Fundamentos de Biología Aplicada I

Relación 1. Curso 2003/04

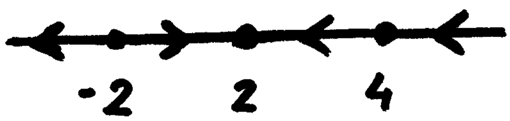
1) Determina el retrato de fases en cada caso:

a) $x' = x(2-x)$ b) $x' = x^2(2-x)$

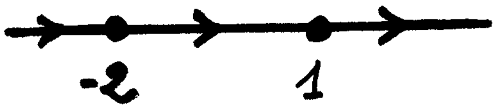
c) $x' = x(2-x)^2$ d) $x' = \cos x$

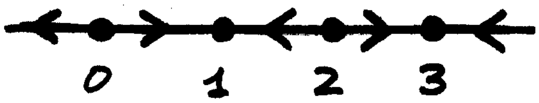
Estudia, en cada caso, las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio.

2) Reconstruye la gráfica de las soluciones de $x' = f(x)$ según su retrato de fases:

a) 

b) 

c) 

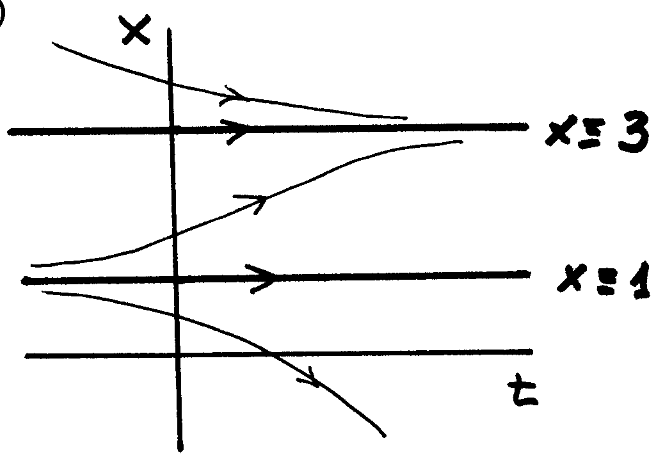
d) 

Explica qué puntos de equilibrio hay en cada caso y cuáles son sus propiedades de estabilidad.

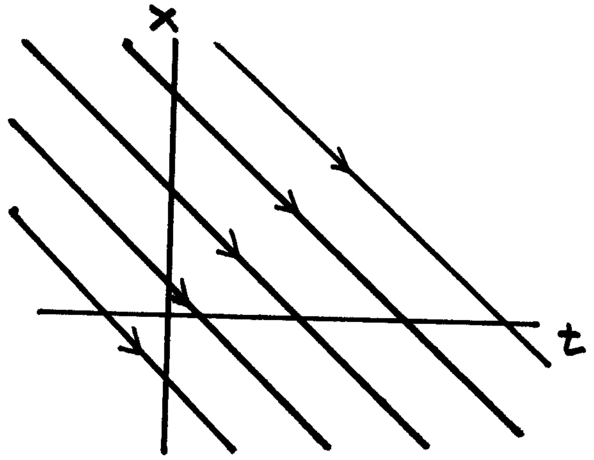
Propón posibles $f(x)$ para cada caso.

3) Dibuja el retrato de fases a la vista de las siguientes gráficas:

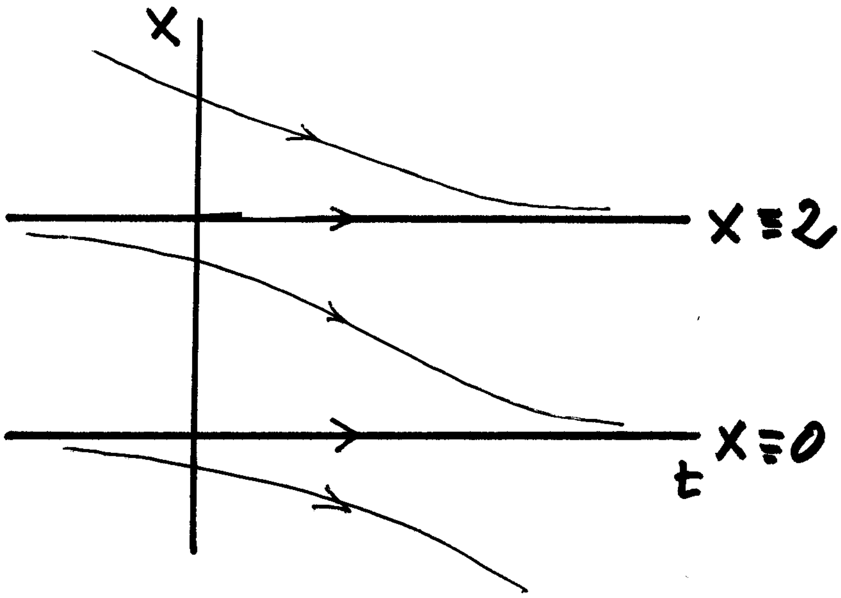
a)



b)



c)



Fundamentos de Biología Aplicada I

Relación 2. Curso 2003-2004

1) Esboza el retrato de fases para los siguientes sistemas correspondientes a un modelo de interrelación entre especies de tipo antagonista:

a) $\left.\begin{aligned} x' &= (2-y)x \\ y' &= (-3+x)y \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x' &= (3-x-y)x \\ y' &= (1+x-y)y \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x' &= (2-x-y)x \\ y' &= (-1+2x-y)y \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} x' &= (2-x-y)x \\ y' &= (-1+x)y \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} x' &= (-3+3x-y)x \\ y' &= (1+x-y)y \end{aligned}\right\}$

Realiza un análisis de los resultados obtenidos.

2) Lo mismo que en el ejercicio anterior para los siguientes modelos de competición

a) $\left.\begin{aligned} x' &= (3-2x-y)x \\ y' &= (2-3x-4y)y \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x' &= (2-x-y)x \\ y' &= (3-2x-y)y \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x' &= (3-2x-y)x \\ y' &= (2-x-y)y \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} x' &= (3-2x-y)x \\ y' &= (6-4x-2y)y \end{aligned}\right\}$

3) Lo mismo que en el primer ejercicio para los siguientes modelos de cooperación (mutualismo)

a) $\left.\begin{array}{l} x' = (4-2x+y)x \\ y' = (3+x-3y)y \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x' = (-1-x+y)x \\ y' = (3+x-2y)y \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} x' = (-x+y)x \\ y' = (1+2x-y)y \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{l} x' = (-8+4x+y)x \\ y' = (2+2x-y)y \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{l} x' = (-x+y)x \\ y' = (x-y)y \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{l} x' = (-1-x+2y)x \\ y' = (-1+2x-y)y \end{array}\right\}$

4) Lo mismo que en el ejercicio primero para los siguientes sistemas

a) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-x)x \\ y' = (1-y)y \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x' = (1-x)x \\ y' = (2-x-y)y \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} x' = (1-x+y)x \\ y' = (1-y)y \end{array}\right\}$

Fundamentos de Biología Aplicada I

Curso 2003-2004. Relación nº 3.

1) Considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = a + b x_n + c x_n^2$$

con a, b, c parámetros reales. Determina valores de estos parámetros para que se satisfaga cada una de las siguientes situaciones:

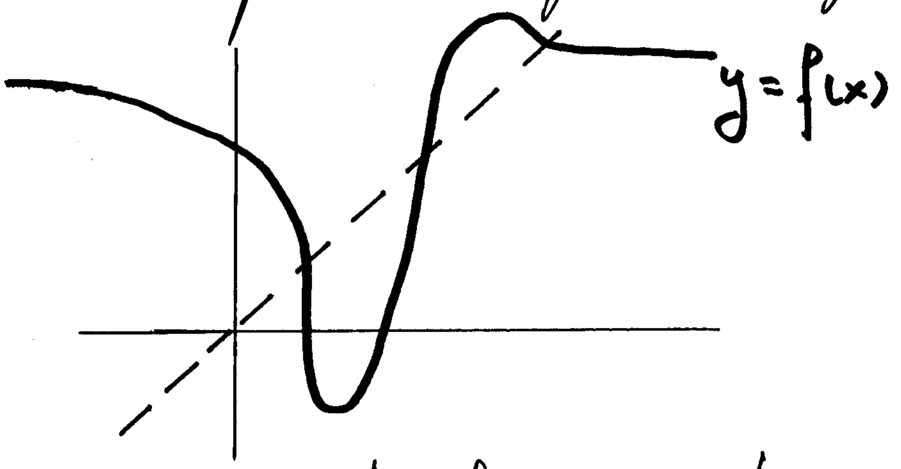
i) $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ es una solución.

ii) $\{2, 2, 2, \dots\}$ es una solución inestable.

iii) $\{4, -1, 4, -1, \dots\}$ es un 2-ciclo.

iv) $\{2, 0, 3, 2, 0, 3, \dots\}$ es un 3-ciclo.

2) Considera la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$ con $f(x)$ dada por la siguiente gráfica:



Determina los puntos fijos y estudia la estabilidad en cada uno de ellos.

3) Considera la ecuación en diferencias

$$P_{n+1} = P_n (a + P_n)$$

donde "a" es un parámetro real.

i) Calcula los puntos fijos y estudia su estabilidad.

ii) Cuando sea factible, haz interpretaciones de los resultados, obtenidos en el apartado i), desde un punto de vista "biológico".

4) Ejercicio análogo al anterior para la ecuación

$$P_{n+1} = P_n + h\, P_n (3 - 5 P_n)$$

con $h > 0$.

5) Las tasas de fertilidad y mortalidad de una cierta población vienen dadas por

$$N(P) = e^{-P}, \quad M(P) = 1 - 0'7 e^{-P}.$$

i) Interpreta las gráficas de N y M.

ii) La dinámica de la población viene dada por

$$(*) \quad P_{n+1} = \lambda(P_n) \cdot P_n .$$

Calcula $\lambda(P)$ e interpreta su gráfica.

iii) Calcula los puntos fijos de (*) y estudia su estabilidad.

Fundamentos de Biología Aplicada I

Curso 2003-2004. Relación nº 4

1) Decide, en cada caso, si v es vector propio:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 11/2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -30 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2) Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ tal que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$ son sus valores propios, $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son los vectores propios respectivos. Calcula A.

3) Una población se estructura en dos grupos de edad (G_1 y G_2). La tasa de fecundidad de G_1 es 1 y la de G_2 es 3. Además, la probabilidad de pasar del grupo G_1 al G_2 es 0'5. Determina la matriz de Leslie L, calcula L^n y decide qué ocurre con la población a largo plazo.

4) En un programa de fertilización cada planta (con posible genotipo AA, Aa o aa) se fertiliza con una del tipo AA. Encuentra la matriz M de transición entre generaciones:

$$x_{n+1} = M x_n \ , \quad M \in \mathcal{M}_{3\times 3}.$$

5) En un mecanismo hereditario ligado al sexo, suponemos que las hembras de genotipo Aa no alcanzan la madurez y, por tanto, no se reproducen. Así los posibles apareamientos son

$$(A, AA), \ (A, aa), \ (a, AA), \ (a, aa).$$

Encuentra el sistema de ecuaciones en diferencias que determina la probabilidad de apareamientos en cada generación:

$$x_{n+1} = M x_n \ , \quad M \in \mathcal{M}_{4\times 4}.$$

6) Interpreta el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0'3 & 0'5 \\ 0'4 & 0 & 0'5 \\ 0'6 & 0'7 & 0 \end{pmatrix} P_n .$$