Práctica.- Análisis empírico de la logística discreta

Vamos a estudiar la ecuación en diferencias dada por la expresión

$$x_{n+1} = A\, x_n (1 - x_n).$$

Veremos como la dinámica se complica cuando hacemos que A varíe desde 0 hasta 4.

Justificaciones del modelo

1) Consideremos P_n = población en el instante n.

- $P_{n+1} = P_n$ + Nacimientos − Muertes
- Nacimientos $= f(P_n) \cdot P_n$ con f función decreciente

  $f(P) = a - bP$
- Muertes $= m(P_n) \cdot P_n$ con m función creciente y acotada por 1

  $m(P) = c + dP \quad (\leq 1 !!)$

A partir de todas estas consideraciones:

$$P_{n+1} = P_n + (a - bP_n) \cdot P_n - (c + dP_n) \cdot P_n \implies$$

$$P_{n+1} = (1 + a - c)\, P_n \left[1 - \frac{b+d}{1+a-c} P_n \right]$$

Si hacemos $x = \frac{b+d}{1+a-c} P$ y tomamos $A = 1+a-c$, llegamos a

$$x_{n+1} = A x_n (1-x_n).$$

2) Consideremos x_n = tanto por uno (del máximo posible de la población) en el instante n.

Tomemos las funciones $f(x) = a(1-x)$, $m(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$. Estamos suponiendo que $f(x)$ es decreciente y que nada sobrevive de un recuento al siguiente. Entonces

$$x_{n+1} = x_n + a(1-x_n)x_n - x_n \Rightarrow x_{n+1} = a(1-x_n)x_n.$$

3) Consideremos x_n y $f(x)$ como en la segunda justificación. Por otra parte, sea $m(x) = (1-b)x+b$ para todo $x \in [0,1]$ y b un parámetro tal que $0 \le b < 1$; así $m(x)$ es creciente y está acotada por 1. En este caso:

$$x_{n+1} = x_n + a(1-x_n)x_n - [(1-b)x_n + b]x_n \Rightarrow$$

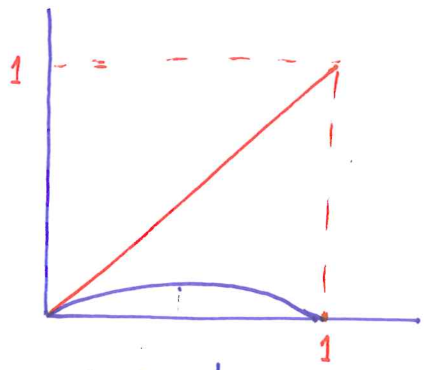
$$x_{n+1} = \underbrace{(1+a-b)}_{\shortparallel \atop A}(1-x_n)x_n$$

Rango de A

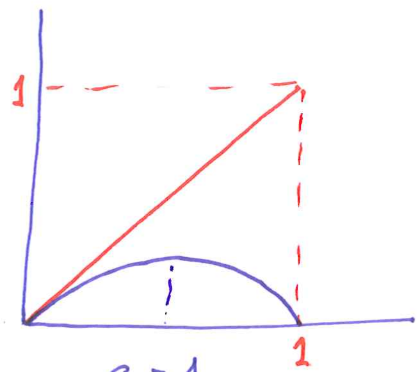
Como queremos que la ecuación

$$x_{n+1} = A\, x_n (1 - x_n)$$

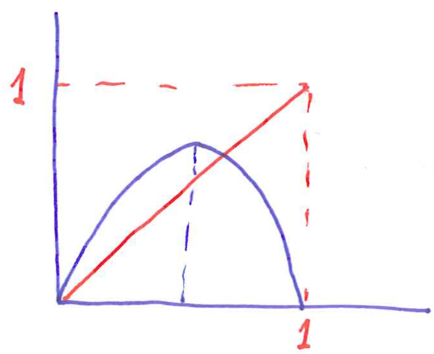
tenga sentido biológico, es necesario que x_n varíe entre 0 y 1. Para ello se tiene que verificar que $0 \le A \le 4$.



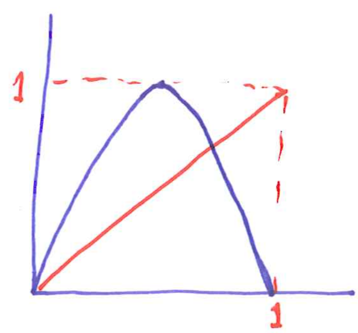
$0 < a < 1$



$a = 1$



$1 < a < 4$



$a = 4$

Puntos fijos

$0 < A \leq 1 \Rightarrow \alpha = 0$ único punto fijo no negativo

$$A > 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 - \frac{1}{A} = \frac{A-1}{A} \end{cases}$$

Dinámica

$0 < A \leq 1 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

$1 < A \leq 2 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{A}$ (en escalera)

$2 < A \leq 3 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{A}$ (en tela de araña) (visible a partir de 2.4)

$3 < A < 3.45 \Rightarrow \{x_n\}$ va a 2-ciclo

$3.45 < A < 3.54 \Rightarrow \{x_n\}$ va a 4-ciclo

3.45, 3.54 son valores aproximados

$A > 3.54 \Rightarrow$ Se complica la situación

Todo esto se ve en el diagrama de bifurcación.

Efecto mariposa

$A = 3.2$

Solución constante: 0'6875

$x_0 = 0'68750000000001$ se va al 2-ciclo

Situaciones variadas

1) $A = 3'475702 \Rightarrow$ El 2-ciclo no es atractor

$$0'853762163591213 \rightleftarrows 0'433949498685933$$

Si se muestran sólo 200 puntos y avanzamos de uno en uno hasta 150 veces no hay ningún cambio. Sin embargo, se acaba en un 4-ciclo como se puede comprobar si pintamos 1000 puntos.

2) $A = 3'83$

3-ciclo atractor en $x_0 = 0'957416597518873$

3-ciclo inestable en $x_0 = 0'955293823446629$

Empezar en ventanas simultáneas con 0'955290, 0'955291, 0'955292, 0'955293.

3) $A = 3'845$

6-ciclo atractor en $x_0 = 0'961246677475987$

4) $A = 3'9$

Todos inestables

Sol. cte: $0'\overline{743589}$

2-ciclo: $0'\overline{897435}$ $0'\overline{358974}$

3-ciclo: $0'964743511534365$

3-ciclo: $0'951213177643578$

Son diferentes

4-ciclo: $0'919299855102863$

5-ciclo: $0'941867775655449$

Definición de Caos

Actualmente no hay una definición aceptada por todos sobre que es el caos. Una de las definiciones más considerada se debe a Robert Devaney. Según él las condiciones para la existencia del caos (adaptadas a nuestro caso) son:

i) existencia de infinitos n-ciclos con n tan grande como se desee;

ii) existencia de una órbita densa, esto es, existencia de una sucesión que está cerca de dos n-ciclos de i);

iii) presencia del efecto mariposa: si se parte de dos condiciones iniciales parecidas pero no iguales, las soluciones que generan se separarán a partir de un momento y no se acercarán "mucho" nunca más.