Fundamentos de Biología Aplicada I - (Ldo. en Biología. Cuarto Curso)

Relación de ejercicios N$^{\underline{o}}$ 1. Curso 2004-2005.

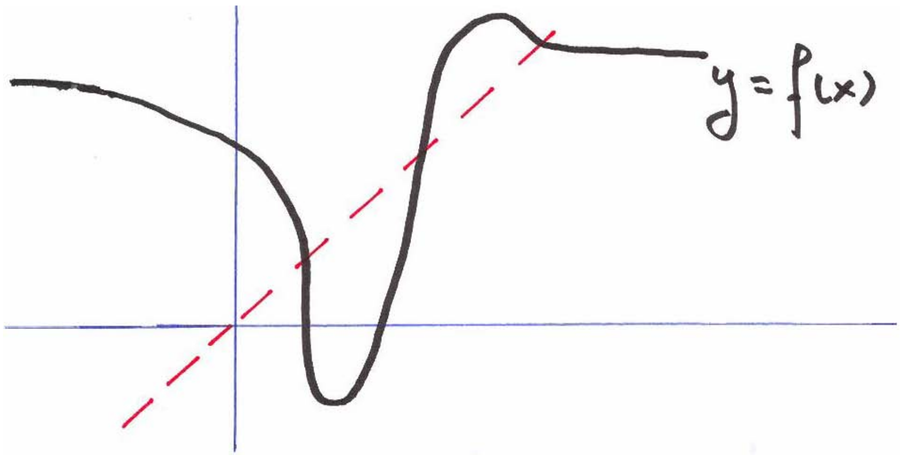
1. Considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = a + bx_n + cx_n^2$$

donde a, b y c son parámetros reales. Determina los valores de estos parámetros para que se satisfaga cada una de las siguientes situaciones:

   i) $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ es una solución.
   ii) $\{3, 3, 3, 3, \dots\}$ es una solución estable asintóticamente.
   iii) $\{3, 1, -1, 3, 1, -1, \dots\}$ es un 3-ciclo.

2. Considera la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$ con $f(x)$ dada por la siguiente gráfica:



Determina los puntos fijos y estudia la estabilidad en cada uno de ellos.

3. La dinámica de una determinada especie responde a la siguiente ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = x_n e^{1-x_n}.$$

Responde, de forma justificada, a las siguientes cuestiones:

   i) ¿Cuáles son los puntos de equilibrio?
   ii) ¿Cómo son los puntos de equilibrio con respecto a la estabilidad?

4. Considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$$

donde λ es un parámetro real.

   i) Comprueba que $x = 0$ es un punto fijo para cualquier valor de λ.
   ii) Determina la estabilidad de $x = 0$ según los valores de λ.

5. Para una cierta especie se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad vienen dadas por

$$f(P) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad m(P) = 1 - \frac{1}{1+P}$$

respectivamente.

i) Determina la ecuación en diferencias que rige la dinámica de dicha población.

ii) Calcula los puntos de equilibrio de la ecuación en diferencias obtenida.

iii) Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio calculados .

iv) Haz algunas interpretaciones sobre el comportamiento de nuestra especie a largo plazo a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

6. Para una cierta especie se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad vienen dadas por

$$f(P) = \frac{\lambda^2}{P^3 + \lambda P} \quad \text{y} \quad m(P) = \frac{\lambda P}{P^3 + \lambda P}$$

respectivamente, siendo $\lambda \geq 0$ un parámetro dependiente de las condiciones del hábitat.

i) Comprueba que la dinámica de la especie viene dada por la familia de ecuaciones en diferencias:

$$P_{n+1} = \frac{P_n^3 + \lambda^2}{P_n^2 + \lambda}, \quad \lambda \geq 0.$$

ii) Determina los puntos de equilibrio para cada ecuación de la familia.

iii) Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio calculados en el apartado anterior.

iv) Haz algunas interpretaciones sobre el comportamiento de nuestra especie a largo plazo, según los valores de λ, a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Fundamentos de Biología Aplicada I - (Ldo. en Biología. Cuarto Curso)

Relación de ejercicios N$^{\underline{o}}$ 2. Curso 2004-2005.

1. Decide, en cada caso, si el vector v es vector propio de la matriz dada:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

   b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 11/2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -30 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix}.$

2. Sea una matriz $A \in \mathfrak{M}_{2\times 2}$ tal que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ son sus valores propios con vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ respectivamente. Calcula A.

3. Una población se estructura en dos grupos de edad (G_1 y G_2). La tasa de fecundidad de G_1 es 2 y la de G_2 es 6. Además, la tasa de supervivencia para G_1 es $0'5$. Determina la matriz de Leslie L para esta población, calcula L^n y decide qué ocurre con la población a largo plazo.

4. Interpreta el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0'3 & 0'5 \\ 0'4 & 0 & 0'5 \\ 0'6 & 0'7 & 0 \end{pmatrix} P_n.$$

5. En un modelo de Leslie, $X_{n+1} = LX_n$, la población está dividida en dos grupos de edad, G_1 y G_2. La matriz de Leslie es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) ¿Cuáles son las tasas de fertilidad? ¿Y las tasas de supervivencia?

   b) Se supone que la población inicial está dada por $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcula la población tras dos periodos.

6. Un carácter autosómico de la mandrágora presenta los genotipos AA, Aa y aa. Un feliz hortelano, que se dedica al cultivo de esta planta, decide fecundar todas las mandrágoras de su plantación con genotipo mixto Aa. Construye un modelo matricial que explique la evolución a lo largo de las generaciones.

7. La dinámica de una población, dividida en cuatro grupos de edad, viene dada por la ecuación $X_{n+1} = LX_n$, donde L es una matriz de Leslie con valor propio dominante $\lambda = 1'3$ y vector propio dominante $v = (2, 4, 3, 1)^T$.

   a) ¿Qué puedes decir sobre el aumento o disminución de la población total a largo plazo?

   b) ¿Qué puedes decir sobre la distribución por grupos de la población a largo plazo?

   c) Esboza la pirámide de edades.

8. Es sabido que la Minimus Mariis sólo tiene flores de tres colores: azul (AA), verde (Aa) y amarillo (aa). Flora Belloparque diseña el siguiente programa de fecundación para su jardín:

- Las flores azules (AA) se fecundan con polen de flores amarillas (aa).
- Las flores verdes (Aa) se fecundan con polen de flores verdes (Aa).
- Las flores amarillas (aa) se fecundan con polen de flores azules (AA).

Según las investigaciones de J. Selbor, una de las dos siguientes matrices es la matriz de transición para este experimento:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

a) Razona, de manera justificada, qué matriz debe escoger Flora.

b) La matriz obtenida en el apartado anterior es de probabilidad y ergódica. Flora sabe que en estos casos $\lambda = 1$ es el valor propio dominante. A partir de aquí, justifica cuál será el vector de proporción para este experimento, esto es, qué proporción de cada color tendrá Flora en su jardín a largo plazo.

9. En un modelo de Leslie, $X_{n+1} = LX_n$, la población está dividida en tres grupos de edad (G_1, G_2 y G_3). La matriz de Leslie es

$$\begin{pmatrix} 0'2 & 0'5 & 0 \\ 0'4 & 0 & 0 \\ 0 & 0'3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuál es la tasa de supervivencia de G_1 a G_2?

b) ¿Cuál es la tasa de supervivencia de G_2 a G_3?

c) ¿Cuál es la tasa de supervivencia de G_1 a G_3?

10. Considera el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0'7 & 0'7 \\ 0'3 & 0'3 \end{pmatrix} P_n.$$

a) Plantea una situación real que se ajuste a esta ecuación en diferencias.

b) Comprueba, de manera justificada, que el vector $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz asociada al sistema.

c) Determina, de manera justificada, cuál es el valor propio asociado al vector dado en b).

d) Sabiendo que la matriz asociada al sistema es de probabilidad y ergódica, haz una interpretación, para la situación propuesta en a), de los elementos calculados en los apartados b) y c).

Fundamentos de Biología Aplicada I - (Ldo. en Biología. Cuarto Curso)

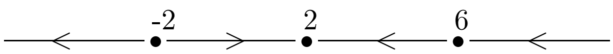
Relación de ejercicios N$^{\underline{o}}$ 3. Curso 2004-2005.

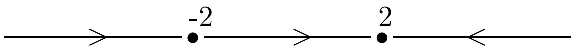
1. Determina el retrato de fases para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales autónomas.

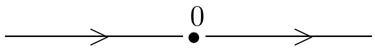
   a) $x' = x(4-x)$ *b*) $x' = x^2(4-x)$ *c*) $x' = x(4-x)^2$ *d*) $x' = \operatorname{sen} x$

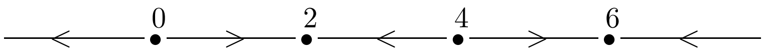
   Estudia, en cada caso, las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio.

2. Reconstruye la gráfica de la soluciones de la ecuación $x' = f(x)$ según el retrato de fases dado.

   a) 

   b) 

   c) 

   d) 

   Explica que puntos de equilibrio hay en cada caso y cuáles son sus propiedades de estabilidad.

3. Esboza el retrato de fases para los siguientes sistemas correspondientes a modelos de interacción entre especies de tipo antagonismo.

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-y)x \\ y' = (-3+x)y \end{array}\right\}$ *b*) $\left.\begin{array}{l} x' = (3-x-y)x \\ y' = (1+x-y)y \end{array}\right\}$ *c*) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-x-y)x \\ y' = (-1+2x-y)y \end{array}\right\}$

   d) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-x-y)x \\ y' = (-1+x)y \end{array}\right\}$ *e*) $\left.\begin{array}{l} x' = (-3+3x-y)x \\ y' = (1+x-y)y \end{array}\right\}$

   Realiza un análisis de los resultados obtenidos.

4. Ejercicio análogo al anterior para los siguientes modelos de competición.

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (3-2x-y)x \\ y' = (2-3x-4y)y \end{array}\right\}$ *b*) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-x-y)x \\ y' = (3-2x-y)y \end{array}\right\}$ *c*) $\left.\begin{array}{l} x' = (3-2x-y)x \\ y' = (2-x-y)y \end{array}\right\}$

   d) $\left.\begin{array}{l} x' = (3-2x-y)x \\ y' = (6-4x-2y)y \end{array}\right\}$

5. Ejercicio análogo al primero para los siguientes modelos de cooperación (mutualismo).

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (4-2x+y)x \\ y' = (3+x-3y)y \end{array}\right\}$ *b*) $\left.\begin{array}{l} x' = (-1-x+y)x \\ y' = (3+x-2y)y \end{array}\right\}$ *c*) $\left.\begin{array}{l} x' = (-x+y)x \\ y' = (1+2x-y)y \end{array}\right\}$

   d) $\left.\begin{array}{l} x' = (-8+4x+y)x \\ y' = (2+2x-y)y \end{array}\right\}$ *e*) $\left.\begin{array}{l} x' = (-1-x+2y)x \\ y' = (-1+2x-y)y \end{array}\right\}$ *f*) $\left.\begin{array}{l} x' = (-x+y)x \\ y' = (x-y)y \end{array}\right\}$

6. Ejercicio análogo al primero para los siguientes modelos.

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-x)x \\ y' = (1-y)y \end{array}\right\}$ *b*) $\left.\begin{array}{l} x' = (1-x)x \\ y' = (2-x-y)y \end{array}\right\}$ *c*) $\left.\begin{array}{l} x' = (1-x+y)x \\ y' = (1-y)y \end{array}\right\}$