. Decimos que $a \in A$ es un **elemento regular** (en el sentido von Neumann) si existe un elemento $b \in A$ tal que $a = a^2 b$.

Si todos los elementos de A son regulares, diremos que A es un **anillo regular**.

Definición 3.4.2. Sea A un anillo. Decimos que $a \in A$ es un **elemento π-regular** si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que a^n es regular.

Si todos los elementos de A son π-regulares, entonces decimos que A es un **anillo π-regular**.

Observación. *Si $a = a^2 b$, entonces $a^2 = aa^2 b = a^2 ab = a^2 a^2 b^2$, luego ab es idempotente. Además, todo elemento regular es π-regular, y todo anillo regular es π-regular.*

Ejemplos.
(1) Es claro que el producto directo de anillos regulares es un anillo regular.

(2) Si A es un anillo regular y $\mathfrak{p} \subseteq A$ es un ideal ~~primo~~, entonces el anillo cociente $A/\mathfrak{p}$ es un anillo regular. ?

(3) Si A es un anillo regular y $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos, entonces $\operatorname{Im}(f)$ es un anillo regular.

(4) Todo cuerpo es un anillo regular, y todo producto de cuerpos es un anillo regular.

(5) Todo anillo **booleano**, esto es, en el que todos sus elementos son idempotentes, es un anillo regular. Por ejemplo, dado un conjunto cualquiera, su conjunto de partes con las operaciones suma y producto definidas como la diferencia simétrica y la intersección de conjuntos respectivamente, conforman un anillo booleano que es por tanto, regular.

Teorema 3.4.1. *Sea A un anillo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) *A es regular.*

(b) *A es un anillo reducido de dimensión 0.*

(c) *Toda localización $A_{\mathfrak{m}}$ en un ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$, es un cuerpo.*

(d) *Todo ideal de A es un ideal radical.*

(e) *A es reducido y todo ideal finitamente generado de A está generado por un elemento idempotente.*

Demostración.

(a)$\Rightarrow$(b) Si $a \in A$ es nilpotente, existe un natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$, y al ser A regular, también debe existir $b \in A$ tal que $a = a^2b$. Así, $a = a^2b = a^3b^2 = \cdots = a^nb^{n-1} = 0$, es decir, $\operatorname{Nil}(A) = 0$.

Por otro lado, todo anillo regular es π-regular, por lo que tiene dimensión 0.

(b)$\Rightarrow$(c) Para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$, se tiene que $A_{\mathfrak{m}}$ es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}A$ y además $\operatorname{Nil}(A_{\mathfrak{m}}) = 0$, por lo que se trata de un cuerpo.

(c)$\Rightarrow$(a) Para todo elemento $a \in A$, se tiene que $a^2A \subseteq aA$, y para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$ se tiene que $a^2A_{\mathfrak{m}} = aA_{\mathfrak{m}}$. Por lo tanto $a^2A = aA$ y debe de existir $b \in A$ tal que $a = a^2b$.

(c)$\Rightarrow$(d) Basta aplicar el Lema 1.4.3.

(d)$\Rightarrow$(a) Si todo ideal es radical, (x^2) es radical para todo elemento $x \in A$. Pero si (x^2) es radical, entonces $x \in (x^2)$ y por tanto existe un elemento $b \in A$ tal que $x = x^2b$.

(a)$\Rightarrow$(e) Sea $\mathfrak{a} = (a, b)$ un ideal de A. Como A es regular, $a = a^2x$ y $b = b^2y$ para algunos elementos $x, y \in A$. El elemento $e = ax + by - axby$ es idempotente y además $(a, b) = (e)$.

(e)$\Rightarrow$(b) Supongamos $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ dos ideales primos de A. Si tomamos un elemento idempotente $e \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_1$, entonces $e(1 - e) \in 0 \in \mathfrak{p}_1$, y por tanto $1 - e \in \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$. Pero esto es imposible porque entonces $\mathfrak{p}_2 = A$. $\square$

Lema 3.4.1. *Sea A un anillo tal que $A/\operatorname{Nil}(A)$ es regular, entonces A es π-regular.*

Demostración.

Si $a \in A$ entonces $[a] \in A/\operatorname{Nil}(A)$ es regular y existe $b \in A$ tal que $[a] = [a]^2[b] = [a^2b]$. De esta forma, $(a - a^2b) \in \operatorname{Nil}(A)$, por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(a - a^2b)^n = 0$. Luego existe $c \in A$ tal que $a^n - a^{n+1}c = 0$, y $a^n = a^{n+1}c$, lo que a su vez nos permite realizar el siguiente cálculo:

$$a^n = a^{n+1}c = a^nac = a^{n+1}ac^2 = a^{n+2}c^2 = \cdots = a^{2n}c^n$$

Luego a es π-regular $\square$

Corolario 3.4.1. *Todo anillo A de dimensión cero es π-regular*

Demostración.

$A/\mathrm{Nil}(A)$ es un anillo reducido de dimensión cero, por lo que es un anillo regular. Aplicando el Lema 3.4.1, A es π-regular. $\square$

Lema 3.4.2. *Sea A un anillo y sean $X(a)$ y $X(b)$ abiertos básicos de la topología de Zariski. Si $X(a) \subseteq X(b)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in (b)$.*

En particular, si a es un elemento idempotente, entonces $a \in (b)$.

Demostración.

Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a^n \notin (b)$. Entonces el conjunto de ideales $\Gamma = \{\mathfrak{c} \subseteq A \mid (\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{c},\ a^n \notin \mathfrak{c}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ es no vacío, pues $(\mathfrak{b}) \in \Gamma$. Este conjunto está ordenado parcialmente y si consideramos $\{\mathfrak{c}_i \mid; i \in I\}$ un conjunto de ideales de Γ que conforman una cadena ascendente, entonces $\cup_{i\in I}\mathfrak{c}_i$ es un ideal cumpliendo simultáneamente que $a^n \notin \cup_{i\in I}\mathfrak{c}_i$ y que $(\mathfrak{b}) \subseteq \cup_{i\in I}\mathfrak{c}_i$, por lo que $\cup_{i\in I}\mathfrak{c}_i \in \Gamma$ es una cota superior para toda cadena ascendente. Aplicando el lema de Zorn, debe existir un elemento maximal en Γ, que notaremos por $\mathfrak{p}$.

Si el ideal $\mathfrak{p}$ no fuese primo, existiría $xy \in \mathfrak{p}$ de forma, que $x, y \notin \mathfrak{p}$ y por tanto, $\mathfrak{p}+(x), \mathfrak{p}+(y) \notin \Gamma$. Así, existirían naturales $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $a^{n_1} \in \mathfrak{p}+(x)$ y $a^{n_2} \in \mathfrak{p}+(y)$ pero esto es imposible, pues entonces $a^{n_1+n_2} = a^{n_1}a^{n_2} \in (\mathfrak{p}+(x))(\mathfrak{p}+(y)) \subseteq \mathfrak{p}$.

Hemos encontrado un ideal primo tal que $\mathfrak{p} \in X(a)$ pero $\mathfrak{p} \notin X(b)$, lo cual contradice la hipótesis $X(a) \subseteq X(b)$. $\square$

Lema 3.4.3. *Todo anillo π-regular es de dimensión cero, y por tanto su espectro es T_1 y T_2.*

Demostración.

Sea A es un anillo π-regular y sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo. Para todo $a \in A \setminus \mathfrak{p}$, existe $n \in \mathbb{N}$ y $b \in A$ tal que $a^n = a^{2n}b$ y $a^n \in A \setminus \mathfrak{p}$. El elemento $e = a^n b$ es idempotente y $(a^n) = (e)$, por lo tanto, $1 - e \in \mathfrak{p}$. Así, $A = \mathfrak{p} + (e) = \mathfrak{p} + (a^n) \subseteq \mathfrak{p} + (a)$ y en consecuencia, $p \subseteq A$ es ideal maximal. Como todo ideal primo es maximal, A tiene dimensión 0. $\square$

Teorema 3.4.2. *Sea A un anillo. Las siguiente afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *A es de dimensión* 0.

(*b*) *A es π-regular.*

(*c*) $\mathrm{Spec}(A)$ *tiene una base de la topología formada por conjuntos abiertos y cerrados a la vez.*

Demostración.

(*a*)$\Leftrightarrow$(*b*) Aplicamos el Corolario 3.4.1 y el Lema 3.4.3.

(*b*)$\Rightarrow$(*c*) Para todo $X(a)$ y para todo $a \in \mathfrak{a}$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $b \in A$ tales que $a^n = a^{2n}b$, por tanto $e = a^n b$ es idempotente y $(a^n) = (e)$. Así, $X(a) = X(e) = V(1-e)$ por lo que $X(a)$ es abierto y cerrado. Por último tenemos en cuenta que podemos expresar todo abierto como $X(\mathfrak{a}) = \cup\{X(a) \mid a \in \mathfrak{a}\}$.

(c)⇒(b) Para todo $a \in A$ consideramos $X(a) = \cup\{X(\mathfrak{a}_i) \mid i \in I\} = X\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_\mathfrak{i}\right)$, que es unión de subconjuntos básicos de la topología abiertos y cerrados al mismo tiempo. Llamamos $\mathfrak{a} = X\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_\mathfrak{i}\right)$.

Se tiene que $a \in \text{rad}(\mathfrak{a})$, porque en caso contrario existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ tal que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ y $a \notin \mathfrak{p}$, por lo que $\mathfrak{p} \in X(\mathfrak{a}) = X(a)$, contradicción. Luego existen ideales $\mathfrak{a}_{i_1}, \mathfrak{a}_{i_2}, ..., \mathfrak{a}_{i_t}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $a^n \in \sum_{j=1}^{t} \mathfrak{a}_{i_t}$. Por tanto:

$$X(a) = X(a^n) \subseteq X\left(\sum_{j=1}^{t} \mathfrak{a}_{i_j}\right) = \cup_{j=1}^{t} X(\mathfrak{a}_{i_j}) \subseteq X(\mathfrak{a}) = X(a)$$

Y $X(a)$ es abierto y cerrado simultáneamente por ser unión de abiertos y cerrados al mismo tiempo. Por tanto existe un elemento idempotente $e \in A$ tal que $X(a) = V(e) = X(1-e)$ y por el Lema 3.4.2 existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a^m \in (1-e)A$. Como $1-e \in (a)$, se tiene que $a^m = (1-e)b$ y $1-e = ac$ para algún $c \in A$, por tanto:

$$a^m = (1-e)b = (1-e)^{2m}b = (ac)^{2m}b = a^{2m}c^{2m}b$$

Es decir, a es un elemento π-regular. Como esta construcción se ha realizado para un elemento $a \in A$ cualquiera, A es un anillo π-regular. □

Corolario 3.4.2. *Sea A un anillo.* Spec(A) *es* T_2 *si, y solo si* $A/\text{Nil}(A)$ *es un anillo regular.*

Demostración. Basta tener en cuenta que Spec(A) es homeomorfo a Spec$(A/\text{Nil}(A))$ y que Spec(A) es T_2 si y solo si, A es de dimensión 0. □

Proposición 3.4.3. *Sea A un anillo de dimensión* 0. *Entonces todo ideal $\mathfrak{a}$ finitamente generado cumple que* $\text{Ann}(\mathfrak{a}) \neq 0$.

Demostración.

$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ para algún ideal primo $\mathfrak{p}$, que es maximal y minimal por ser A de dimensión 0. Si $\mathfrak{a} \subseteq \text{Nil}(A)$, entonces $0 \neq \mathfrak{a}^{n-1} \subseteq \text{Ann}(\mathfrak{a})$ para algún $n \geq 2$. Si por el contrario $\mathfrak{a} \not\subseteq \text{Nil}(A)$, entonces al considerar la proyección canónica $p: A \longrightarrow A/\text{Nil}(A)$ obtenemos que $p(\mathfrak{a}) \subseteq p(\mathfrak{p})$. De esta forma, existe $z \in A \setminus \text{Nil}(A)$ tal que $p(z)p(\mathfrak{a}) = p(0)$, por lo que $z\mathfrak{a} \in \text{Nil}(A)$. Así, $0 \neq z^n\mathfrak{a}^{n-1} \not\subseteq \text{Ann}(\mathfrak{a})$. □

Observación. *Todo anillo de dimensión* 0 *es π-regular y por tanto para todo $a \in A$ existe un natural n y un elemento $b \in A$ tal que $a^n = a^{2n}b$. De esta forma, por el resultado anterior, podemos tomar* $0 \neq y \in \text{Ann}(a)$, *y así, $a^n = a^{2n}b + 0 = a^{2n}b + a^n y = a^n(a^n b + y)$, luego* $1 = a^n b + y \in (a) + \text{Ann}(a)$. *Es decir, en un anillo de dimensión* 0, *para todo elemento $a \in A$ se tiene que* $(a) + \text{Ann}(a) = A$.

Proposición 3.4.4. *Todo anillo de dimensión cero es un anillo total de fracciones.*

En particular, todo anillo regular es un anillo total de fracciones.

Demostración.

Sea A un anillo de dimensión 0, entones todo ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$ es minimal y maximal, y por tanto el localizado $A_\mathfrak{p}$ es un anillo local con un único ideal primo, que es $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Así, $\text{Nil}(A_\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ y $A_\mathfrak{m}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad. Por tanto, todo elemento de $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ es nilpotente y por tanto divisor de cero. Además, todo elemento de $A_\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ no es divisor de cero.

Por un lado, todo elemento divisor de cero en el localizado es a su vez un divisor de cero en A, por lo que $\cup\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)\}$ es el conjunto de todos los divisores de cero del anillo A. De esta forma, $\Sigma_0 = A \setminus \cup\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)\}$ y $\lambda_{\Sigma_0,A}$ es inyectiva. Por otro lado, como todo elemento no invertible está contenido en un ideal maximal, se tiene que Σ_0 es el conjunto de todos los elementos invertibles, por lo que todo elemento de $\Sigma_0^{-1}A$ se puede expresar como $\frac{a}{s} = \frac{as^{-1}}{1} = \lambda_{\Sigma_0,A}(as^{-1})$. De esta forma, $\lambda_{\Sigma_0,A}$ es sobreyectivo y A es un anillo total de fracciones. $\square$

Observación. *Dado un anillo A, siempre es posible construir el siguiente homomorfismo:*

$$f : A \longrightarrow \Pi\{A/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)\} \text{ definido para componente como } f(a) = (a+\mathfrak{p})_i$$

Sea $f_\mathfrak{p} : A \longrightarrow A/\mathfrak{p}$ la proyección canónica y sea $\beta_\mathfrak{p} : \Pi\{A/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)\} \longrightarrow A/\mathfrak{p}$ definido como $\beta_\mathfrak{p}((a+\mathfrak{p})_i) = a+\mathfrak{p}$. Por la propiedad universal del anillo producto (1.1.3)*, f es el único homomorfismo tal que $f_\mathfrak{p} = \beta_\mathfrak{p} \circ f$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_\mathfrak{p}"'] & \Pi\{A/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)\} \arrow[d, "\beta_\mathfrak{p}"] \\ & A/\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

Este homomorfismo f no tiene por qué ser inyectivo ni sobreyectivo. Sin embargo, $\operatorname{Spec}(A)$ *es homeomorfo a* $\operatorname{Spec}(A/\operatorname{Nil}(A))$ *y para* $A/\operatorname{Nil}(A)$*, el homomorfismo f que acabamos de definir siempre es inyectivo.*

En el caso de que A sea regular, tenemos asegurada la inyectividad de f, y además, como todo ideal primo es maximal, $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo. Luego todo anillo regular está inmerso en un producto de cuerpos. Es más, si A se tratase de un anillo reuglar y semilocal, entonces por el teorema del resto chino (1.1.4)*, f es además sobreyectiva, por lo que A es un producto finito de cuerpos. Des esta forma obtenemos el siguiente resultado:*

Proposición 3.4.5. *Si A es un producto directo finito de cuerpos, entonces* $\operatorname{Spec}(A)$ *es finito y la topología de Zariski coincide con la topología discreta.*

El recíproco de este resultado no es, en general, cierto. La siguiente definición nos permitirá clasificar a los anillos en los que la topología de Zariski coincide con la topología discreta.

Definición 3.4.3. Sea A un anillo. Un ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$ se dice que es un ideal "**strongly prime**" cuando para cualquier familia de ideales $\{\mathfrak{a}_i \mid i \in I\}$ tales que $\cap_{i\in I}\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$, existe un índice $i \in I$ tal que $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$.

Un anillo se dice que es **"strongly zero–dimensional"** si todo ideal primo es "strongly prime".

Lema 3.4.4. *Todo ideal "strongly prime" es maximal.*

Demostración.

Podemos asumir sin pérdida de generalidad que A es un dominio de integridad y que $0 \subseteq A$ es un ideal "strongly prime". Por tanto, si la intersección de una familia de ideales es 0, uno de ellos tiene que ser 0, luego existe un único ideal minimal principal distinto de 0, que denotamos (a). Así, para todo elemento $0 \neq b \in A$, se tiene que $ab \neq 0$ y que $(a) \subseteq (ab)$, luego existe $x \in A$ tal que $a = abx$, lo que implica que $1 = bx$. De esta forma, todo elemento de A distinto de 0 es invertible, por lo que A se trata de un cuerpo. $\square$

Proposición 3.4.6. *Sea A un anillo y sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(*a*) $\mathfrak{p}$ *es "strongly prime".*

(*b*) *Para cualquier familia de ideales* $\{\mathfrak{a}_i \mid i \in I\}$ *se tiene que* $(\cap_{i\in I}\mathfrak{a}_i)_\mathfrak{p} = \cap_{i\in I}(\mathfrak{a}_i)_\mathfrak{p}$

Demostración.

(*a*)⇒(*b*) Por un lado, siempre se cumple que $(\cap_i\mathfrak{a}_i)_\mathfrak{p} \subseteq \cap_i(\mathfrak{a}_i)_\mathfrak{p}$. Por otro lado, si $\mathfrak{p}$ es primo y $\frac{x}{1} \in \cap(\mathfrak{a}_i)_\mathfrak{p}$, entonces para todo índice i se tiene que $\frac{x}{1} \in (\mathfrak{a}_i)_\mathfrak{p}$ y por tanto $(\mathfrak{a}_i : x) \not\subseteq \mathfrak{p}$ y $\cap_i(\mathfrak{a}_i : x) \not\subseteq \mathfrak{p}$. Por tanto $\frac{x}{1} \in (\cap_i\mathfrak{a}_i)_\mathfrak{p}$.

(*b*)⇒(*a*) Si $\cap_i\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $(\cap_i\mathfrak{a}_i)_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ y por tanto $\cap_i(\mathfrak{a}_i)_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \subseteq A_\mathfrak{p}$ es un ideal maximal, existe algún índice i para el cual $(\mathfrak{a}_i)_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ y por tanto $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$. □

Corolario 3.4.3. *En todo anillo A los siguientes enunciados son equivalentes:*

(*a*) *A es "strongly zero–dimensional".*

(*b*) *Para cualquier familia de ideales* $\{\mathfrak{a}_i \mid i \in I\}$ *y para todo ideal primo* $\mathfrak{p} \subseteq A$ *se tiene que* $(\cap_{i\in I}\mathfrak{a}_i)_\mathfrak{p} = \cap_{i\in I}(\mathfrak{a}_i)_\mathfrak{p}$

Proposición 3.4.7. *Si un anillo A tiene infinitos ideales maximales, entonces existe un ideal maximal conteniendo la intersección del resto de ideales maximales.*

Demostración.

Supongamos que no existe un ideal maximal conteniendo a la intersección del resto de ideales maximales. El siguiente conjunto es un ideal propio de A:

$$\mathfrak{a} = \{x \in A \mid x \text{ no pertenece a un número finito de ideales maximales }\}$$

Ademas, para cada ideal maximal $\mathfrak{m}'$ se cumple que $\cap_{\mathfrak{m}\neq\mathfrak{m}'}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a}$, luego por hipótesis, $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{m}'$. Es decir, el ideal propio $\mathfrak{a}$ no está contenido en ningún ideal maximal, contradicción. □

Proposición 3.4.8. *En todo anillo A son equivalentes:*

(*a*) *A es un anillo "strongly zero–dimensional".*

(*b*) *A es de dimensión* 0 *y no existe un ideal maximal conteniendo la intersección del resto de ideales maximales.*

Demostración.

(*a*)⇒(*b*) Si A es "strongly zero–dimensional", entonces todo ideal primo es "strongly prime", y por tanto maximal. Es decir, todo ideal primo de A es maximal, luego A es de dimensión 0.

Por definición de anillo "strongly zero–dimensional", no puede ocurrir que $\cap_{\mathfrak{m}\neq\mathfrak{m}'}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}'$.

(*b*)⇒(*a*) Supongamos que $\cap_i\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{m}$, entonces $\mathrm{rad}(\cap_i\mathfrak{a}_i) \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$, y por tanto, $\cap_i\mathrm{rad}(\mathfrak{a})$ i $\subseteq \mathfrak{m}$. Pero $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}_i)$ es intersección de ideales primos, que al ser A de dimensión 0, son maximales. Así, para algún índice i se tiene que $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{a}_i) \subseteq \mathfrak{m}$. □

Corolario 3.4.4. *Sea A un anillo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(*a*) *A es un anillo "strongly zero–dimensional".*

(*b*) *A es un anillo semilocal de dimensión* 0.

Proposición 3.4.9. *Si A es un anillo "strongly zero–dimensional", entonces* $\mathrm{Spec}(A)$ *es finito y la topología de Zariski en* $\mathrm{Spec}(A)$ *es discreta. Además,* $A/\mathrm{Nil}(A)$ *es un anillo regular isomorfo a un producto finito de cuerpos.*

Demostración. A es un anillo semilocal de dimensión 0, por lo que para todo ideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ se tiene que $\{\mathfrak{p}\}$ es un subconjunto cerrado, y $\operatorname{Spec}(A)$ es un conjunto finito. Por tanto todo subconjunto de $\operatorname{Spec}(A)$ es cerrado.

Por otro lado, como A es semilocal de dimensión 0, entonces $A/\operatorname{Nil}(A)$ es un anillo regular semilocal, por lo que es isomorfo a un producto directo finito de cuerpos. □

3.4.1 Espectro "strongly zero–dimensional". Anillos "clean".

Definición 3.4.4. El espectro de un anillo se dice que es "**strongly zero–dimensional**" (**SZD**) si para todo cerrado $V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ y para todo abierto $X(\mathfrak{b}) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ tales que $V(\mathfrak{a}) \subseteq X(\mathfrak{b})$, existe un subconjunto $V(e) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ abierto y cerrado al mismo tiempo, tal que $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(e) \subseteq X(\mathfrak{b})$.

Observación. *El que un anillo A sea "strongly zero–dimensional" implica que* $\operatorname{Spec}(A)$ *con la topología de Zariski sea un espacio topológico SZD. Pero el recíproco no es cierto, por ejemplo, un producto directo de infinitos cuerpos tiene un espectro SZD, pero no es un anillo "strongly zero–dimensional".*

Observación. *Nótese que si* $\operatorname{Spec}(A)$ *es SZD, entonces* $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(e) = X(1-e) \subseteq X(\mathfrak{b})$. *Además,* $V(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = \emptyset$, *por lo que* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = A = Ae + A(1-e)$ *donde* $e \in \mathfrak{a}$ *y* $(1-e) \in \mathfrak{b}$. *Esta idea nos servirá posteriormente para caracterizar este tipo de anillos.*

Proposición 3.4.10. *En todo anillo A son equivalentes:*

(*a*) $\operatorname{Spec}(A)$ *es SZD y* T_1.

(*b*) $\operatorname{Spec}(A)$ *es de dimensión cero.*

Demostración.

(*a*)⇒(*b*) Basta aplicar simultáneamente la Proposición 3.4.1 y el Lema 3.1.3.

(*b*)⇒(*a*) Como $\operatorname{Spec}(A)$ tiene dimensión 0, es T_1 y tiene una base de la topología formada por conjuntos abiertos y cerrados al mismo tiempo, $\{V(e_i) \mid i \in I\}$. Consideremos un subconjunto cerrado $V(\mathfrak{a})$ y un abierto $X(\mathfrak{b})$ tales que $V(\mathfrak{a}) \subseteq X(\mathfrak{b})$. Podemos expresar dicho abierto como unión de elementos de la base, $X(\mathfrak{a}) = \cup_{j \in J} V(e_j)$, y por tanto $V(\mathfrak{a}) = \cup_{j \in J}(V(\mathfrak{a}) \cap V(e_j))$ y $\operatorname{Spec}(A) = (\cup_{j \in J} V(e_j)) \cup (\operatorname{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a}))$. Como para todo anillo se tiene que su espectro es cuasi-compacto, deben existir $j_1, ..., j_t \in J$ tales que:

$$\operatorname{Spec}(A) = (\cup_{k=1}^{t} V(e_{j_k})) \cup (\operatorname{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a})$$

Luego $V(\mathfrak{a}) \subseteq \cup_{k=1}^{t} V(e_{j_k}) \subseteq X(\mathfrak{b})$, siendo $\cup_{k=1}^{t} V(e_{j_k})$ abierto y cerrado por ser unión finita de abiertos y cerrados. □

Proposición 3.4.11. *Sea A un anillo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(*a*) $\operatorname{Spec}(A)$ *es SZD.*

(*b*) *Para cualesquiera subconjuntos cerrados disjuntos* $V(\mathfrak{a}_1), V(\mathfrak{a}_2) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$, *existe un subconjunto abierto y cerrado* $V(e) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ *tal que* $V(\mathfrak{a}_1) \subseteq V(e)$ *y* $V(\mathfrak{a}_2) \cap V(e) = \emptyset$.

(*c*) *Si* $\operatorname{Spec}(A) = X(\mathfrak{a}_1) \cup X(\mathfrak{a}_2)$, *entonces existen* $V(e_1), V(e_2) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ *abiertos y cerrados al mismo tiempo, tales que* $V(e_i) \subseteq X(\mathfrak{a}_i)$, $V(e_1) \cap V(e_2) = \emptyset$ *y* $V(e_1) \cup V(e_2) = \operatorname{Spec}(A)$.

Demostración.

(a)⇒(b) Si $V(\mathfrak{a}_1)$ y $V(\mathfrak{a}_2)$ son disjuntos, entonces $V(\mathfrak{a}_1) \subseteq (\mathrm{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a}_2))$. Por hipótesis $\mathrm{Spec}(A)$ es SZD, por lo que existe $V(e)$ abierto y cerrado simultáneamente tal que $V(\mathfrak{a}_1) \subseteq V(e) \subseteq (\mathrm{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a}_2))$.

(b)⇒(a) Dado un cerrado $V(\mathfrak{a}_1)$, siempre podemos encontrar un abierto $X(\mathfrak{a}_2)$ tal que $V(\mathfrak{a}_1) \subseteq X(\mathfrak{a}_2)$. De esta forma, $V(\mathfrak{a}_1)$ y $(\mathrm{Spec}(A) \setminus X(\mathfrak{a}_2))$ son cerrados disjuntos, luego por hipótesis, existe un abierto y cerrado $V(e)$ tal que $V(\mathfrak{a}_1) \subseteq V(e)$ y $V(e) \cap (\mathrm{Spec}(A) \setminus X(\mathfrak{a}_2)) = \emptyset$. Así, $V(\mathfrak{a}_1) \subseteq V(e) \subseteq X(\mathfrak{a}_2)$.

(b)⇒(c) Si $\mathrm{Spec}(A) = X(\mathfrak{a}_1) \cup X(\mathfrak{a}_2)$, entonces $(\mathrm{Spec}(A) \setminus X(\mathfrak{a}_1)) \cap (\mathrm{Spec}(A) \setminus X(\mathfrak{a}_2)) = \emptyset$, y existe $V(e_1)$ abierto y cerrado tal que $(\mathrm{Spec}(A) \setminus X(\mathfrak{a}_2)) \subseteq V(e_1)$ y $V(e_1) \cap (\mathrm{Spec}(A) \setminus X(\mathfrak{a}_1)) = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathrm{Spec}(A) \setminus X(\mathfrak{a}_1) \subseteq X(\mathfrak{a}_2)$ y $V(e_1) \subseteq X(\mathfrak{a}_1)$. Luego:

$$\mathrm{Spec}(A) = V(e_1) \cup (\mathrm{Spec}(A) \setminus V(e)) = V(e_1) \cup X(\mathfrak{a}_2)$$

Es decir, $\mathrm{Spec}(A) = V(e_1) \cup X(\mathfrak{a}_2)$ y $V(e_1) \cap X(\mathfrak{a}_2) = \emptyset$. Así, por hipótesis, debe existir un subconjunto abierto y cerrado $V(e_2)$ tal que $(X \setminus V(e_1)) \subseteq V(e_2)$ y $(\mathrm{Spec}(A) \setminus X(\mathfrak{a}_2)) \cap V(e_2) = \emptyset$. Por tanto, $(\mathrm{Spec}(A) \setminus V(e_2)) \setminus V(e_1)$ y $V(e_2) \subseteq X(\mathfrak{a}_2)$. Es decir, $\mathrm{Spec}(A) = V(e_2) \cup (\mathrm{Spec}(A) \setminus V(e_2)) = V(e_2) \cup V(e_1)$. El conjunto $V(e_3) = V(e_2) \setminus V(e_1)$, junto con $V(e_1)$, son conjuntos abiertos y cerrados en las condiciones pedidas.

(c)⇒(a) Dado $V(\mathfrak{a}) \subseteq X(\mathfrak{b})$, como $\mathrm{Spec}(A) = X(\mathfrak{b}) \cup (\mathrm{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a}))$, existen $V(e_1), V(e_2)$ abiertos y cerrados al mismo tiempo tales que $V(e_1) \subseteq X(\mathfrak{b})$, $V(e_2) \subseteq (\mathrm{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a}))$, $V(e_1) \cup V(e_2) = \mathrm{Spec}(A)$ y $V(e_1) \cap V(e_2) = \emptyset$. Por lo tanto, $V(\mathfrak{a}) = (V(e_1) \cup V(e_2)) \cap V(\mathfrak{a}) = (V(e_1) \cap V(\mathfrak{a})) \cup (V(e_2) \cap V(\mathfrak{a})) = V(e) \cap V(\mathfrak{a})$ y además $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(e) \subseteq X(\mathfrak{b})$. □

Definición 3.4.5. Un anillo se dice que es "**clean**" si cada uno de sus elementos se puede expresar como suma de un elemento invertible y un elemento idempotente.

Definición 3.4.6. Sea un anillo A y un ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. Se dice que un idempotente $[a] \in (A/\mathfrak{a})$ se **eleva módulo $\mathfrak{a}$** si existe un elemento idempotente $e \in A$ tal que $[e] = [a]$.

Si los idempotentes se elevan módulo cualquier ideal se dice que A es un anillo "**exchange**"

Proposición 3.4.12. ~~*En*~~ Para *todo anillo A los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) *A es un anillo "exchange".*

(b) *Para todo elemento $a \in A$ existe un idempotente $e \in A$ tal que $e \in Aa$ y $1 - e \in A(1 - a)$.*

Demostración.

(a)⇒(b) Dado $a \in A$, podemos considerar el ideal $\mathfrak{a} = (a - a^2)A$, y como $[a] \in (A/\mathfrak{a})$ es idempotente, por hipótesis existe $e \in A$ idempotente tal que $[e] = [a]$. Por tanto, $e - a \in \mathfrak{a}$, y $e \in Aa$. Por otro lado, se tiene que $e - a = (a - a^2)k$ para algún $k \in A$, de lo que se deduce $1 - e = 1 - (a - a^2)k - a = 1 + a^2k - ak - a = (1 - a)(1 - ak) \in (1 - a)A$.

(b)⇒(a) Para todo ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$, consideramos un idempotente $[a] \in (A/\mathfrak{a})$. Como por hipótesis existe un idempotente $e \in A$ tal que $e \in Aa$ y $1 - e \in (1 - a)A$, se tiene que $e - a = e(1 - a) - a(1 - e)$. Luego $e - a$ es suma finita de productos de aA y de $(1 - a)A$, es decir, $e - a \in aA(1 - a)A = (a - a^2)A$. Por tanto, $[a] = [e]$ en $A/\mathfrak{a}$. □

Proposición 3.4.13 ([13]). ~~*En*~~ Para *todo anillo A los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) *A es un anillo "clean".*

(b) *A es un anillo "exchange".*

Demostración.

(a)$\Rightarrow$(b) Para todo $a \in A$ existe una descomposición $a = u + e$ donde u es un elemento invertible y e idempotente. Dado un ideal $\mathfrak{a}$, si $[a] \in (A/\mathfrak{a})$ es idempotente, entonces $a - a^2 \in \mathfrak{a}$, por lo que:

$$a^2 - a = (u+e)^2 - (u+e) = u^2 + 2ue + e - u - e = u(u + 2e - 1) = u(a + e - 1) \qquad (3.1)$$

Así, $[a] = [1-e]$, con $1 - e \in A$ idempotente.

(b)$\Rightarrow$(a) Para todo $a \in A$ existe un idempotente $e \in Aa$ tal que $1 - e \in A(1-a)$ y $e \in Aa$. Por lo tanto, $e = ak$ para algún $k \in A$ y $e = e^2 = ake$, por lo que podemos tomar $k = ke$ sin pérdida de generalidad. De igual forma, existe $h \in A$ tal que $h = he$ y $1 - e = (1-a)h$. Teniendo en cuenta que $e(1-e) = 0$, se deduce que $hke(1-e) = hk = 0$. Luego:

$$(k-h)(a-(1-e)) = ka - k(1-e) - ha + h(1-e) = ka - ha + h - k(1-e) - he = 1 + (1-e) - kh = 1$$

Así, $u = a - (1-e)$ es invertible y podemos expresar $a = u + (1-e)$. □

Teorema 3.4.3. *En todo anillo A los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) *A es un anillo "clean".*

(b) $\mathrm{Spec}(A)$ *es SZD.*

(c) *A es un anillo "exchange".*

Demostración.

(b)$\Rightarrow$(a) Utilizamos la caracterización de espectro SZD dada en el apartado (c) de la Proposición 3.4.11. Sean $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subseteq A$ ideales tales que $\mathrm{Spec}(A) = X(\mathfrak{a}_1) \cup X(\mathfrak{a}_2) = X(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)$, entonces $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \mathrm{Spec}(A)$ y hay elementos $a \in \mathfrak{a}_1$ y $b \in \mathfrak{a}_2$ tales que $a + b = 1$. Como A es "exchange", existe algún idempotente $e \in Aa$ tal que $1 - e \in A(1-a) = Ab$. Además se tiene que $X(e) \cap X(1-e) = \emptyset$ y que $X(e) \cup X(1-e) = \mathrm{Spec}(A)$

(b)$\Rightarrow$(a) Volvemos a aplicar la caracterización de espectro SZD dada en el apartado (c) de la Proposición 3.4.11. Dado $a \in A$, tenemos que $X(a) \cup X(1-a) = \mathrm{Spec}(A)$, y existe un idempotente $e \in A$ tal que $X(e) \subseteq X(a)$ y $X(1-e) \subseteq X(1-a)$ por tanto $e \in Aa$ y $1 - e \in A(1-a)$. Así, A es un anillo "exchange".

(a)$\Leftrightarrow$(c) Es la Proposición 3.4.13. □

Corolario 3.4.5. *Todo anillo π-regular es un anillo "clean".*

Demostración. Todo anillo π-regular es de dimensión 0, por lo que su espectro es SZD y T_1. Por lo tanto se trata de un anillo "clean". □

Gracias al Teorema 3.4.3 podemos dar una condición más débil para caracterizar los anillos

Proposición 3.4.14. *En todo anillo A los siguientes enunciado son equivalentes:*

(a) *A es un anillo "clean".*

(b) *Los idempotentes se elevan módulo cualquier ideal radical.*

Demostración.

(a)$\Rightarrow$(b) Es evidente.

(b)⇒(a) Veamos que $\operatorname{Spec}(A)$ es SZD. Dados dos ideales $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$, tales que $V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = \emptyset$, se tiene que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$, luego existen $a \in \mathfrak{a}$ y $b \in \mathfrak{b}$ tales que $a + b = 1$. Además, como para todo ideal $\mathfrak{c} \subseteq A$ se cumple que $V(\mathfrak{c}) = V(\operatorname{rad}(\mathfrak{c}))$, podemos asumir que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales radicales.

Por otro lado, $ab = a(1-a) \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, luego $[a]$ es idempotente en $A/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, por lo que existe un idempotente $e \in A$ tal que $e - a \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ y por tanto $e \in \mathfrak{a}$. De igual forma, se tiene que $[b] = [1-a] = [1-e] \in A/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, por lo que $1 - e \in \mathfrak{b}$.

Teniendo todo lo anterior en cuenta se deduce que $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(e)$ y $V(\mathfrak{b}) \subseteq V(1-e)$, y por el apartado (b) de la Proposición 3.4.11, se concluye que $\operatorname{Spec}(A)$ es SZD. □

Definición 3.4.7. Un anillo se dice que es de **Gelfand** si todo ideal primo está contenido en un único ideal maximal.

Si A es un anillo de Gelfand, entonces existe una aplicación $\mu : \operatorname{Spec}(A) \longrightarrow \operatorname{Max}(A)$ que lleva cada ideal primo $\mathfrak{p}$ en el ideal maximal que lo contiene $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$

Pase

Teorema 3.4.4 ([3, Theorem 2.1])**.** *En todo anillo A los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) *A es un anillo de Gelfand.*

(b) *La aplicación μ es continua y cerrada.*

(c) $\operatorname{Spec}(A)$ *es un espacio topológico normal (no necesariamente T_2).*

Además, para todo anillo de Gelfand, $\operatorname{Max}(A)$ *es un espacio topológico T_2.*

Demostración.

(a)⇒(b) Sea $\mathcal{F}$ un conjunto cerrado en $\operatorname{Max}(A)$ con la topología inducida. Consideremos los conjuntos $F = \cap\mathcal{F}$ e $I = \cap\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mu(\mathfrak{p}) \in \mathcal{F}\}$. Probaremos que $\mu^{-1}(\mathcal{F})$ es cerrado en $\operatorname{Spec}(A)$. Concretamente veremos que $V(I) = \mu^{-1}(\mathcal{F})$, esto es, si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ tal que $I \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $\mu(\mathfrak{p}) \in \mathcal{F}$.

En primer lugar, veamos que si tomamos $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$ de forma que $\mathfrak{q} \subseteq \mathcal{B} = \cup\{\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \in \mathcal{F}\}$ entonces $\mu(\mathfrak{q}) \in \mathcal{F}$. En efecto, bajo estas condiciones $\mathfrak{q} + F \subseteq \mathcal{B}$, por lo que existe $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)$ tal que $\mathfrak{q} + F \subseteq \mathfrak{m}$. Como $F \subseteq \mathfrak{m}$ y $\mathcal{F}$ es cerrado en $\operatorname{Max}(A)$, $\mathfrak{m} \in \mathcal{F}$ y como $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$, se tiene que $\mu(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}$.

En segundo lugar, vamos a probar que si tomamos $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, tal que $I \subseteq \mathfrak{p}$, entonces debe existir un ideal primo $\mathfrak{q}$ contenido en $\mathfrak{p}$ de forma que $\mathfrak{q} \subseteq B$, lo cual implica que $\mu(\mathfrak{p}) \in \mathcal{F}$. Sean $S = A \setminus B$, $T = A \setminus \mathfrak{p}$, $s \in S$ y $t \in T$. Como $I \subseteq \mathfrak{p}$, existe un ideal primo $\mathfrak{p}'$ tal que $\mu(\mathfrak{p}') \in \mathcal{F}$ tal que $t \notin \mathfrak{p}'$ y $s \notin \mathfrak{p}'$, luego $ts \notin \mathfrak{p}'$. Entonces $ts \notin I$ y el conjunto $ST = \{ts \mid s \in S, t \in T\}$ no corta a I, por lo que existe un ideal primo $\mathfrak{q}$ conteniendo a I disjunto de TS. Así, $\mathfrak{q} \subseteq B$ y $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.

Además, si A es de Gelfand, entonces $\operatorname{Max}(A)$ es de Hausdorff. En efecto, si $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in \operatorname{Max}(A)$, entonces el conjunto $S = (A \setminus \mathfrak{m})(A \setminus \mathfrak{m}')$ debe contener al 0, pues en caso contrario existiría un ideal primo $\mathfrak{p}$ tal que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, lo cual implica que $\mathfrak{p} \subseteq (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}')$. Así, deben existir entornos abiertos de $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}'$ disjuntos en $\operatorname{Spec}(A)$, y por tanto también en $\operatorname{Max}(A)$. Nótese que como μ es una aplicación continua entre un espacio cuasi-compacto y un espacio T_2, por lo que es una aplicación cerrada, es decir, lleva cerrados en cerrados.

(b)⇒(a) Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal. Entonces $\mu^{-1}(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}\} = P_{\mathfrak{m}}$ es cerrado en $\operatorname{Spec}(A)$. Por tanto, si un ideal primo $\mathfrak{p}$ es tal que $(\cap P_{\mathfrak{m}}) \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$. Es decir, todo ideal primo está contenido en un único ideal maximal.

(a)$\Rightarrow$(c) $\mathrm{Max}(A)$ es de Hausdorff y es cuasi-compacto. Además, μ es cerrada y lleva cerrados disjuntos de $\mathrm{Spec}(A)$ en cerrados disjuntos de $\mathrm{Max}(A)$.

(c)$\Rightarrow$(a) Sean $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ ideales maximales distintos. Entonces $\{\mathfrak{m}\}$ y $\{\mathfrak{m}'\}$ son cerrados disjuntos de $\mathrm{Spec}(A)$. Por lo tanto existen elementos $a \notin \mathfrak{m}$ y $a' \notin \mathfrak{m}'$ tales que $X(a) \cap X(a') = X(aa') = \emptyset$, es decir, $aa' \in \mathrm{Nil}(A)$. Luego $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}'$ no puede contener ideales primos, es decir, un ideal primo no puede estar contenido en dos ideales primos distintos. □

Proposición 3.4.15 ([1, Corollary 4]). *Todo anillo "clean" es de Gelfand.*

Demostración. Si $\mathfrak{p}$ un ideal primo, entonces $A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad "clean", por lo que no contiene idempotentes no triviales y todo elemento distinto de 0 es invertible o se puede expresar como $u+1$ para algún elemento invertible $u \in A$. Si tomamos un elemento no invertible $a \in A/\mathfrak{p}$, entonces para todo $x \in A/\mathfrak{p}$ se tiene que ax es no invertible, por lo que debe existir un elemento invertible $u \in A/\mathfrak{p}$ tal que $ax = u+1$. Así, $1-ax$ es invertible, y por la Proposición 1.4.3, se tiene que $a \in \mathrm{Rad}(A)$. Además, $(A/\mathfrak{p}) \setminus \mathrm{Rad}(A/\mathfrak{p})$ es el conjunto de todos los elementos invertibles de $A/\mathfrak{p}$, por lo que se trata de un anillo local. □

Teorema 3.4.5. *En todo anillo A los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) *A es un anillo "clean".*

(b) $\mathrm{Spec}(A)$ *es SZD*

(c) *A es una anillo de Gelfand y* $\mathrm{Max}(A)$ *tiene dimensión* 0.

(d) *A es una anillo de Gelfand y* $\mathrm{Max}(A)$ *es SZD.*

Demostración.

(a)$\Leftrightarrow$(b) Ya demostrado en el Teorema 3.4.3.

(c)$\Leftrightarrow$(d) Si A es de Gelfand entonces $\mathrm{Max}(A)$ es T_2 y por tanto T_1. El resultado es claro al aplicar la Proposición 3.4.10.

(b)$\Leftarrow$(d) Si $\mathrm{Spec}(A)$ es SZD, por la Proposición 3.4.11 se tiene que $\mathrm{Spec}(A)$ es normal, y por tanto, $\mathrm{Max}(A)$ también lo es. Aplicando el Teorema 3.4.4, se deduce que A es de Gelfand.

(d)$\Rightarrow$(b) $\mu : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{Max}(A)$ es continua y $\mathrm{Max}(A)$ es SZD, luego $\mathrm{Spec}(A)$ es SZD. □

Ejemplos.

(1) Todo cuerpo es un anillo regular, por lo que es π-regular y equivalentemente "clean", por lo que además es de Gelfand.

(2) $\mathbb{Z}/(6)$ es de dimensión 0, luego es π-regular y por tanto "clean" y de Gelfand.

(3) Todo anillo local es de Gelfand. Por ejemplo, $\mathbb{Z}/(4)$ es local, por lo cual es de Gelfand.

(4) Todo producto de cuerpos es de Gelfand.

(5) Aplicando la Proposición 1.1.6, se obtiene que todo anillo con un número finito de ideales primos es "strongly zero–dimensional", por tanto de dimensión 0 y por tanto de Gelfand. En particular, todo anillo finito es un anillo de Gelfand.

Conclusión

Un anillo es una estructura algebraica que, originalmente, tiene un significado aritmético derivado del anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros y los anillos de enteros algebraicos, esto es, las clausuras enteras de $\mathbb{Z}$ en las extensiones finitas de $\mathbb{Q}$. En este contexto, los ideales primos son fundamentales para construir, primero los números (factorización única de enteros) y después los ideales (factorización de ideales en dominios de enteros algebraicos). Otro desarrollo del álgebra conmutativa se produce al parametrizar los espacios algebraicos mediante anillos de polinomios. Nuevamente, los ideales primos son las piezas indescomponibles con las que formar los conjuntos algebraicos (conjuntos de ceros de sistemas de polinomios). Ahora, mediante los ideales primos, aparece un aspecto geométrico y por tanto una nueva herramienta propicia para el estudio de los anillos conmutativos. Esta herramienta geométrica se estudia mediante la definición de una topología, que relaciona el ámbito geométrico como en el algebraico, lo que permite una representación gráfica de anillos. Estas dos tendencias no son excluyentes sino que al contrario se complementan formando una nueva teoría aritmético-geométrica con amplias aplicaciones en el Álgebra y otras ramas de la Matemática.

En este trabajo nos centramos en una aspecto muy particular de la geometría algebraica sobre el espectro de un anillo: los axiomas de separación. Esto se debe a que los anillos con espectros verificando estos axiomas son sencillos (son anillos de dimensión 0) y además, el estudio y clasificación de los mismos es un problema de relevante actualidad.

Otras aproximaciones al estudio del espectro de un anillo como espacio topológico son también posibles y fructíferas, pero exceden los objetivos planteados para esta memoria. Entre ellas se encuentran las caracterizaciones de los espacios topológicos que son espectro primo de un anillo, otras topologías diferentes de la topología de Zariski ("patch topology", "constructible topology", etc) o la construcción de haces sobre el espectro Spec(A).

$K \subseteq \mathrm{Spec}(A)$

principalmente si estudiamos propiedades relativas a partes del espectro; ya nos han aparecido en este trabajo los ideales maximales, pero de mucha mayor importancia son otros subconjuntos como los ideales primos minimales y otros.

Bibliografía

[1] D. D: Anderson and V. P. Camillo, *Commutative rings whose elements are a sum of a unit and idempotent*, Comm. Algebra **30 (7)** (2002), 3327–3336.

[2] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introducción al álgebra conmutativa*, Reverté, Barcelona, 1973.

[3] G. De Marco and A. Orsatti, *Commutative rigns in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal*, Proc. Amer. Math. Soc. **30 (3)** (1971), 459–466.

[4] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*, van Nostrand, 1960.

[5] C. Gottlieb, *On strongly prime ideals and strongly zero-dimensional rings*, J. Algebra Appl. **16 (10)** (2017), 9 pages.

[6] Melvin Hochster, *Prime ideal structure in commutative rings*, Transactions of the American Mathematical Society **142** (1969), 43–60.

[7] J. A. Huckaba, *Commutative rings with zero divisors*, Monographs and Textbook in Pure and Applied Mathematics, **117**, Marcel Dekker, Inc. New York, 1988.

[8] P. Jara, *Álgebra conmutativa básica*, 2016, 551 pgs. (Enlace).

[9] C. Jayaram, K. H. Oral, and U. Tekir, *Strongly 0-dimensional rings*, Comm. Algebra **41** (2013), 2026–2032.

[10] D. Lu and W. Yu, *On prime spectrums of commutative rings*, Comm. Algebra **34** (2006), 2667–2672.

[11] H. Matsumura, *Commutative algebra*, Cambridge Univ. Press., 1989.

[12] W. W. McGovern, *Clean semiprime f–rings with bounded inversion*, Comm. Algebra **31 (7)** (2003), 3295–3304.

[13] W. K. Nicholson, *Lifting idempotents and exchange rings*, **Trans. Amer. Math. Soc.** (1977), 269–278.

[14] J. R. Porter and R. G. Woods, *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces*, Springe–Verlagr, 1988.

[15] K. Samei, *Clan elements in commutative reduced rings*, Comm. Algebra **32 (9)** (2004), 3479–3486.

Índice alfabético