Práctica 2.- Análisis empírico de la logística discreta

Vamos a estudiar la ecuación en diferencias dada por la expresión

$$x_{n+1} = A x_n (1 - x_n).$$ Ejercicio 5 de la Rel. 1 (2007-2008)

Veremos como la dinámica se complica cuando A varía desde 0 hasta 4.

Justificaciones del modelo

1) Considero P_n = población en el instante n.

- $P_{n+1} = P_n + \text{Nacimientos} - \text{Muertes}$
- $\text{Nacimientos} = f(P_n) \cdot P_n$ con f función decreciente
  $f(P) = a - bP$
- $\text{Muertes} = m(P_n) \cdot P_n$ con m función creciente ($y \leq 1$)
  $m(P) = c + dP$ (≤ 1!!)

A partir de aquí:

$$P_{n+1} = P_n + (a - bP_n) \cdot P_n - (c + dP_n) P_n \Rightarrow$$

$$P_{n+1} = (1 + a - c) P_n \left[1 - \frac{b+d}{1+a-c} P_n \right]$$

Haciendo el cambio $x = \frac{b+d}{1+a-c} P$ y tomando $A = 1+a-c$, llegamos a

$$x_{n+1} = A x_n (1 - x_n)$$

2) Considero x_n = tanto por uno (del máximo posible de la población) en el instante n.

Tomo $f(x) = a(1-x)$ y $m(x) = 1$ $\forall x \in [0, 1]$.

Estamos suponiendo f decreciente y $m \equiv 1$ implica que nada sobrevive al siguiente recuento.

Así,

$$x_{n+1} = x_n + a(1-x_n)x_n - x_n \Rightarrow x_{n+1} = a(1-x_n)x_n .$$

3) x_n y $f(x)$ como en el caso anterior. En cuanto a m tomamos $m(x) = (1-b)x + b$ con $0 < b < 1$ (función creciente). En este caso:

$$x_{n+1} = x_n + a(1-x_n)x_n - [(1-b)x_n + b]x_n \Rightarrow$$

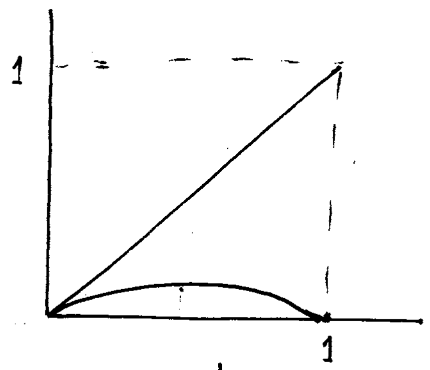
$$x_{n+1} = \underbrace{(1+a-b)}_{A}(1-x_n)x_n$$

Rango de A

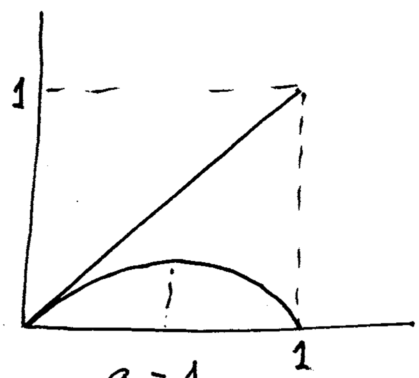
Como queremos que la ecuación

$$x_{n+1} = A\, x_n (1 - x_n)$$

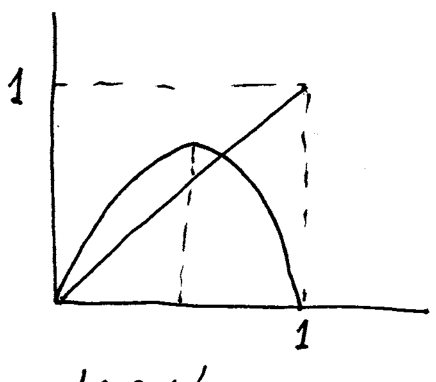
tenga sentido biológico, es necesario que x_n varíe entre 0 y 1. Para ello se tiene que verificar que $0 \leq A \leq 4$.



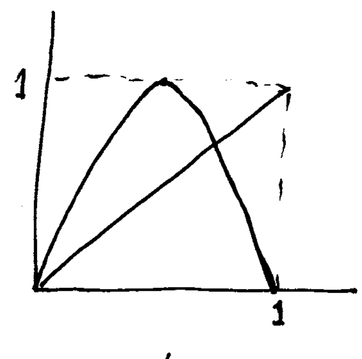
$0 < a < 1$



$a = 1$



$1 < a < 4$



$a = 4$

Puntos fijos

$0 < A \leq 1 \Rightarrow \alpha = 0$ único punto fijo no negativo

$A > 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 - \frac{1}{A} = \frac{A-1}{A} \end{cases}$

Dinámica

$0 < A \leq 1 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

$1 < A \leq 2 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{A}$ (en escalera)

$2 < A \leq 3 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{A}$ (en tela de araña)
(visible a partir de 2.4)

$3 < A < 3.45 \Rightarrow \{x_n\}$ va a 2-ciclo

$3.45 < A < 3.54 \Rightarrow \{x_n\}$ va a 4-ciclo

3.45, 3.54 son valores aproximados

$A > 3.54 \Rightarrow$ Se complica la situación

Todo esto se ve en el diagrama de bifurcación.

Efecto mariposa

$A = 3.2$

Solución constante: 0'6875

$x_0 = 0'68750000000001$ se va al 2-ciclo

Situaciones variadas

1) $A = 3'475702 \Rightarrow$ El 2-ciclo no es atractor

$$0'853762163591213 \rightleftarrows 0'433949498685933$$

Si se muestran sólo 200 puntos y avanzamos de uno en uno hasta 150 veces no hay ningún cambio. Sin embargo, se acaba en un 4-ciclo como se puede comprobar si pintamos 1000 puntos.

2) $A = 3'83$

3-ciclo atractor en $x_0 = 0'957416597518873$

3-ciclo inestable en $x_0 = 0'955293823446629$

Empezar en ventanas simultáneas con 0'955290, 0'955291, 0'955292, 0'955293.

3) $A = 3'845$

6-ciclo atractor en $x_0 = 0'961246677475987$

4) $A = 3'9$

Todos inestables

- Sol. cte: $0'\overline{743589}$
- 2-ciclo: $0'\overline{897435}$ $0'\overline{358974}$
- 3-ciclo: 0'964743511534365
- 3-ciclo: 0'951213177643578 } Son diferentes
- 4-ciclo: 0'919299855102863
- 5-ciclo: 0'941867775655449

Definición de Caos

Actualmente no hay una definición aceptada por todos sobre que es el caos. Una de las definiciones más considerada se debe a Robert Devaney. Según él las condiciones para la existencia del caos (adaptadas a nuestro caso) son:

i) existencia de infinitos n-ciclos con n tan grande como se desee;

ii) existencia de una órbita densa, esto es, existencia de una sucesión que está cerca de dos n-ciclos de i);

iii) presencia del efecto mariposa: si se parte de dos condiciones iniciales parecidas pero no iguales, las soluciones que generan se separarán a partir de un momento y no se acercarán "mucho" nunca más.