Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Andalucía – Julio de 2020

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

Miércoles, 8 de julio de 2020

Ejercicio 1.

Sean $A,\ B,\ X,\ Y$ matrices invertibles que verifican $A\cdot X = B$ y $B\cdot Y = A$.

(a) (1 punto) Compruebe que $Y^{-1} = X$.

(b) (1.5 puntos) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle X e Y.

Solución: **Apartado (a).** Dado que las matrices A, B, X e Y son invertibles, entonces deben ser cuadradas. Además, como verifican las igualdades $A\cdot X = B$ y $B\cdot Y = A$, todas deben ser del mismo orden. Por tanto:

$$A\cdot X = B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}\cdot B; \qquad B\cdot Y = A \quad \Leftrightarrow \quad Y = B^{-1}\cdot A.$$

De esta forma,

$$Y^{-1} = \left(B^{-1}\cdot A\right)^{-1} = A^{-1}\cdot\left(B^{-1}\right)^{-1} = A^{-1}\cdot B = X.$$

Apartado (b). Si una matriz 2×2 es invertible, su matriz inversa es:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Así

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

* Profesor de la Universidad de Granada - http://www.ugr.es/~aroldan

Por consiguiente,

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$Y = B^{-1} \cdot A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.}$$

■

Ejercicio 2.

(a) (1 punto) Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena A produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena B produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas A y B es de 1200 y 1500 euros, respectivamente. La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formule, sin resolver, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas A y B para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.

(b) (1.5 puntos) Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x + 2y \geq 7 \qquad 4x - y \geq 1 \qquad 2x - y \leq 4 \qquad 3x + 2y \leq 20 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x + y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

SOLUCIÓN: **Apartado (a).** Resumimos la información del enunciado en la siguiente tabla:

	Cadena A	Cadena B	Mínimo
Lavadoras	10	7	400
Frigoríficos	5	6	280
Coste	1200	1500	

Llamemos x al número de horas que debe funcionar la Cadena A y sea y el número de horas que debe funcionar la Cadena B. Traducimos las condiciones del enunciado en inecuaciones:

- Se deben fabricar al menos 400 lavadoras: $10x + 7y \geq 400$.
- Se deben fabricar al menos 280 frigoríficos: $5x + 6y \geq 280$.
- La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B: $x \leq 2y$.
- Las cadenas no pueden funcionar una cantidad negativa de tiempo: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

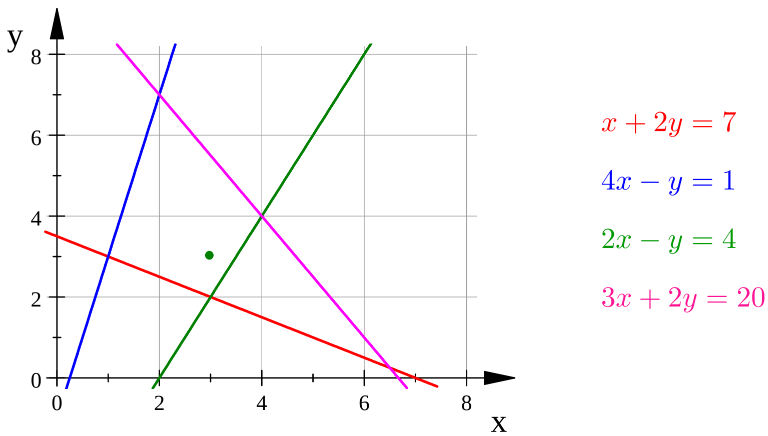
Por consiguiente, el problema de programación lineal que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas A y B para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos:

$$\boxed{\text{Minimizar} \quad 1200x + 1500y \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} 10x + 7y \geq 400, \\ 5x + 6y \geq 280, \\ x \leq 2y, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}}$$

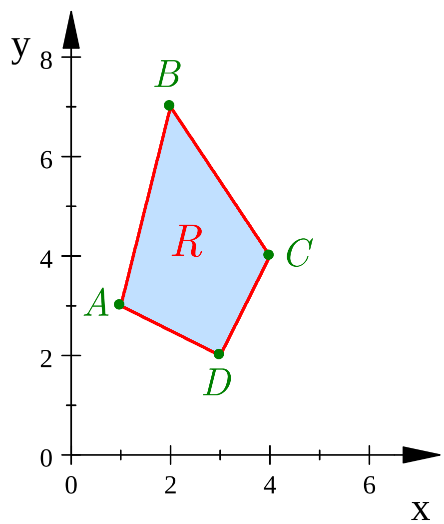
Apartado (b). Para dibujar el recinto R que satisface todas las desigualdades, en primer lugar transformamos las desigualdades en igualdades, observando que hay seis de ellas, y buscamos dos puntos del plano que estén sobre cada una de ellas (para así dibujarlas de manera más sencilla):

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\to \quad (0,0) \quad \text{y} \quad (0,5)\,; \\ y = 0 \quad &\to \quad (0,0) \quad \text{y} \quad (5,0)\,; \\ x + 2y = 7 \quad &\to \quad (0,3.5) \quad \text{y} \quad (7,0)\,; \\ 4x - y = 1 \quad &\to \quad (0,-1) \quad \text{y} \quad (1,3)\,; \\ 2x - y = 4 \quad &\to \quad (2,0) \quad \text{y} \quad (3,2)\,. \\ 3x + 2y = 20 \quad &\to \quad (2,7) \quad \text{y} \quad (4,4)\,. \end{aligned}$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades a través de los dos puntos que hemos calculado en cada recta, sabiendo que las restricciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$ obligan a que el recinto esté situado en el primer cuadrante de los ejes de coordenadas:



El recinto R que buscamos está delimitado por las rectas anteriores. De hecho, encontramos que el punto $(3, 3)$ satisface todas las desigualdades del enunciado, por lo que concluimos que la región factible es la siguiente:



Determinamos los cuatro vértices de la región factible resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$A \equiv \left\{ \begin{array}{r} x + 2y = 7 \\ 4x - y = 1 \end{array} \right. \qquad x = 1,\ y = 3$$

$$B \equiv \left\{ \begin{array}{r} 4x - y = 1 \\ 3x + 2y = 20 \end{array} \right. \qquad x = 2,\ y = 7$$

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{r} x + 2y = 7 \\ 3x + 2y = 20 \end{array} \right. \qquad x = 4,\ y = 4$$

$$D \equiv \left\{ \begin{array}{r} x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{array} \right. \qquad x = 3,\ y = 2$$

Por consiguiente, los vértices de la región factible son:

$$A\,(1,3)\,, \quad B\,(2,7)\,, \quad C\,(4,4) \quad \text{y} \quad D\,(3,2)\,.$$

Consideremos la función $F(x, y) = 2x + y$. El *Teorema Fundamental de la Programación Lineal* afirma que la función F alcanza mínimo (y máximo) absoluto en la región acotada R, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto R, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

$$\begin{aligned} F(1,3) &= 2\cdot 1+3=5,\\ F(2,7) &= 2\cdot 2+7=11,\\ F(4,4) &= 2\cdot 4+4=12,\\ F(3,2) &= 2\cdot 3+2=8. \end{aligned}$$

Por consiguiente, el valor mínimo, que es 5, se alcanza en el vértice $A(1,3)$, donde $x=1$ e $y=3$.

El valor mínimo de F en el recinto indicado es 5, y se alcanza en el punto $(1,3)$.

■

Ejercicio 3.

Se considera la función $f(x)=ax^3+bx+4$, con a y b números reales.

(a) **(1 punto)** Determine los valores a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(2,36)$.

(b) **(0.75 puntos)** Para $a=4$ y $b=-3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos relativos.

(c) **(0.75 puntos)** Para $a=4$ y $b=-3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x)=f(x)$ y $F(2)=10$.

SOLUCIÓN: La función f es polinómica, por lo que es continua y derivable en $\mathbb{R}$, y su función primera derivada es $f'(x)=3ax^2+b$ para cada $x\in\mathbb{R}$.

Apartado (a). Para que f tenga un extremo relativo en $(2,36)$, deben cumplirse dos condiciones:

- f pasa por el punto $(2,36)$ $\Leftrightarrow$ $f(2)=36$;
- f posee un extremo relativo en $x=2$ $\Rightarrow$ $f'(2)=0$.

Deducimos entonces el sistema:

$$\begin{cases} 36=f(2)=a\cdot 2^3+b\cdot 2+4=8a+2b+4 \quad\Leftrightarrow\quad 8a+2b=32 \quad\Leftrightarrow\quad 4a+b=16,\\ 0=f'(2)=3a\cdot 2^2+b=12a+b \end{cases}$$

La única solución de dicho sistema es

$$\begin{cases} 4a+b=16, \\ 12a+b=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 8a=-16 \quad \Rightarrow \quad a=-2 \quad \Rightarrow \quad b=24.$$

$$\boxed{a=-2, \quad b=24.}$$

Apartado (b). Si $a=4$ y $b=-3$, la función f viene dada mediante $f(x)=4x^3-3x+4$ para cada $x\in\mathbb{R}$, y su primera derivada es $f'(x)=12x^2-3$. Su primera derivada se anula en:

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 12x^2-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}} \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}.$$

Para estudiar la monotonía de f, completamos la siguiente tabla:

f'	$+$	máx	$-$	mín	$+$
f	$\nearrow$	$-1/2$	$\searrow$	$1/2$	$\nearrow$

$$f'(-1)=9>0; \quad f'(0)=-3<0; \quad f'(1)=9>0.$$

Por tanto, f es creciente en $(-\infty,-1/2)\cup(1/2,+\infty)$, y es decreciente en el intervalo $(-1/2,1/2)$. La tabla anterior también nos muestra que $x=-1/2$ es un máximo relativo y $x=1/2$ es un mínimo relativo. Calculamos sus imágenes por f y obtenemos:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=4\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\left(-\frac{1}{2}\right)+4=4\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{3}{2}+4=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+4=5;$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=4\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\frac{1}{2}\right)+4=4\left(\frac{1}{8}\right)-\frac{3}{2}+4=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+4=3.$$

> La función f es creciente en $(-\infty,-1/2)\cup(1/2,+\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1/2,1/2)$. Posee un máximo relativo en $\left(-1/2\,,5\right)$ y un mínimo relativo en $\left(1/2\,,3\right)$.

Apartado (c). La función F es una primitiva de f ya que $F'(x)=f(x)$ para cada $x\in\mathbb{R}$. Por tanto, integramos:

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(4x^3-3x+4\right)dx=x^4-\frac{3}{2}x^2+4x+C.$$

Calculamos la constante C para que $F(2)=10$ resolviendo la ecuación:

$$10=F(2)=2^4-\frac{3}{2}\cdot 2^2+4\cdot 2+C=16-6+8+C=18+C.$$

Por consiguiente, $C=-8$, y obtenemos la solución:

$$\boxed{F(x)=x^4-\frac{3}{2}x^2+4x-8.}$$

■

Ejercicio 4.

(a) (1.2 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \left(-5 + x^2\right)^2 \cdot e^{3x} \qquad\qquad g(x) = \frac{\ln\left(x^3 - 5x\right)}{1 - x^2}$$

(b) (1.3 puntos) Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x) = -x^2 + 2x + 3$ y el eje de abscisas.

Solución : **Apartado (a).** Desarrollando el cuadrado de una suma, podemos expresar la función f como:

$$f(x) = \left(-5 + x^2\right)^2 \cdot e^{3x} = \left(x^4 - 10x^2 + 25\right) \cdot e^{3x}$$

La función f es un producto de dos funciones, por lo que aplicamos la regla de la derivada de un producto:

$$f(x) = \underbrace{\left(x^4 - 10x^2 + 25\right)}_{f_1(x)} \cdot \underbrace{e^{3x}}_{f_2(x)} = f_1(x) \cdot f_2(x).$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) = \left(4x^3 - 20x\right) \cdot e^{3x} + \left(x^4 - 10x^2 + 25\right) \cdot 3\, e^{3x} \\ &= \left(4x^3 - 20x + 3x^4 - 30x^2 + 75\right) e^{3x} = \left(3x^4 + 4x^3 - 30x^2 - 20x + 75\right) e^{3x}. \end{aligned}$$

Por otro lado, la función g es el cociente de las funciones $g_1(x) = \ln\left(x^3 - 5x\right)$ y $g_2(x) = 1 - x^2$. Claramente,

$$g_1'(x) = \frac{\left(x^3 - 5x\right)'}{x^3 - 5x} = \frac{3x^2 - 5}{x^3 - 5x} \qquad \text{y} \qquad g_2'(x) = -2x.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{g_1'(x) \cdot g_2(x) - g_1(x) \cdot g_2'(x)}{g_2(x)^2} = \frac{\frac{3x^2-5}{x^3-5x} \cdot \left(1 - x^2\right) - \ln\left(x^3 - 5x\right) \cdot (-2x)}{\left(1 - x^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(3x^2 - 5\right) \cdot \left(1 - x^2\right) + 2x\left(x^3 - 5x\right) \ln\left(x^3 - 5x\right)}{\left(x^3 - 5x\right)\left(1 - x^2\right)^2} \\ &= \frac{-3x^4 + 8x^2 - 5 + 2x^2\left(x^2 - 5\right) \ln\left(x^3 - 5x\right)}{x\left(x^2 - 5\right)\left(1 - x^2\right)^2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & f'(x) = \left(3x^4 + 4x^3 - 30x^2 - 20x + 75\right) e^{3x} \ ; \\ & g'(x) = \frac{-3x^4 + 8x^2 - 5 + 2x^2\left(x^2 - 5\right) \ln\left(x^3 - 5x\right)}{x\left(x^2 - 5\right)\left(1 - x^2\right)^2}. \end{aligned}}$$

Apartado (b). La función $h(x) = -x^2 + 2x + 3$ es una función parabólica cóncava, cuyo vértice es:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1, \qquad y_v = h(x_v) = h(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4.$$

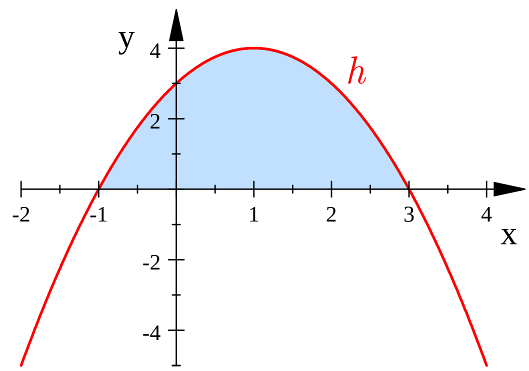
Calculamos los puntos en los que la función h corta al eje de abscisas resolviendo la ecuación:

$$h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -1.$$

Con esta información, podemos completar una sencilla tabla de valores y representar gráficamente la función h de la siguiente forma:

x	$h(x)$
-1	0
1	4
3	0



El área comprendida entre la función h y el eje de abscisas se calcula mediante la regla de Barrow de la siguiente forma:

$$A = \int_{-1}^{3} h(x)\, dx = \int_{-1}^{3} \left(-x^2 + 2x + 3\right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{x=-1}^{x=3}$$

$$= (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = 9 - \left(\frac{1}{3} - 2\right) = 9 - \frac{1}{3} + 2 = \boxed{\frac{32}{3} \text{ u.c.s.}}$$

■

Ejercicio 5.

A 120 estudiantes se les ha recomendado la lectura de dos libros. Se sabe que 46 de ellos ha leído el primer libro recomendado, 34 el segundo y 16 estudiantes han leído ambos libros. Se elige un estudiante al azar.

(a) (0.6 puntos) Calcule la probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros.

(b) (0.6 puntos) Calcule la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros.

(c) (0.6 puntos) Calcule la probabilidad de que solamente haya leído el primer libro.

(d) (0.7 puntos) Calcule la probabilidad de que haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo.

Solución: Completamos una tabla de contingencia como la siguiente:

	Ha leído el libro 1	No ha leído el libro 1	Total
Ha leído el libro 2	16		34
No ha leído el libro 2			
Total	46		120

Estos datos nos permiten completar la tabla en su totalidad de la siguiente forma:

	Ha leído el libro 1	No ha leído el libro 1	Total
Ha leído el libro 2	16	18	34
No ha leído el libro 2	30	56	86
Total	46	74	120

Apartado (a). La probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros es:

$$\frac{\text{número de estudiantes que han leído algún libro}}{\text{número total de estudiantes}} = \frac{16+18+30}{120} = \frac{64}{120} = \boxed{\frac{8}{15}.}$$

Apartado (b). La probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros es:

$$\frac{\text{número de estudiantes que no han leído ningún libro}}{\text{número total de estudiantes}} = \frac{56}{120} = \boxed{\frac{7}{15}.}$$

Apartado (c). La probabilidad de que solamente haya leído el primer libro (se entiende que no ha leído el segundo) es:

$$\frac{\text{número de estudiantes que han leído el primero y no el segundo}}{\text{número total de estudiantes}} = \frac{30}{120} = \boxed{\frac{1}{4}.}$$

Apartado (d). La probabilidad de que haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo, es:

$$\frac{\text{número de estudiantes que han leído el primero y no el segundo}}{\text{número de estudiantes que no han leído el segundo libro}} = \frac{30}{86} = \boxed{\frac{15}{43}.}$$

■

Ejercicio 6.

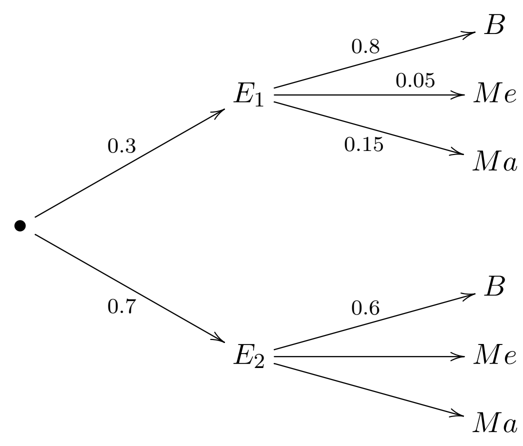
Las bicicletas de alquiler de una ciudad se clasifican por su calidad: buena, media y mala. El 30 % de dichas bicicletas son gestionadas por una empresa E_1 y el resto por una empresa E_2. De las bicicletas de la empresa E_1, el 80 % son de buena calidad, el 5 % de calidad media y el resto de mala calidad. De las bicicletas de la empresa E_2 se sabe que el 60 % son de buena calidad, pero se desconocen los porcentajes de bicicletas de calidad media y calidad mala. Se elige al azar una bicicleta de alquiler de esa ciudad.

(a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que sea de buena calidad.

(b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea de la empresa E_1 y de mala calidad.

(c) **(0.75 puntos)** Si se sabe que el porcentaje de bicicletas de alquiler de calidad media en toda la ciudad es del 19 %, ¿cuál es la probabilidad de que sea de calidad media, sabiendo que la bicicleta elegida es de la empresa E_2?

Solución: Abusando de la notación, denotemos por E_1 (respectivamente, E_2) al suceso "elegida una bicicleta de alquiler al azar de esa ciudad, ésta es de la empresa E_1"(respectivamente, de la empresa E_2). Igualmente, denotemos por B, Me y Ma a los sucesos "elegida una bicicleta de alquiler al azar de esa ciudad, ésta es de calidad buena"(respectivamente, "media", "mala"). Las probabilidades que nos indica el enunciado nos permiten establecer el siguiente diagrama de árbol:



lo que se traduce en las siguientes probabilidades:

$$p\,(E_1) = 0.3, \quad p\,(E_2) = 0.7,$$

$$p\left({}^{B}\!\big/_{E_1}\right) = 0.8, \quad p\left({}^{Me}\!\big/_{E_1}\right) = 0.05, \quad p\left({}^{Ma}\!\big/_{E_1}\right) = 0.15, \quad p\left({}^{B}\!\big/_{E_2}\right) = 0.6.$$

Apartado (a). Aplicando el *teorema de la probabilidad total*, la probabilidad de que sea de buena calidad es:

$$p\,(B) = p\,(E_1)\cdot p\left({}^{B}\!\big/_{E_1}\right) + p\,(E_2)\cdot p\left({}^{B}\!\big/_{E_2}\right) = 0.3\cdot 0.8 + 0.7\cdot 0.6 = \boxed{0.66.}$$

Apartado (b). Aplicando el *teorema de la probabilidad compuesta*, la probabilidad de que sea de la empresa E_1 y de mala calidad es:

$$p\,(E_1\cap Ma) = p\,(E_1)\cdot p\left({}^{Ma}\!\big/_{E_1}\right) = 0.3\cdot 0.15 = \boxed{0.045.}$$

Apartado (c). Supongamos que $p\,(Me) = 0.19$ y llamemos $x = p\left({}^{Me}\!\big/_{E_2}\right)$. Aplicando el *teorema de la probabilidad total*, la probabilidad de que sea de calidad media es:

$$0.19 = p\,(Me) = p\,(E_1)\cdot p\left({}^{Me}\!\big/_{E_1}\right) + p\,(E_2)\cdot p\left({}^{Me}\!\big/_{E_2}\right) = 0.3\cdot 0.05 + 0.7\cdot x.$$

Despejando x, deducimos que la probabilidad de que sea de calidad media, sabiendo que la bicicleta elegida es de la empresa E_2, es:

$$p\left({}^{Me}\!\big/_{E_2}\right) = x = \frac{0.19 - 0.3\cdot 0.05}{0.7} = \frac{0.19 - 0.015}{0.7} = \frac{0.175}{0.7} = \frac{175}{700} = \frac{1}{4} = \boxed{0.25.}$$

■

Ejercicio 7.

La vida útil, en años, de las lavadoras de un determinado modelo se distribuye según una ley Normal de varianza 7.84. En una muestra de 12 lavadoras, la vida útil en años ha sido:

9.5 9 10.2 8.6 11.4 10.8 12.6 11 11.8 14.5 10.4 9.8

(a) **(1.5 puntos)** Con estos datos, determine un intervalo de confianza al 93.5 % para estimar la vida útil de estas lavadoras.

(b) **(1 punto)** Calcule el error máximo que se puede cometer al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras, si se toma una muestra de 50 lavadoras y asumimos un nivel de confianza del 99 %.

Solución: Llamemos X a la variable aleatoria que mide la “vida útil, expresada en años, de una lavadora, elegida al azar, de ese modelo”. El enunciado nos indica que podemos suponer que X posee una distribución Normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 7.84)$, de desviación típica $\sigma = \sqrt{7.84} = 2.8$ años, siendo la media μ desconocida.

Apartado (a). Se toma una muestra aleatoria de $n = 12$ lavadoras de ese modelo que arroja una media de:

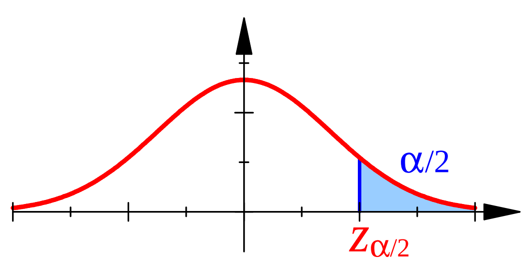
$$\overline{x} = \frac{9.5 + 9 + 10.2 + 8.6 + 11.4 + 10.8 + 12.6 + 11 + 11.8 + 14.5 + 10.4 + 9.8}{12} = 10.8 \text{ años.}$$

La fórmula del intervalo de confianza para la media poblacional μ al nivel de confianza $1 - \alpha$ es:

$$\mathrm{IC}\,(\mu) = \left]\ \overline{x} \pm z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right[.$$

Sabemos que $\overline{x} = 10.8$, $\sigma = 2.8$ y $n = 12$, por lo que solo queda por calcular el valor crítico $z_{\alpha/2}$ a un nivel de confianza del $1 - \alpha = 93.5\,\%$ (es decir, al $\alpha = 0.065 = 6.5\ \%$ de significación). El número $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0.0325$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso complementario, es decir, $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0.0325 = 0.9675$.

$$\begin{aligned} &1 - \alpha = 93.5\,\% = 0.935 \\ &\quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.065 \quad \Rightarrow \quad \alpha/2 = 0.0325 \\ &\quad \Rightarrow \quad 1 - \alpha/2 = 0.9675 \\ &\quad \Rightarrow \quad [\ \text{tabla } \mathcal{N}\,(0,1)\ ] \quad \Rightarrow \quad z_{\alpha/2} \approx 1.845 \end{aligned}$$



Buscamos el valor 0.9675 en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando que $p(Z \leq 1.84) = 0.9671$ y $p(Z \leq 1.85) = 0.9678$, por lo que tomamos como valor crítico el valor intermedio $z_{\alpha/2} = 1.845$. De esta forma, el intervalo de confianza para la vida útil de una lavadora de ese modelo al 93.5 % de confianza es:

$$\text{IC}(\mu) = \left] \, \overline{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, \right[= \left] \, 10.8 \pm 1.845 \cdot \frac{2.8}{\sqrt{12}} \, \right[\approx \left] \, 10.8 \pm 1.4913 \, \right[= \left] \, 9.3087 \, , \, 12.2913 \, \right[.$$

Redondeando a las décimas, utilizando la información muestral de que disponemos, la vida media útil de una lavadora de ese modelo está entre 9.3 y 12.3 años al 93.5 % de confianza:

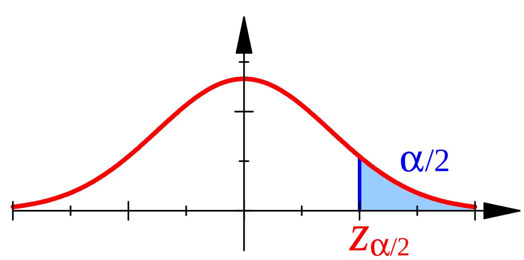
$$\boxed{\text{IC}(\mu) = \left] \, 9.3 \, , \, 12.3 \, \right[.}$$

Apartado (b). Observando la fórmula del intervalo de confianza para la media poblacional μ, el error máximo cometido en la estimación por intervalo de confianza es:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

siendo $n = 50$ y $\sigma = 2.8$. Calculamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ a un nivel de confianza del $1 - \alpha = 99\,\%$ (es decir, al $\alpha = 0.01 = 1\ \%$ de significación). El número $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0.005$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso complementario, es decir, $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0.005 = 0.995$.

$$\begin{aligned} & 1 - \alpha = 99\,\% = 0.99 \\ & \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.01 \quad \Rightarrow \quad \alpha/2 = 0.005 \\ & \quad \Rightarrow \quad 1 - \alpha/2 = 0.995 \\ & \quad \Rightarrow \quad [\text{ tabla } \mathcal{N}(0,1) \ ] \quad \Rightarrow \quad z_{\alpha/2} \approx 2.575 \end{aligned}$$



Buscamos el valor 0.995 en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando que $p(Z \leq 2.57) = 0.9949$ y $p(Z \leq 2.58) = 0.9951$, por lo que tomamos como valor crítico el valor intermedio $z_{\alpha/2} = 2.575$. Por consiguiente, el error máximo que se puede cometer en este caso es:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2.8}{\sqrt{50}} \approx 1.0196 \approx \boxed{1 \text{ año.}}$$

■

Ejercicio 8.

La renta anual de los hogares andaluces, en miles de euros, se distribuye según una ley Normal con desviación típica 5 y media desconocida μ.

(a) (1 punto) Si se desea que en el 99 % de las posibles muestras del mismo tamaño, elegidas de entre los hogares andaluces, la media muestral no difiera de la renta media anual poblacional de dichos hogares en más de una unidad, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de las muestras?

(b) (0.5 puntos) Si se consideran muestras de hogares andaluces de tamaño 100, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria "Renta media anual muestral"?

(c) (1 punto) Suponiendo que la renta media anual poblacional de los hogares andaluces el $\mu = 24$, ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 100 la renta media anual muestral sea superior a 25?

Solución: Llamemos X a la variable aleatoria que mide la "renta anual de un hogar andaluz elegido al azar". El enunciado nos indica que podemos suponer que X posee una distribución Normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 5^2)$, de desviación típica $\sigma = 5$ (en miles de euros), siendo la media μ desconocida.

Apartado (a). La fórmula del intervalo de confianza para la media poblacional μ al nivel de confianza $1 - \alpha$ es:

$$\mathrm{IC}\,(\mu) = \left]\ \overline{x} \pm z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right[.$$

El enunciado nos indica que debemos cometer un error en la estimación (diferencia, en valor absoluto, entre la media muestral $\overline{x}$ y la media poblacional μ) menor o igual que $E_0 = 1$ unidad, por lo que

$$E = z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq E_0 = 1.$$

Despejando:

$$z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = E \leq E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E_0} \leq \sqrt{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E_0}\right)^2.$$

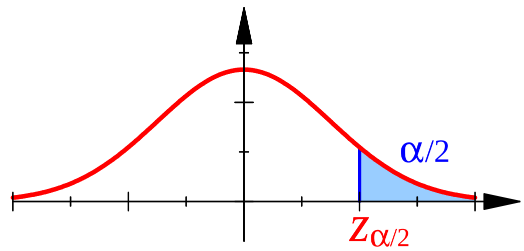
Sabemos que $\sigma = 5$ y $E_0 = 1$. Calculamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ a un nivel de confianza del $1 - \alpha = 99\,\%$ (es decir, al $\alpha = 0.01 = 1\ \%$ de significación). El número $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0.005$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso complementario, es decir, $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0.005 = 0.995$.

$1 - \alpha = 99\,\% = 0.99$

$\Rightarrow \quad \alpha = 0.01 \quad \Rightarrow \quad \alpha/2 = 0.005$

$\Rightarrow \quad 1 - \alpha/2 = 0.995$

$\Rightarrow \quad [\text{ tabla } \mathcal{N}(0,1) \text{ }] \quad \Rightarrow \quad z_{\alpha/2} \approx 2.575$



Buscamos el valor 0.995 en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando que $p(Z \leq 2.57) = 0.9949$ y $p(Z \leq 2.58) = 0.9951$, por lo que tomamos como valor crítico el valor intermedio $z_{\alpha/2} = 2.575$. Por consiguiente, el tamaño requerido debe verificar:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_0}\right)^2 = \left(\frac{2.575 \cdot 5}{1}\right)^2 \approx 165.77.$$

En consecuencia, el tamaño mínimo muestral requerido es de:

$$\boxed{\text{166 hogares.}}$$

Apartado (b). Una muestra aleatoria de 100 hogares andaluces puede ser representada por 100 variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ independientes e idénticamente distribuidas con la misma distribución que la variable original X, que posee distribución Normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 5^2)$ de media μ y varianza 25. En tal caso, la media muestral de 100 de estas variables posee una distribución Normal de la misma media (μ) que la variable original y varianza la misma de X dividida entre $n = 100$. Por ello:

$$\overline{X}_{100} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}}{100} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = \mathcal{N}\left(\mu, \frac{5^2}{100}\right) = \mathcal{N}\left(\mu, s_n^2 = 0.25\right).$$

> La variable "Renta media anual muestral de 100 hogares andaluces" sigue una distribución Normal de la misma media que la población (μ) y varianza 0.25 (o, lo que es lo mismo, desviación típica 0.5).

Apartado (c). Supongamos ahora que $\mu = 24$. Entonces la variable $\overline{X}_{100}$ sigue una distribución Normal de media $\mu = 24$ y varianza 0.25 (o, lo que es lo mismo, desviación típica 0.5), es decir, $\overline{X}_{100} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, s_n^2 = 0.25\right)$. Por consiguiente, la probabilidad solicitada se puede determinar tipificando y buscando el valor adecuado en la tabla de la distribución Normal estándar:

$$p\left(\overline{X}_{100} \geq 25\right) = p\left(\frac{\overline{X}_{100} - 24}{\sqrt{0.25}} \geq \frac{25 - 24}{\sqrt{0.25}}\right) = p\left(Z \geq \frac{25 - 24}{0.5}\right) = p\left(Z \geq 2\right)$$

$$= 1 - p\left(Z < 2\right) \approx 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228.}$$

■