

# FUNDAMENTOS DE BIOLOGÍA APLICADA I

Extraordinaria de septiembre. 2 de septiembre de 2009

Nombre \_\_\_\_\_ DNI \_\_\_\_\_

Grupo \_\_\_\_\_

- Responde, **siempre de manera justificada**, a cada uno de los siguientes ejercicios.
- No respondas a dos ejercicios distintos en una misma página.
- En cada ejercicio y apartado se indica el valor del mismo.

**Introducción:** Tras veinte meses de viaje, la nave “Nuevo Amanecer” llegó al planeta ANC-AUG2389. Durante los dos años siguientes varios grupos de investigadores estudiaron la vida del planeta. Tras dicho periodo, y tal como habían predicho los astrobiólogos A. Young y B. Takayashi, se determinó que todos los organismos que poblaban el planeta, salvo uno, eran similares a lo que en la Tierra se conoció tiempo atrás como organismos vegetales. El organismo restante era similar al animal (tipo del que sólo quedaban ciento ocho variedades en la Tierra). A este organismo se le denominó familiarmente como “yotas” en honor a los astrobiólogos.

[3.25] **EJERCICIO 1.** En ANC-AUG2389 se encontraron cuatro lagos que representaban el hábitat de los yotas. Estos lagos eran el Albio, el Blaureo, el Cendrio y el Drehabio. Tras los veinticuatro meses de estudio, el equipo de la Dra. Cienfuegos observó que cada ocho días se producía una migración de acuerdo a la siguiente matriz de transición:

$$M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix},$$

donde la primera columna está referida al Albio, la segunda al Blaureo, la tercera al Cendrio y la cuarta al Drehabio.

- [1] a) Justifica que  $v = (3, 4, 3, 4)^t$  es un vector propio para la matriz  $M$ .
- [1] b) Justifica que  $\lambda = 1$  es el valor propio dominante de la matriz  $M$ .
- [1.25] c) A los cinco años de su llegada, los investigadores observaron un descenso en el número de yotas. Tras consultar con el equipo de Young y Takayashi, se decidió un aporte de extra de sorham, un tipo de vegetal que hacía aumentar la resistencia de los yotas. Teniendo en cuenta que en el primer intento se disponía de 139'44 kilos de sorham y que la migración entre lagos estaba estabilizada, ¿cuál era el mejor reparto que se podía hacer del sorham entre los lagos?

[1] **EJERCICIO 2.** El biomatemático G. Menahed fue encargado de diseñar un modelo de ecuaciones en diferencias para el crecimiento de la población de yotas tras el aumento de sorham en su dieta. Como resultado de las investigaciones de su equipo de trabajo desplazado a ANC-AUG2389, Menahed estableció que la tasa de fertilidad de los yotas venía dada por la función  $f(P) = \frac{1}{1+5P}$ ,  $\forall P \geq 0$ , y que la tasa de mortalidad estaba dada por la función  $m(P) = \frac{5P}{1+5P}$ ,  $\forall P \geq 0$ , siendo en ambos casos  $P$  el número total de individuos en millones.

Calcula la función  $\lambda(P)$  asociada a la ecuación en diferencias  $P_{n+1} = \lambda(P_n)P_n$  que resulta de las tasas propuestas por Menahed.

[3.25] **EJERCICIO 3.** Como modelo de contraste, la biofísica E. Zarakoslaya tuvo que diseñar un modelo de ecuaciones diferenciales para el estudio de variación de la población de yotas. Aprovechando los datos del equipo de trabajo de Menahed, Zarakoslaya propuso la siguiente ecuación

$$P'(t) = 0,02P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{193}\right) \left(\frac{P(t)}{21,9} - 1\right),$$

donde  $P(t)$  es la población en miles de yotas en el mes  $t$ .

- [1] a) Calcula los puntos de equilibrio de la ecuación.
- [1.25] b) Haz un estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio a partir de del retrato de fases asociado a la ecuación.
- [1] c) Haz una interpretación biológica completa de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.