

# Práctica. - Modelos de interrelación entre especies

+	o	-	
+	Mutualismo	Comensalismo	Antagonismo
o	Comensalismo	Neutralismo	Ameusalismo
-	Antagonismo	Ameusalismo	Competencia

---

Programa de la red. - Introducción de ecuaciones

Rango de  $x, y, t$   
Ver curvas

Programa de Juan. - Introducción de ecuaciones

Ajuste de  $x, y, t$   
Ver curvas

---

Ejemplos de ecuaciones ordinarias:

- Malthus:  $x' = rx$       $x' = 0.2 * x$

- Verhulst (Logística):  $x' = rx(1 - \frac{x}{K})$       $x' = 0.2 * x * (1 - \frac{x}{6})$

- Gompertz:  $x' = rx \ln \frac{K}{x}$       $x' = 0.2 * x * \log(\frac{6}{x})$

- von Bertalanffy:  $x' = r(K - x)$       $x' = 0.2 * (6 - x)$

Un primer ejemplo

$$\left. \begin{aligned} x' &= (4-y) \cdot x \\ y' &= (-4+x) \cdot y \end{aligned} \right\}$$

- 1) Buscar equilibrios
- 2) Determinar tiempo de soluciones oscilatorias

Variantes - Efectos de las ctes

$$\left. \begin{aligned} x' &= (4 - \overset{x2}{2}y) \cdot x \\ y' &= (-4 + x) \cdot y \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= (4-y) \cdot x \\ y' &= (-4 + \overset{x2}{2}x) \cdot y \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= (\overset{x1/5}{6} - y) \cdot x \\ y' &= (-4 + x) \cdot y \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= (4-y) \cdot x \\ y' &= (-\overset{x1/5}{6} + x) \cdot y \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= (8-2y) \cdot x \\ y' &= (-8+2x) \cdot y \end{aligned} \right\} \text{ Todos } \times 2$$

# Estudio

$$\left. \begin{aligned} x' &= f(x, y) x \\ y' &= g(x, y) y \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} f(x, y) &= a + bx + cy \\ g(x, y) &= d + ex + fy \end{aligned} \right\}$$

1.- Sols. ctes.

+ Trivials

+ Semi-trivials

+ Sols. ctes. "sin ceros" (Positivas  $\Rightarrow$  Coexistencia)

2.- Poblaciones por separado (Órbitas semi-triviales)  
Sols.

3.- Estudio conjunto

+ Isoclinas de crecimiento cero  
( $f(x, y) = 0 \parallel g(x, y) = 0$ )

+ Retrato de fases

+ Tasa de crecimiento entre  $x$  e  $y$

$$F(x, y) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} = \frac{y'/y}{x'/x}$$

(Campo de direcciones)



# Fundamentos de Biología Aplicada I.

(Módulo de Matemática Aplicada)

## Práctica : Modelos de interrelación entre especies

Nombre y Apellidos: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

1. Explica la diferencia que existe entre los dos modelos siguientes:

$$\begin{array}{l}
 a) \quad \left. \begin{array}{l} x' = (4 - y)x \\ y' = (-4 + x)y \end{array} \right\} \quad b) \quad \left. \begin{array}{l} x' = (8 - 2y)x \\ y' = (-8 + 2x)y \end{array} \right\}
 \end{array}$$

2. Esboza el retrato de fases para el siguiente sistema correspondiente a un modelo de interacción entre especies de tipo antagonismo:

$$a) \quad \left. \begin{array}{l} x' = (3 - x - y)x \\ y' = (1 + x - y)y \end{array} \right\} \quad \text{Rel. n}^\circ 3, 3a$$

Realiza un análisis de los resultados obtenidos.

3. Ejercicio análogo al anterior para el siguiente modelo de competición:

Rel. n° 3,

$$a) \begin{cases} x' = (3 - 2x - y)x \\ y' = (2 - 3x - 4y)y \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Competencia fuerte} \\ \text{Dominancia determinada} \end{array} \right\}$$

$$c) \begin{cases} x' = (3 - 2x - y)x \\ y' = (2 - x - y)y \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Competencia débil} \end{array} \right\}$$

$$b) \begin{cases} x' = (2 - x - y)x \\ y' = (3 - 2x - y)y \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Competencia fuerte} \\ \text{Dominancia indeterminada} \end{array} \right\}$$

4. Ejercicio análogo al segundo para el siguiente modelo de cooperación (mutualismo):

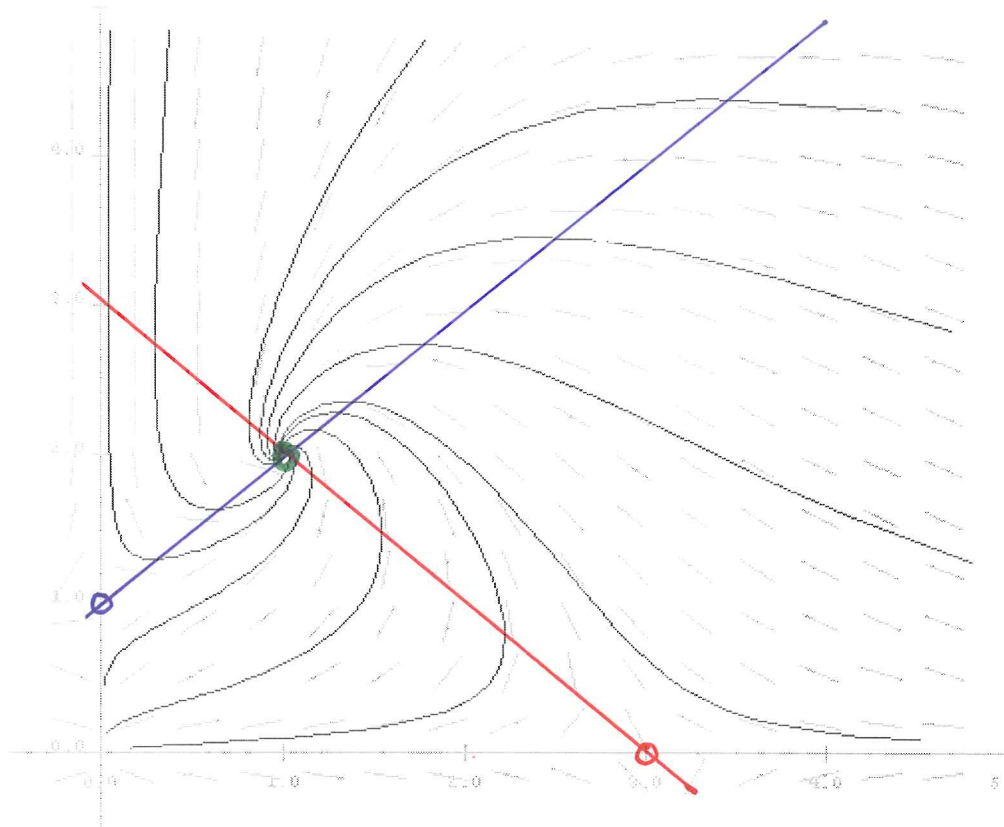
$$a) \begin{cases} x' = (-x + y)x \\ y' = (x - y)y \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Infinitos puntos} \\ \text{de coexistencia} \end{array} \right\}$$

5. Ejercicio análogo al segundo para el siguiente modelo :

$$a) \begin{cases} x' = (1 - x)x \\ y' = (2 - x - y)y \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Amensalismo} \end{array} \right\}$$

$$6) \begin{cases} x' = (-3 + 3x - y)x \\ y' = (1 + x - y)y \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Alde'e en } x \end{array} \right\}$$

2

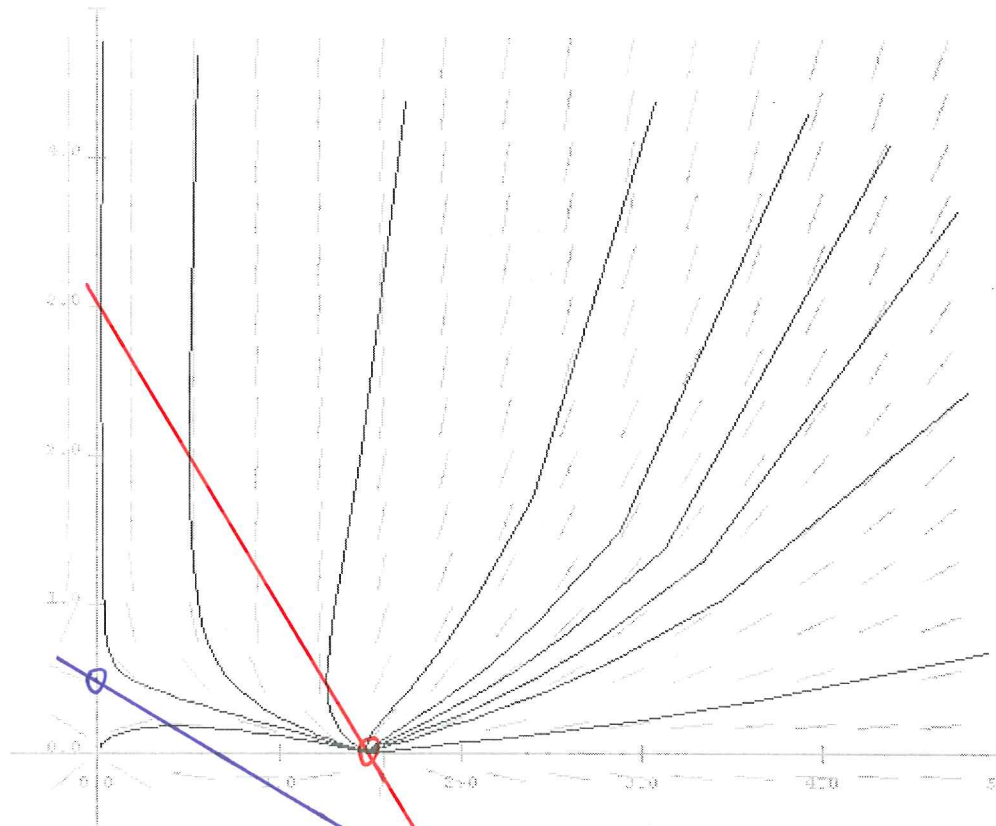


$$x' = (3-x-y)^2x$$

$$y' = (1+x-y)^2y$$

Erase Hide Vectors I.C. Grid Endpoints Print

3a



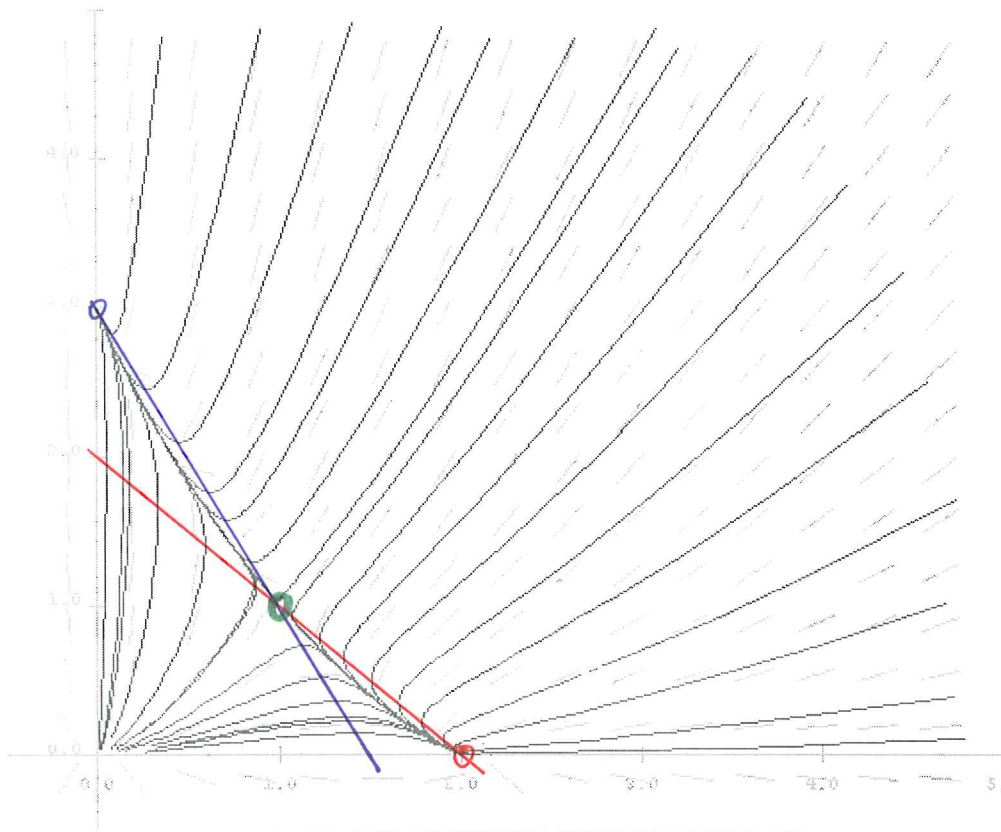
$$x' = (3-2^*x-y)^2x$$

$$y' = (2-3^*x-4^*y)^2y$$

Erase Hide Vectors I.C. Grid Endpoints Print



3b

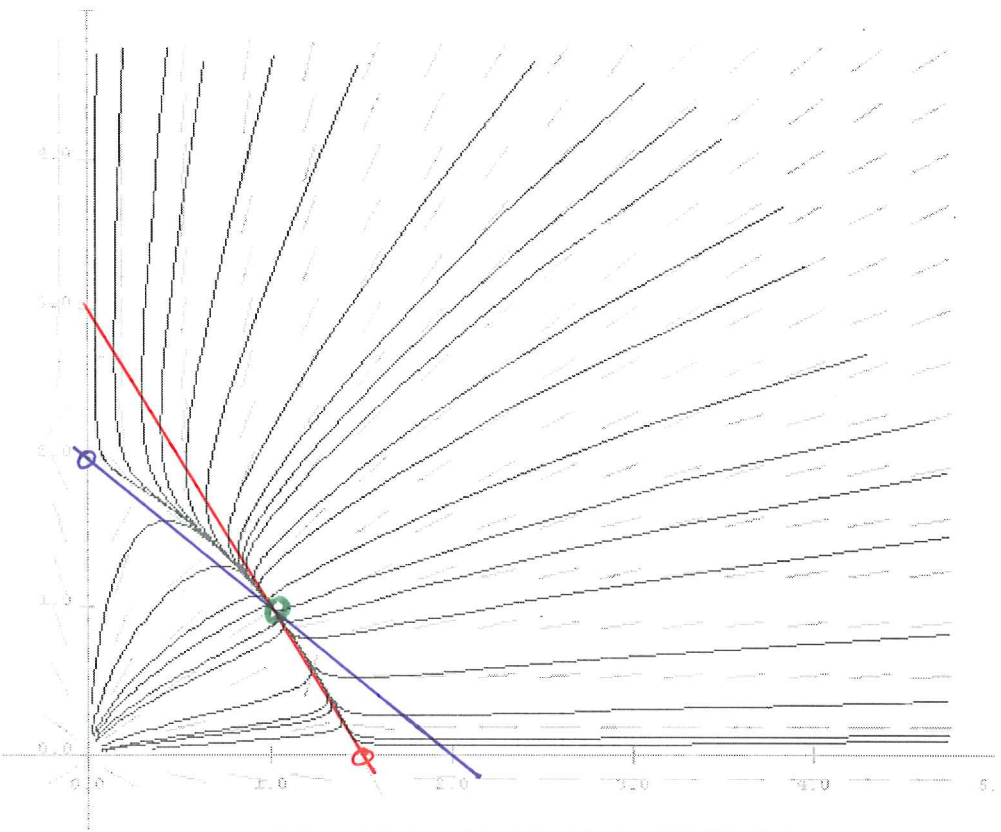


$$x' = (2-x-y)x$$

$$y' = (3-2x-y)y$$

Erase Hide Vectors I.C. Grid Endpoints Print

3c

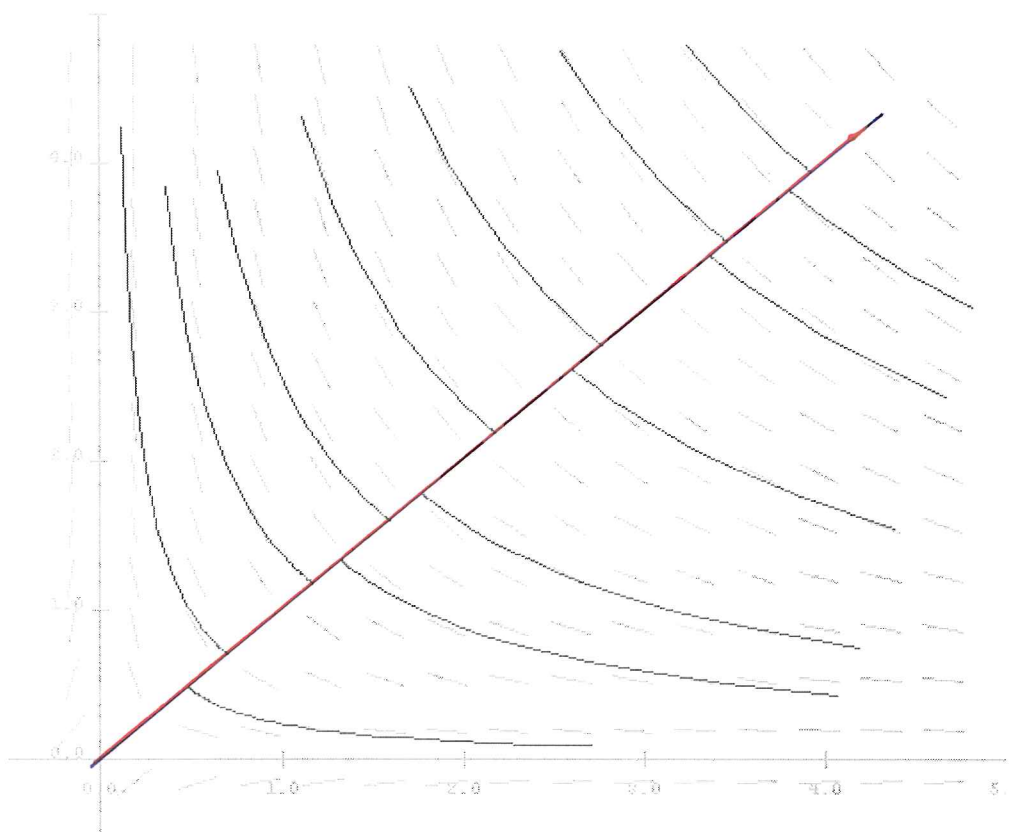


$$x' = (3-2x-y)x$$

$$y' = (2-x-y)y$$

Erase Hide Vectors I.C. Grid Endpoints Print

4

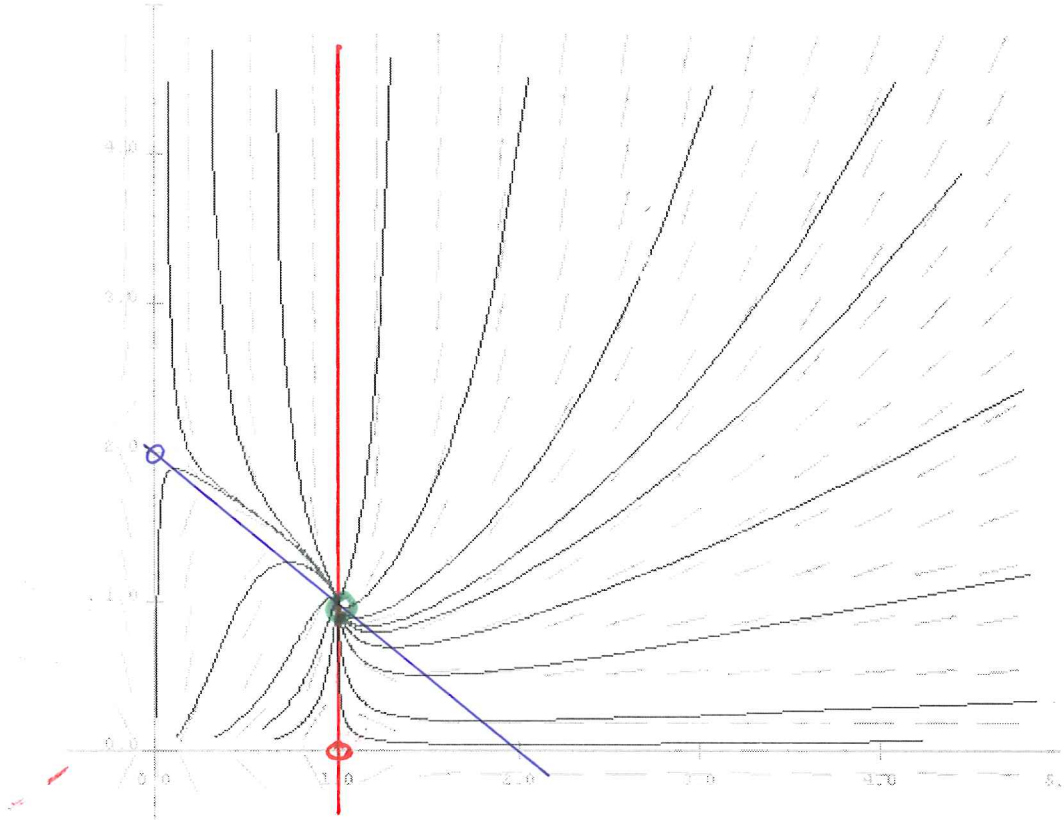


$$x' = (0 - 1 \cdot x + y) \cdot x$$

$$y' = (0 + 1 \cdot x - 1 \cdot y) \cdot y$$

Erase | Hide Vectors | I.C. Grid | Endpoints | Print

5



$$x' = (1 - 1 \cdot x + 0 \cdot y) \cdot x$$

$$y' = (2 - 1 \cdot x - 1 \cdot y) \cdot y$$

Erase | Hide Vectors | I.C. Grid | Endpoints | Print