Fundamentos de Biología Aplicada I - (Ldo. en Biología. Cuarto Curso)

Relación de ejercicios Nº 1. Curso 2007-2008.

1. *Considera la ecuación en diferencias*

$$x_{n+1} = ax_n(b - x_n)$$

donde a, b y c son parámetros reales. Determina los valores de estos parámetros para que se satisfaga cada una de las siguientes situaciones:

i) $\{1, 2, 3, \ldots\}$ *es una solución.*

ii) $\{1, 1, 1, 1, \ldots\}$ *es una solución estable asintóticamente.*

iii) $\{3, 1, 3, 1, \ldots\}$ *es un 2-ciclo.*

2. *Determina, justificadamente, si las siguientes sucesiones pueden ser solución de una ecuación en diferencias:*

i) $\{1, 2, 4, 7, \ldots\}$.

ii) $\{1, 2, 3, 1, 4, \ldots\}$.

iii) $\{3, 1, 2, 4, 6, 3, 1, 2, 4, 6, \ldots\}$.

3. *Considera la ecuación en diferencias*

$$P_{n+1} = P_n e^{P_n - 2}.$$

i) Calcula las soluciones constantes de la ecuación.

ii) Estudia la estabilidad de los puntos fijos asociados a las soluciones calculadas en el apartado anterior.

4. *Considera la familia de ecuaciones en diferencias*

$$x_{n+1} = (\lambda - x_n)x_n$$

donde λ *es un parámetro real.*

i) Para cada valor de λ*, ¿cuáles son los puntos fijos?*

ii) Para cada valor de λ*, ¿cómo son los puntos fijos con respecto a la estabilidad?*

iii) Realiza un estudio gráfico de la estabilidad cuando el valor absoluto de la derivada sea igual a 1.

5. *Repite el ejercicio anterior para la ecuación en diferencias*

$$x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n.$$

6. *Para una cierta especie se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad vienen dadas por*

$$f(P) = \frac{1}{2} \quad y \quad m(P) = 1 - \frac{1}{1+P}$$

respectivamente.

   i) *Determina la ecuación en diferencias que rige la dinámica de dicha población.*
   ii) *Calcula las soluciones constantes de la ecuación en diferencias obtenida.*
   iii) *Estudia la estabilidad de los puntos fijos asociados a las soluciones constantes calculadas en el apartado anterior.*
   iv) *Haz alguna interpretación sobre el comportamiento de la especie a largo plazo a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.*

7. *Para una determinada especie de gamos se considera que P es la proporción de individuos que como máximo pueden pertenecer a un hábitat concreto (esto es, $P = 0$ indica que no hay gamos, $P = 1$ indica que no caben más gamos). Además, se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad son, respectivamente, las siguientes:*

$$f(P) = \frac{3a}{8}(1-P) \quad y \quad m(P) = 1 - \frac{a}{8} + \frac{a}{8}P,$$

siendo a un número real comprendido entre 2 y 6.

   a) *Comprueba, de manera justificada, que la ecuación en diferencias que rige la dinámica de dicha población viene dada por la expresión:*

$$P_{n+1} = \frac{a}{2}P_n(1-P_n).$$

   b) *Calcula las soluciones constantes de la ecuación en diferencias obtenida.*
   c) *Estudia la estabilidad de los puntos fijos asociados a las soluciones constantes calculadas en el apartado anterior.*
   d) *Haz alguna interpretación sobre el comportamiento de la especie a largo plazo a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.*

8. *Para una cierta especie se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad vienen dadas por*

$$f(P) = \frac{\lambda^2}{P^2+\lambda^2} \quad y \quad m(P) = \frac{\lambda P}{P^2+\lambda^2}$$

respectivamente, siendo $\lambda \geq 0$ un parámetro dependiente de las condiciones del hábitat.

   i) *Comprueba que la dinámica de la especie viene dada por la familia de ecuaciones en diferencias:*

$$P_{n+1} = \frac{P_n^2 - \lambda P_n + 2\lambda^2}{P_n^2+\lambda^2}P_n, \quad \lambda \geq 0.$$

   ii) *Determina las soluciones constantes para cada ecuación de la familia.*
   iii) *Para cada ecuación de la familia, estudia la estabilidad de los puntos fijos asociados a las soluciones constantes calculadas en el apartado anterior.*
   iv) *Haz alguna interpretación sobre el comportamiento de la especie a largo plazo, según los valores de λ, a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.*

Fundamentos de Biología Aplicada I - (Ldo. en Biología. Cuarto Curso)

Relación de ejercicios Nº 2. Curso 2007-2008.

1. *Decide si las siguientes matrices admiten inversa. En caso afirmativo, calcula dicha inversa.*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -9 & -18 & 26 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

2. *Decide, en cada caso, si el vector v es vector propio de la matriz dada:*

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 0 & 34 & 6 \\ 0 & -6 & 71 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/8 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

3. *Sea una matriz $A \in \mathfrak{M}_{2\times 2}$ tal que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$ son sus valores propios con vectores propios $v_1 = (1,-2)^T$ y $v_2 = (1,0)^T$ respectivamente. Calcula A.*

4. *En un modelo de Leslie, $X_{n+1} = LX_n$, la población está dividida en tres grupos de edad (G_1, G_2 y G_3). La matriz de Leslie es*

$$\begin{pmatrix} 0'1 & 0'9 & 0'2 \\ 0'4 & 0 & 0 \\ 0 & 0'3 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) *¿Cuál es la tasa de supervivencia de G_1 a G_2?*
   b) *¿Cuál es la tasa de supervivencia de G_2 a G_3?*
   c) *¿Cuál es la tasa de supervivencia de G_1 a G_3?*
   d) *¿Cuáles son las tasas de fertilidad?*
   e) *Se supone que la población inicial está dada por $X_0 = (10, 20, 15)^T$. Calcula la población tras dos periodos.*

5. *Una población se estructura en dos grupos de edad (G_1 y G_2). La tasa de fecundidad de G_1 es 1'2 y la de G_2 es 2'3. Además, la tasa de supervivencia para G_1 es $0'6$. Determina la matriz de Leslie L para esta población y decide qué ocurrirá con la población a largo plazo. (Sugerencia: método de las potencias)*

6. *La dinámica de una población, dividida en cuatro grupos de edad, viene dada por la ecuación $X_{n+1} = LX_n$, donde L es una matriz de Leslie con valor propio dominante $\lambda = 1'01$ y vector propio dominante $v = (2,3,4,1)^T$.*

   a) *¿Qué puedes decir sobre el aumento o disminución de la población total a largo plazo?*
   b) *¿Qué puedes decir sobre la distribución por grupos de la población a largo plazo?*
   c) *Esboza la pirámide de edades.*

7. *Interpreta, desde un punto de vista biológico, el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias*

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0'3 & 0'5 \\ 0'4 & 0 & 0'5 \\ 0'6 & 0'7 & 0 \end{pmatrix} P_n.$$

8. *Una determinada planta puede presentar flores de uno de estos tres colores: azul* (AA), *verde* (Aa) *y amarillo* (aa). *Considera el siguiente programa de polinización:*

   - *Las plantas de flores azules* (AA) *se fecundan con polen de flores amarillas* (aa).
   - *Las plantas de flores verdes* (Aa) *se fecundan con polen de flores verdes* (Aa).
   - *Las plantas de flores amarillas* (aa) *se fecundan con polen de flores azules* (AA).

   Se pide que

   a) *calcules la matriz de transición de dicho diseño.*

   b) *sabiendo que la matriz obtenida en el apartado anterior es de probabilidad y ergódica, justifiques cuál será el vector de proporción para este experimento, esto es, qué proporción de cada color se dará a largo plazo.*

9. *Considera el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:*

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0'35 & 0'52 \\ 0'65 & 0'48 \end{pmatrix} P_n.$$

   a) *Plantea una situación real que se ajuste a esta ecuación en diferencias.*

   b) *Comprueba, de manera justificada, que el vector* $v = (4,5)^T$ *es un vector propio de la matriz asociada al sistema.*

   c) *Determina, de manera justificada, cuál es el valor propio asociado al vector dado en b).*

   d) *Sabiendo que la matriz asociada al sistema es de probabilidad y ergódica, haz una interpretación, para la situación propuesta en a), de los elementos calculados en los apartados b) y c).*

10. *En una población distribuida por edades se observa la siguiente evolución del número de individuos*

Año de recuento	*1992*	*1997*	*2002*	*2007*
Crías (0-5 años)	*4260*	*2285*	*1225*	*657*
Jóvenes (5-10 años)	*2385*	*1280*	*685*	*367*
Adultos (10-15 años)	*2223*	*1190*	*640*	*343*

   a) *Estima el valor propio dominante de la matriz de Leslie asociada al modelo de evolución.*

   b) *Estima un vector propio dominante de la matriz de Leslie asociada al modelo de evolución.*

   c) *Explica, detalladamente, como calcular una matriz de Leslie compatible con la tabla.*

Fundamentos de Biología Aplicada I - (Ldo. en Biología. Cuarto Curso)

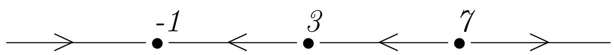
Relación de ejercicios Nº 3. Curso 2007-2008.

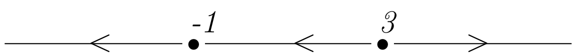
1. *Determina el retrato de fases para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales autónomas.*

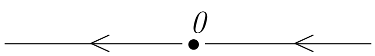
   a) $x' = x(7-x)$ b) $x' = x^2(7-x)$ c) $x' = x(7-x)^2$ d) $x' = \cos x$

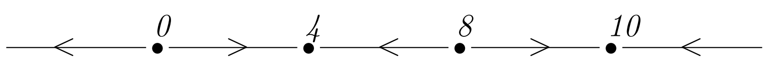
   Estudia, en cada caso, las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio.

2. *Reconstruye la gráfica de la soluciones de la ecuación $x' = f(x)$ según el retrato de fases dado.*

   a) 

   b) 

   c) 

   d) 

   Indica los puntos de equilibrio en cada caso y estudia la estabilidad de dichos puntos.

3. *Esboza el retrato de fases para los siguientes sistemas correspondientes a modelos de interacción entre especies de tipo antagonismo.*

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (3-x-y)x \\ y' = (1+x-y)y \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-x-y)x \\ y' = (-1+2x-y)y \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x' = (-3+3x-y)x \\ y' = (1+x-y)y \end{array}\right\}$

   Realiza un análisis de los resultados obtenidos.

4. *Ejercicio análogo al anterior para los siguientes modelos de competición.*

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-x-y)x \\ y' = (3-2x-y)y \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x' = (3-2x-y)x \\ y' = (2-x-y)y \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x' = (3-2x-y)x \\ y' = (6-4x-2y)y \end{array}\right\}$

5. *Ejercicio análogo al primero para los siguientes modelos de cooperación (mutualismo).*

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (4-2x+y)x \\ y' = (3+x-3y)y \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x' = (-1-x+y)x \\ y' = (3+x-2y)y \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x' = (-x+y)x \\ y' = (1+2x-y)y \end{array}\right\}$

6. *Ejercicio análogo al primero para los siguientes modelos.*

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-x)x \\ y' = (1-y)y \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x' = (1-x)x \\ y' = (2-x-y)y \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x' = (1-x+y)x \\ y' = (1-y)y \end{array}\right\}$