Fundamentos de Biología Aplicada I - (Ldo. en Biología. Cuarto Curso)

Relación de ejercicios Nº 1. Curso 2006-2007.

1. *Considera la ecuación en diferencias*

$$x_{n+1} = a + bx_n + cx_n^2$$

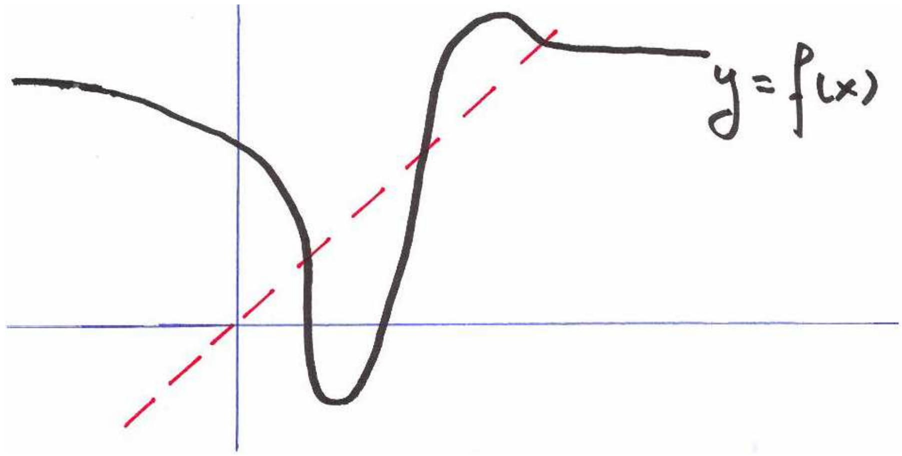
donde a, b y c son parámetros reales. Determina los valores de estos parámetros para que se satisfaga cada una de las siguientes situaciones:

i) $\{0, 1, 2, 5, \ldots\}$ *es una solución.*

ii) $\{1, 1, 1, 1, \ldots\}$ *es una solución estable asintóticamente.*

iii) $\{3, 1, 2, 3, 1, 2, \ldots\}$ *es un 3-ciclo.*

2. *Considera la ecuación en diferencias* $x_{n+1} = f(x_n)$ *con* $f(x)$ *dada por la siguiente gráfica:*



Determina los puntos fijos y estudia la estabilidad en cada uno de ellos.

3. *Considera la ecuación en diferencias*

$$P_{n+1} = P_n e^{P_n - 1}.$$

i) Calcula las soluciones constantes de la ecuación.

ii) Estudia la estabilidad de los puntos fijos asociados a las soluciones calculadas en el apartado anterior.

4. *Considera la familia de ecuaciones en diferencias*

$$x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$$

donde λ *es un parámetro real.*

i) Para cada valor de λ*, ¿cuáles son los puntos fijos?*

ii) Para cada valor de λ*, ¿cómo son los puntos fijos con respecto a la estabilidad?*

iii) Realiza un estudio gráfico de la estabilidad cuando el valor absoluto de la derivada sea igual a 1.

5. *Para una cierta especie se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad vienen dadas por*

$$f(P) = \frac{1}{2} \quad y \quad m(P) = 1 - \frac{1}{1+P}$$

respectivamente.

   i) *Determina la ecuación en diferencias que rige la dinámica de dicha población.*

   ii) *Calcula las soluciones constantes de la ecuación en diferencias obtenida.*

   iii) *Estudia la estabilidad de los puntos fijos asociados a las soluciones constantes calculadas en el apartado anterior.*

   iv) *Haz alguna interpretación sobre el comportamiento de la especie a largo plazo a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.*

6. *Para una determinada especie de gamos se considera que P es la proporción de individuos que como máximo pueden pertenecer a un hábitat concreto (esto es, $P = 0$ indica que no hay gamos, $P = 1$ indica que no caben más gamos). Además, se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad son, respectivamente, las siguientes:*

$$f(P) = \frac{4a}{25}(1-P) \quad y \quad m(P) = 1 - \frac{a}{25} + \frac{a}{25}P,$$

siendo a un número real comprendido entre 5 y 15.

   a) *Comprueba, de manera justificada, que la ecuación en diferencias que rige la dinámica de dicha población viene dada por la expresión:*

$$P_{n+1} = \frac{a}{5}P_n(1-P_n).$$

   b) *Calcula las soluciones constantes de la ecuación en diferencias obtenida.*

   c) *Estudia la estabilidad de los puntos fijos asociados a las soluciones constantes calculadas en el apartado anterior.*

   d) *Haz alguna interpretación sobre el comportamiento de la especie a largo plazo a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.*

7. *Para una cierta especie se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad vienen dadas por*

$$f(P) = \frac{\lambda^2}{P^3 + \lambda P} \quad y \quad m(P) = \frac{\lambda P}{P^3 + \lambda P}$$

respectivamente, siendo $\lambda \geq 0$ un parámetro dependiente de las condiciones del hábitat.

   i) *Comprueba que la dinámica de la especie viene dada por la familia de ecuaciones en diferencias:*

$$P_{n+1} = \frac{P_n^3 + \lambda^2}{P_n^2 + \lambda}, \quad \lambda \geq 0.$$

   ii) *Determina las soluciones constantes para cada ecuación de la familia.*

   iii) *Para cada ecuación de la familia, estudia la estabilidad de los puntos fijos asociados a las soluciones constantes calculadas en el apartado anterior.*

   iv) *Haz alguna interpretación sobre el comportamiento de la especie a largo plazo, según los valores de λ, a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.*

Fundamentos de Biología Aplicada I - (Ldo. en Biología. Cuarto Curso)

Relación de ejercicios Nº 2. Curso 2006-2007.

1. *Decide si las siguientes matrices admiten inversa. En caso afirmativo, calcula dicha inversa.*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. *Decide, en cada caso, si el vector v es vector propio de la matriz dada:*

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

   b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 11/2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -30 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix}.$

3. *Sea una matriz $A \in \mathfrak{M}_{2\times 2}$ tal que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ son sus valores propios con vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ respectivamente. Calcula A.*

4. *Una población se estructura en dos grupos de edad (G_1 y G_2). La tasa de fecundidad de G_1 es 2 y la de G_2 es 6. Además, la tasa de supervivencia para G_1 es $0'5$. Determina la matriz de Leslie L para esta población, calcula L^n y decide qué ocurre con la población a largo plazo.*

5. *Interpreta, desde un punto de vista biológico, el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias*

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0'3 & 0'5 \\ 0'4 & 0 & 0'5 \\ 0'6 & 0'7 & 0 \end{pmatrix} P_n.$$

6. *En un modelo de Leslie, $X_{n+1} = LX_n$, la población está dividida en dos grupos de edad, G_1 y G_2. La matriz de Leslie es*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) *¿Cuáles son las tasas de fertilidad? ¿Y las tasas de supervivencia?*

   b) *Se supone que la población inicial está dada por $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcula la población tras dos periodos.*

7. *Un carácter autosómico de la mandrágora presenta los fenotipos AA, Aa y aa. Un feliz hortelano, que se dedica al cultivo de esta planta, decide polinizar todas las mandrágoras de su plantación con genotipo mixto Aa. Construye un modelo matricial que explique la evolución a lo largo de las generaciones.*

8. *La dinámica de una población, dividida en cuatro grupos de edad, viene dada por la ecuación $X_{n+1} = LX_n$, donde L es una matriz de Leslie con valor propio dominante $\lambda = 1'3$ y vector propio dominante $v = (2, 4, 3, 1)^T$.*

   a) *¿Qué puedes decir sobre el aumento o disminución de la población total a largo plazo?*
   b) *¿Qué puedes decir sobre la distribución por grupos de la población a largo plazo?*
   c) *Esboza la pirámide de edades.*

9. *Es sabido que la Minimus marii sólo tiene flores de tres colores: azul (AA), verde (Aa) y amarillo (aa). Flora Belloparque diseña el siguiente programa de polinización para su jardín:*

   - *Las flores azules (AA) se fecundan con polen de flores amarillas (aa).*
   - *Las flores verdes (Aa) se fecundan con polen de flores verdes (Aa).*
   - *Las flores amarillas (aa) se fecundan con polen de flores azules (AA).*

   Según las investigaciones de J. Selbor, una de las dos siguientes matrices es la matriz de transición para este experimento:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

   a) *Razona, de manera justificada, qué matriz debe escoger Flora.*
   b) *La matriz obtenida en el apartado anterior es de probabilidad y ergódica. Flora sabe que en estos casos $\lambda = 1$ es el valor propio dominante. A partir de aquí, justifica cuál será el vector de proporción para este experimento, esto es, qué proporción de cada color tendrá Flora en su jardín a largo plazo.*

10. *En un modelo de Leslie, $X_{n+1} = LX_n$, la población está dividida en tres grupos de edad (G_1, G_2 y G_3). La matriz de Leslie es*

$$\begin{pmatrix} 0'2 & 0'5 & 0 \\ 0'4 & 0 & 0 \\ 0 & 0'3 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) *¿Cuál es la tasa de supervivencia de G_1 a G_2?*
   b) *¿Cuál es la tasa de supervivencia de G_2 a G_3?*
   c) *¿Cuál es la tasa de supervivencia de G_1 a G_3?*

11. *Considera el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:*

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0'7 & 0'7 \\ 0'3 & 0'3 \end{pmatrix} P_n.$$

   a) *Plantea una situación real que se ajuste a esta ecuación en diferencias.*
   b) *Comprueba, de manera justificada, que el vector $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz asociada al sistema.*
   c) *Determina, de manera justificada, cuál es el valor propio asociado al vector dado en b).*
   d) *Sabiendo que la matriz asociada al sistema es de probabilidad y ergódica, haz una interpretación, para la situación propuesta en a), de los elementos calculados en los apartados b) y c).*

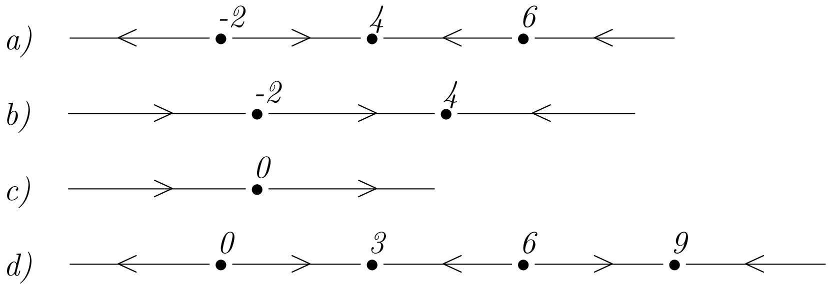
Relación de ejercicios Nº 3. Curso 2006-2007.

1. *Determina el retrato de fases para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales autónomas.*

   a) $x' = x(5-x)$ *b*) $x' = x^2(5-x)$ *c*) $x' = x(5-x)^2$ *d*) $x' = \operatorname{sen} x$

   Estudia, en cada caso, las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio.

2. *Reconstruye la gráfica de la soluciones de la ecuación $x' = f(x)$ según el retrato de fases dado.*



   Explica que puntos de equilibrio hay en cada caso y cuáles son sus propiedades de estabilidad.

3. *Esboza el retrato de fases para los siguientes sistemas correspondientes a modelos de interacción entre especies de tipo antagonismo.*

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (3-x-y)x \\ y' = (1+x-y)y \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-x-y)x \\ y' = (-1+2x-y)y \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x' = (-3+3x-y)x \\ y' = (1+x-y)y \end{array}\right\}$

   Realiza un análisis de los resultados obtenidos.

4. *Ejercicio análogo al anterior para los siguientes modelos de competición.*

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-x-y)x \\ y' = (3-2x-y)y \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x' = (3-2x-y)x \\ y' = (2-x-y)y \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x' = (3-2x-y)x \\ y' = (6-4x-2y)y \end{array}\right\}$

5. *Ejercicio análogo al primero para los siguientes modelos de cooperación (mutualismo).*

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (4-2x+y)x \\ y' = (3+x-3y)y \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x' = (-1-x+y)x \\ y' = (3+x-2y)y \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x' = (-x+y)x \\ y' = (1+2x-y)y \end{array}\right\}$

6. *Ejercicio análogo al primero para los siguientes modelos.*

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-x)x \\ y' = (1-y)y \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x' = (1-x)x \\ y' = (2-x-y)y \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x' = (1-x+y)x \\ y' = (1-y)y \end{array}\right\}$