Relación de problemas: Tema 12

1.-Calcular la velocidad de un tren y la frecuencia propia de su silbato si el jefe de estación percibe el fa_4 (704 Hz) cuando se acerca el tren, y el re_4 sostenido (619 Hz) cuando se aleja.

Aplicando la expresión del efecto Doppler, y resolviendo el problema respecto del jefe de estación, que es un observador inercial, se tiene (donde el subíndice *f* indica la fuente y *o* el observador). Se considera que la velocidad del sonido en el aire es $340 \ \mathrm{m/s}$.

$$\left.\begin{array}{r} Acercándose: \dfrac{f_{o1}}{c} = \dfrac{f_f}{c - v_f} \\ Alejándose: \dfrac{f_{o2}}{c} = \dfrac{f_f}{c + v_f} \end{array}\right\} f_f = 658{,}769 \text{ Hz; } v_f = 21{,}844 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.- Una onda plana incide con un ángulo diedro de 30º sobre la superficie de separación plana de dos medios 1 y 2, en los que las velocidades de propagación son v_1 = 800 m/s (incidente) y v_2 = 1200 m/s.
a) Calcular el ángulo de refracción.
b) Id. si la onda pasa del medio 2 al 1 con el mismo ángulo de incidencia.

La ley de la refracción indica que $\dfrac{\sin\theta_1}{v_1} = \dfrac{\sin\theta_2}{v_2} \Rightarrow \theta_2 = \arcsin\left(\dfrac{v_2}{v_1}\sin\theta_1\right)$.
Sustituyendo valores $\theta_{1\to2} = 48{,}5904^\circ$, $\theta_{2\to1} = 19{,}4712^\circ$.

3.- Dos cuerdas muy largas con densidades lineales de masa μ_1 = 5 g/m y $\mu_2 = 2\mu_1$, unidas por un extremo se tensan con una fuerza de 10 N. Una onda armónica de amplitud 2 cm y frecuencia 100 Hz se propaga de la primera a la segunda cuerda, reflejándose y refractándose en el punto de unión con la misma amplitud.
a) Calcular la frecuencia y la longitud de onda de las ondas reflejada y refractada.
b) Escribir las funciones de onda de estas dos ondas, así como la de la onda incidente.

a)

Puesto que la frecuencia no cambia al pasar de un medio a otro $f_1 = f_2 = 100 \text{ Hz}$.
La velocidad de propagación en cada medio es:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \rightarrow c_1 = 44{,}7214 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}, \ c_2 = 31{,}6228 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Calculando las longitudes de onda se tiene $\lambda = \dfrac{c}{f} \rightarrow \lambda_1 = 0{,}4472 \text{ m}, \ \lambda_2 = 0{,}3162 \text{ m}$.

b)

Los números de ondas de los dos medios son:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}\rightarrow k_1=14,050\ \frac{\text{rad}}{\text{m}},\ k_2=19,869\ \frac{\text{rad}}{\text{m}}.$$

La frecuencia angular es $\omega=628,319\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

La ecuaciones de las ondas son:

$$y_{incidente}=0,02\sin\left(628,319\ t-14,050\ x\right)$$

$$y_{reflejada}=0,0141\sin\left(628,319\ t+14,050\ x\right)$$

$$y_{transmitida}=0,0141\sin\left(628,319\ t-19,869\ x\right)$$

donde se ha supuesto que la onda incidente se propaga de izquierda a derecha. Hay que tener en cuenta que $I\propto A^2$ y que la intensidad incidente es igual a la reflejada más la transmitida pues la energía no se acumula en la separación de los medios ni se disipa.

$$I_I=I_R+I_T\Rightarrow\frac{I_R+I_T}{I_I}=1\Rightarrow\frac{A_R^2+A_T^2}{A_I^2}=1\Rightarrow\frac{2A_R^2}{A_I^2}=1\rightarrow A_R=A_T=\frac{A_I}{\sqrt{2}}=0,0141\ \text{m}.$$

4.- En una cuerda de 1m de longitud y densidad lineal de masa 5 g/m, tensada con una fuerza de 20 N y fija por ambos extremos se establece una onda estacionaria.

a) Calcule la longitud de onda del armónico fundamental y la velocidad de propagación de dos ondas armónicas cuya superposición sea dicho armónico.

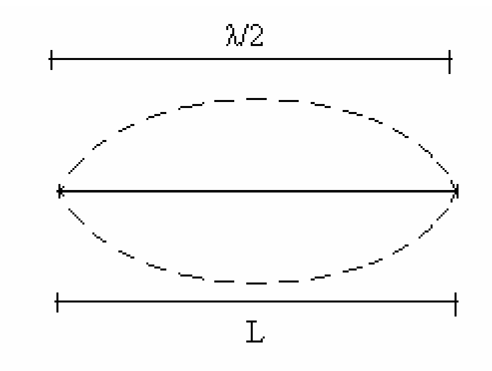
b) Si la amplitud de la onda estacionaria es de 2cm, escriba la expresión correspondiente al segundo armónico.

c) Calcule las frecuencias y longitudes de onda correspondientes al sonido en el aire a una temperatura de 27ºC correspondientes a los dos modos de vibración anteriores.

Datos: R=8,31 $J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}$, masa molecular media del aire 28,8 g/mol, γ_{aire}=1,4.

a)

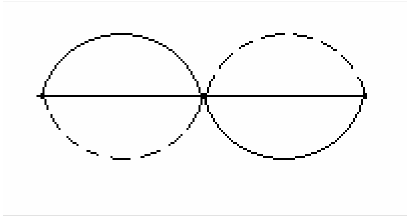
Armónico fundamental:



$$\frac{\lambda}{2}=L\rightarrow\lambda=2L=2\,m$$

$$c=\sqrt{\frac{T}{\mu}}=\sqrt{\frac{T}{\frac{m}{L}}}=63.25\,m/s$$

b) Determinemos ω y k para el segundo armónico:



$$\lambda = L = 1m \rightarrow c = \lambda f \rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = 63.25\,Hz$$
$$\omega = 2\pi f = 397.38\ rad/s$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi = 6.28\,m^{-1}$$

La función de onda de la onda estacionaria es (obviando el desfase):

$$\psi(x,t) = 0.02\cos(397.38t)\,sen(6.28x)$$

c) La velocidad del sonido en el aire es:

$$c_a = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_m}}$$

M_m = masa molecular del aire

$$c_a = 348.207\,m/s$$

(Velocidad del sonido en el aire para esta temperatura.)

-Primer armónico:

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = 31.62\,Hz$$

Longitud de onda del sonido en el aire: $\lambda_{a1} = \frac{c_a}{f_1} = 11.01\,m$

-Segundo armónico:

$$f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = 63.25\,Hz$$

Longitud de onda del sonido en el aire: $\lambda_{a2} = \frac{c_a}{f_2} = 5.51\,m$

5.- Una onda plana se propaga en un medio absorbente de coeficiente de absorción β=0,5 m^{-1}. Calcule la distancia que debe recorrer la onda para que su intensidad se reduzca a:
a) la mitad.
b) 1/8 de su valor inicial.
c) 1/10 de su valor inicial.
d) 1/100 de su valor inicial.
e) 1/1000 de su valor inicial.

Para un medio absorbente se tiene que la intensidad a una distancia x es:

$I(x) = I_0 e^{-\beta x}$ donde $I_0 = I(x=0)$

Despejando x $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0} = e^{-\beta x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\beta} \ln \dfrac{I_0}{I}$

a)

$$I = \frac{I_0}{2} \to x = \frac{1}{\beta} \ln \frac{I_0}{I_0/2} = \frac{1}{\beta} \ln 2 = 1.3863\, m$$

b)

$$I = \frac{I_0}{8} \to x = \frac{1}{\beta} \ln \frac{I_0}{I_0/8} = \frac{1}{\beta} \ln 8 = 4.1589\, m$$

c)

$$I = \frac{I_0}{10} \to x = \frac{1}{\beta} \ln 10 = 4.6052\, m$$

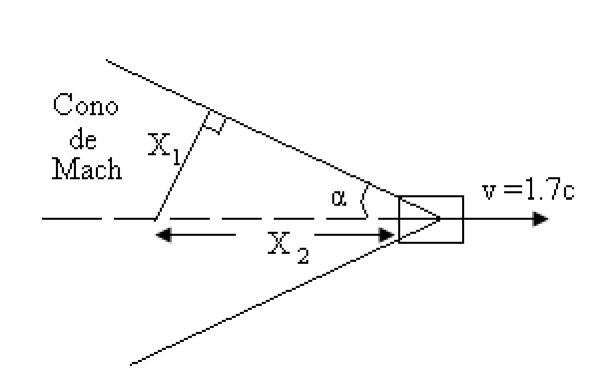
d)

$$I = \frac{I_0}{100} \to x = \frac{1}{\beta} \ln 100 = 9.2103\, m$$

e)

$$I = \frac{I_0}{1000} \to x = \frac{1}{\beta} \ln 1000 = 13.82\, m$$

6.- Un avión supersónico vuela a 300 m de altura con una velocidad de 1,7c.
a) Determine el ángulo de Mach.
b) Calcule el tiempo que transcurrirá desde que el avión sobrevuela directamente encima de un observador situado en tierra hasta que éste escucha el bang supersónico.



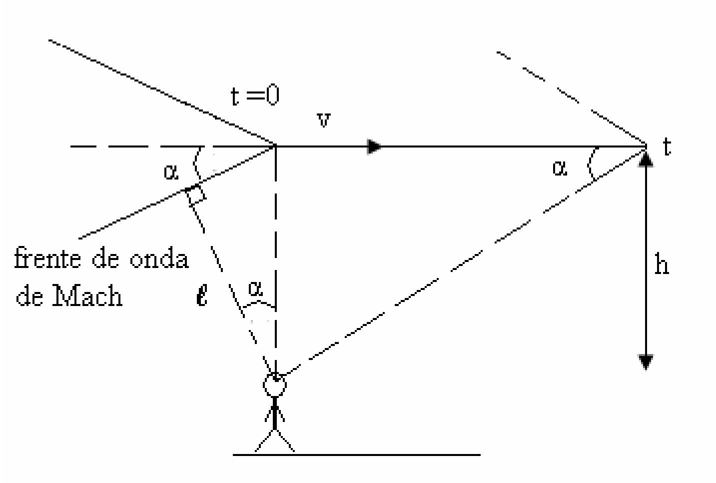
x_1= distancia recorrida por el sonido en tiempo t.
x_2= distancia recorrida por el móvil en tiempo t.

a)

$$c=\frac{x_1}{t};\ v=\frac{x_2}{t}\Rightarrow\frac{v}{c}=\frac{x_2/t}{x_1/t}=\frac{x_2}{x_1}=1.7$$

$$sen\alpha=\frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{1.7}\rightarrow\alpha=0.6289\,rad=36.0319^{o}$$

b)



t = tiempo que tarda el bang en llegar al oyente desde que el avión pasó por encima de él.

$$\cos\alpha=\frac{l}{h}\Rightarrow l=h\cos\alpha$$

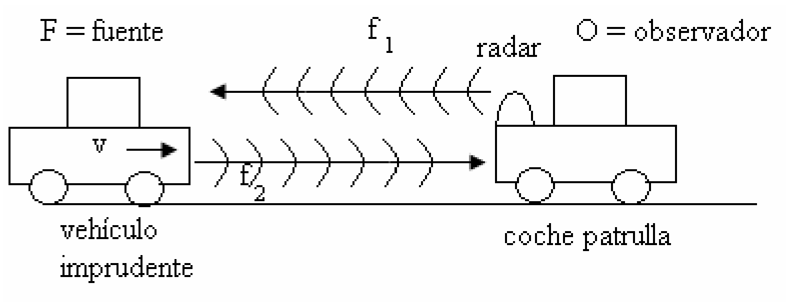
Como el frente de onda de Mach viaja a la velocidad del sonido:

$$c=\frac{l}{t}\rightarrow t=\frac{l}{c}=\frac{1}{c}h\cos\alpha=0.7136\,s$$

7.- Un coche patrulla de la guardia civil está parado en una recta de una autopista. Lleva instalado un radar que emite ondas electromagnéticas que emite ondas de 10 cm de longitud de onda, que se reflejan en el coche que avanza incauto hacia la patrulla. La interferencia de las ondas emitidas y reflejadas provoca en el receptor del coche patrulla pulsaciones de 260 Hz de frecuencia. Si la infracción por exceso de velocidad se penaliza con 12 € por cada km/h que sobrepase los 120, calcule la multa que se le avecina al conductor imprudente.

Se trata de un problema de efecto Doppler más pulsaciones.

λ= 10 cm
f_{bat}= frecuencia de las pulsaciones o batidos = 260 Hz
c=300000 km/s



f_1= frecuencia del radar del coche patrulla.
f_2= frecuencia percibida en el coche patrulla tras rebotar en el vehículo imprudente.
Ambas frecuencias son parecidas y al superponerse en el coche patrulla se forman pulsaciones de frecuencia f_{bat}.

Con la expresión del efecto Doppler:

$$\frac{f_0}{c-v_0}=\frac{f_F}{c-v_F}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_0=f_2 \\ f_F=f_1 \\ f_1=\dfrac{c}{\lambda}=3\cdot 10^9\ Hz \\ v_0=0 \\ v_F=v \end{array}\right\} \frac{f_2}{c}=\frac{f_1}{c-v}\rightarrow\frac{c-v}{c}=\frac{f_1}{f_2}\rightarrow c-v=c\frac{f_1}{f_2}\rightarrow v=c\left(1-\frac{f_1}{f_2}\right)$$

La frecuencia de los batidos es:

$$f_{bat}=\frac{1}{2}(f_2-f_1)\rightarrow f_2=2f_{bat}+f_1$$

$$\Rightarrow f_2=3.00000052\cdot 10^9\ Hz$$
$$\Rightarrow v=52\,m/s=187.2\,km/h$$
$$v-120=67.2$$
$$\text{Multa }=67.2\cdot 12=806.4\in$$

8.-Una onda de 10^4 W/m^2 de intensidad atraviesa un espesor de 2 cm de un material cuyo coeficiente de absorción es de 100 m^{-1}. Calcular:
a) La intensidad de la onda emergente.
b) La relación de amplitudes entre las ondas incidente y emergente.

a)
$$I(x)=I_0e^{-\beta x}\rightarrow I(0,02)=1353,35\ \text{W/m}^2$$

b)

$$A^2(x)\propto I(x)\rightarrow A(x)=A_0e^{-\frac{\beta x}{2}}\rightarrow\frac{A(0,02)}{A_0}=e^{-\frac{\beta 0,02}{2}}=0,368$$

9.- El conductor de un tren que circula a la velocidad de 30 m s^{-1}, con el aire en calma, ve a otro tren en la misma vía. Al tocar ambos el silbato, de la misma frecuencia f_0 = 400 Hz, el conductor detecta 5 batidos por segundo. ¿Cuál es la velocidad del otro tren? Interpretar los resultados.

$$f=f_0\frac{c-v_f}{c-v_o}\Rightarrow(c-v_o)f=(c-v_f)f_0\Rightarrow\ c(f-f_0)=v_of-v_ff_0\Rightarrow$$

$$v_f=\frac{1}{f_0}(v_of-cf+cf_0)=c-\frac{f}{f_0}(c-v_o)=\qquad\left[\text{dos casos de }|f-f_0|=5\right]$$

$$=\begin{cases}\text{a) } f=f_0+5=405: & 340-\dfrac{395}{400}(340-30)=33,875m/s\\ \text{b) } f=f_0-5=395: & 340-\dfrac{405}{400}(340-30)=26,125m/s\end{cases}$$

En ambos casos los dos trenes se están moviendo en el mismo sentido. En el primer caso el tren con el silbato va más rápido que el del observador y acercándose a éste. En el segundo caso el tren del observador va más rápido que el del silbato, alejándose de éste.

10.- a) Calcular la frecuencia fundamental y los primeros cuatro armónicos de un tubo de 15 cm, si el tubo está abierto por ambos extremos y si está cerrado por un extremo. b) ¿Cuántos armónicos pueden ser percibidos por una persona de audición normal, en cada uno de los casos anteriores? Tome la velocidad del sonido 333 m/s.

a) Tubo abierto por un extremo y cerrado por otro.

Se forma una onda estacionaria con un nodo en el extremo cerrado y un vientre en el abierto. Las ondas estacionarias que se forman cumplen la condición

$$L=(2n+1)\frac{\lambda_n}{4},n=0,1,2....$$

Despejando la longitud de onda se obtiene $\lambda_n=\dfrac{4L}{(2n+1)},n=0,1,2....$

Las frecuencias cumplen con $c=\lambda f\Rightarrow f_n=\dfrac{c}{\lambda_n}=(2n+1)\dfrac{c}{4L},n=0,1,2...$

Particularizando para los cinco primeros valores de f_n se obtiene $\{555;1665;2775;3885;4995\}$ Hz

Tubo abierto por ambos extremos.

Se forma una onda estacionaria con vientres en ambos extremos. Las ondas estacionarias que se forman cumplen la condición $L = n\frac{\lambda_n}{2}, n = 1,2,3....$

Despejando la longitud de onda se obtiene $\lambda_n = \frac{2L}{n}, n = 1,2,3....$

Las frecuencias cumplen con $c = \lambda f \Rightarrow f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L}, n = 1,2,3...$

Particularizando para los cinco primeros valores de f_n se obtiene $\{1110; 2220; 3330; 4440; 5550\}$ Hz

b) De las anteriores todas son audibles por una persona normal puesto que el rango de frecuencias del oído estándar es $f \in [20; 20000]$ Hz

11.-Un tubo recto de alcantarilla está atrancado a una distancia desconocida de su extremo. El agua ha sido extraída de su interior, utilizando una bomba. Soplando por un extremo, se oye un sonido de 80 Hz. ¿A qué distancia (como mínimo) está el atranque? (Sea v_0 = 332 m/s la velocidad del sonido en el aire).

Las frecuencias permitidas en un tubo abierto por un extremo y cerrado por otro son $f_n = (2n+1)\frac{c}{4L}, n = 0,1,2....$ Despejando L se obtiene $L = (2n+1)\frac{c}{4f_n}, n = 0,1,2...$ y particularizando para $n = 0 \rightarrow L = 1{,}0375$ m

12.- La función de onda estacionaria de una cuerda fija por sus extremos, expresada en el SI, es ψ(x,t)=0,3 sen(0,01x) cos(200 t).
a) Determine la amplitud, frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación de dos ondas progresivas cuya superposición sea esta onda estacionaria.
b) Escriba las funciones de onda correspondientes a dichas ondas progresivas.
c) Halle la distancia internodal.
d) Si la expresión dada corresponde al tercer modo de oscilación de la cuerda, ¿cuál es la longitud de ésta?

a) Sabemos que para dos ondas armónicas planas de la forma:

$$\psi_{1,2}(x,t) = Asen(\omega t \pm kx + \varphi)$$

El signo – indica que la onda se propaga en el sentido positivo del eje x.
El signo + indica que la onda se propaga en el sentido negativo del eje x.

La onda estacionaria es de la forma:

$$\psi = 2A sen(\omega t)\cos(kx)$$
$$\Rightarrow 2A = 0.3 \rightarrow A = 0.15\,m$$
$$\omega = 200\,rad/s \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100}{\pi}\,Hz$$
$$k = 0.01\ m^{-1} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = 200\pi\ m$$
$$c = \lambda f = 20000\,m/s$$

b) Las ondas viajeras que producen la onda estacionaria son:

$$\psi_1(x,t) = 0.15 sen(200t - 0.01x + \varphi_1)$$
$$\psi_2(x,t) = 0.15 sen(200t + 0.01x + \varphi_2)$$

Usando la identidad trigonométrica:

$$sena + senb = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) sen\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \psi_1 + \psi_2 = 0.3\cos\left(-0.01x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) sen\left(200t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$
$$= 0.3\cos\left(0.01x - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) sen\left(200t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$
$$\cos x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$senx = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \psi_1 + \psi_2 = 0.3 sen\left(0.1x - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(200t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Igualando con la función de onda total:

$$sen\left(0.01x - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = sen(0.01x) \Rightarrow -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \frac{\pi}{2} = 0 \quad (1)$$
$$\cos\left(200t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(200t) \Rightarrow \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \quad (2)$$

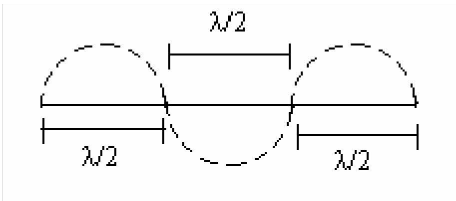
Operando con (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} -\varphi_1 + \varphi_2 = -\pi \\ \varphi_1 + \varphi_2 = \pi \end{array}\right\}$$
$$2\varphi_2 = 0 \rightarrow \varphi_2 = 0$$
$$\varphi_1 = \pi$$

Las funciones de onda son

$$\psi_1(x,t) = 0.15sen(200t - 0.01x + \pi)$$
$$\psi_2(x,t) = 0.15sen(200t + kx)$$

c)



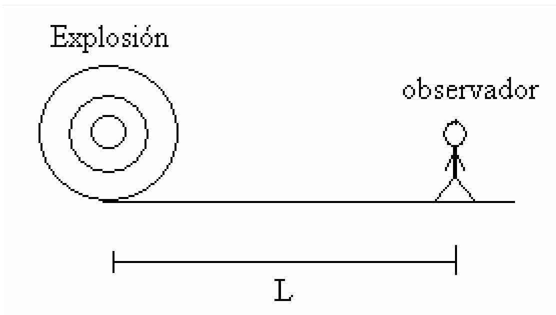
La distancia es λ/2=100π

d)

De acuerdo con el dibujo anterior:

$$L = 3\frac{\lambda}{2} = 300\pi\ m$$

13.- Un día en el que la temperatura es de 300 K, llega un sonido de intensidad 10^{-4} W/m^2 y 10 s de duración procedente de una explosión que tiene lugar a 100 m de distancia.
a) Calcule la potencia y la energía total de la explosión suponiendo que la tierra absorbe toda la energía incidente.
b) Calcule en el punto de recepción la densidad de energía ondulatoria en el aire y la amplitud de la onda si esta se supone armónica y monocromática, de 100Hz de frecuencia. (Masa molecular del aire: 28,8 g/mol).



a)

Puesto que I=P/S y como las ondas son esféricas
$\Rightarrow S = 4\pi L^2 \Rightarrow P = IS = 4\pi L^2 I = 4\pi = 12.5664\,W$

como $P = \frac{E}{t} \rightarrow E = Pt = 40\pi = 125.664\,J$

b)

En primer lugar calculemos la velocidad del sonido en el aire a la temperatura dada:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Tomamos el aire como un gas ideal diatómico:

$$\gamma = \frac{c_P}{c_v} = \frac{7/2\, R}{5/2\, R} = \frac{7}{5}$$

c = 348.204 m/s

Puesto que la relación entre la intensidad y la densidad volúmica de energía (ρ_E)

$$I = \rho_E c \Rightarrow \rho_E = \frac{I}{c} = 2.87188 \cdot 10^{-7}\ J/m^3$$

Por último, la amplitud la calculamos a partir de la relación

$$I = \frac{1}{2}\rho c \omega^2 A^2 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2I}{\rho c \omega^2}} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I}{\rho c}}$$

$$\omega = 2\pi f = 200\pi\ rad/s$$

Suponiendo el aire un gas ideal a P=1 atm=101.293 Pa

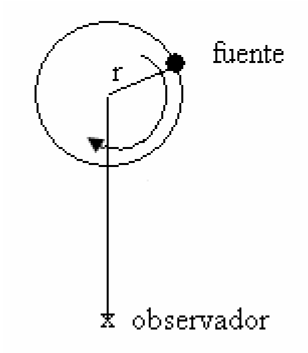
$$PV = nRT\ ;\ n = \frac{m}{M_{molecularaire}}$$

$$PV = \frac{m}{M_{molc}} RT \rightarrow P = \underbrace{\frac{m}{V}}_{\rho} \frac{RT}{M_{molc}} \Rightarrow \rho = \frac{RT}{PM_{molc}} = 1.451 \cdot 10^{-4}\ \ Kg/m^3$$

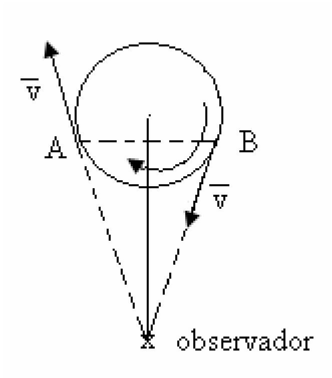
Sustituyendo: $A = 1.001 \cdot 10 \cdot 10^{-4}\ m$

14.- Una fuente sonora, que emite con una frecuencia de 440Hz, se encuentra describiendo una trayectoria circular de diámetro 20cm con velocidad angular constante de 30rps. Calcule el intervalo de frecuencias que escuchará un observador estacionario situado a 10m del centro de la trayectoria de la fuente, y en el plano de la trayectoria.

Dibujando una vista desde arriba tenemos lo siguiente:



Los valores extremos en la frecuencia percibidos por el observador tienen lugar cuando el módulo de la velocidad relativa FUENTE-OBSERVADOR sea máximo o mínimo.



Los puntos de tangencia A y B son en los que se producen el valor mínimo (A) y máximo (B) de la frecuencia escuchada por el observador.

Aplicando la relación del efecto Doppler tenemos:

- Punto A:

$$\frac{f_0}{\underbrace{c - v_0}_{observador}} = \frac{f_f}{\underbrace{c - v_f}_{fuente}}$$

$v_0 = 0\,m/s$

$v_f = -v$

$v = \omega r = 18.84\,m/s$

$\omega = 30 \cdot 2\pi\,rad/s$

$c = 340\,m/s$

Operando: $f_0 = 416.888$ Hz

- Punto B:

$$\frac{f_0}{c - v_0} = \frac{f_f}{c - v_f} \Rightarrow f_0 = 465.8496\,Hz$$

$v_0 = 0\,m/s$

$v_f = v$

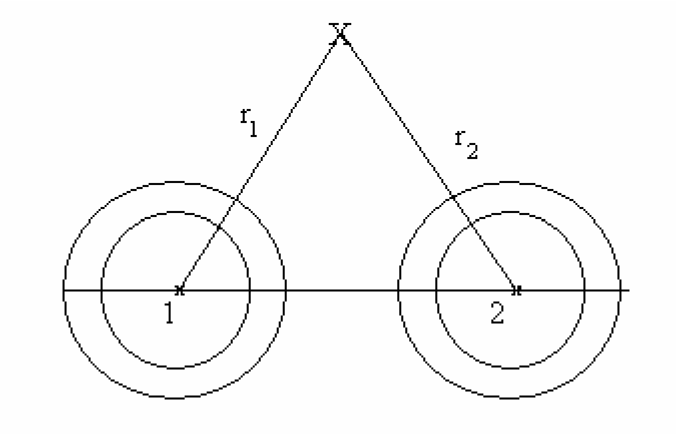
15.- Dos fuentes sonoras, idénticas y sincronizadas en fase, emiten ondas planas con frecuencia 425 Hz. Se coloca un micrófono que dista 100m de una fuente y 101,2m de la otra.

a) ¿Se registrará sonido?

b) Ídem si las fuentes están en contrafase.

c) Ídem si el desfase entre las fuentes varía muy lentamente.

d) Repita los apartados anteriores si ahora las fuentes emiten ondas esféricas.



$$\left.\begin{array}{l} f = 425\,Hz \\ c = 340\,m/s \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = 0.8\,m$$

La diferencia de camino entre las dos ondas es:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 1.2\,m \Rightarrow \frac{\Delta r}{\lambda} = 1.5$$

a) Las fuentes emiten en fase:
Se superponen destructivamente porque las ondas llegan desfasadas en media longitud de onda. Nótese que las ondas son planas y el medio es no absorbente, entonces la amplitud de las ondas es constante.
No se registra sonido.

b) Las fuentes emiten en contrafase:
El desfase de $\lambda/2$ debido a la emisión y la diferencia de camino de 1.5λ provocan una interferencia constructiva.
Se registra sonido de amplitud máxima.

c) El desfase varía lentamente.
Se alternará entre interferencia constructiva y destructiva sucesivamente.
Se alterna entre escuchar sonido y silencio.

d)
-Fuentes en contrafase:
Como las ondas ya no son planas, la amplitud de las dos ondas en el micrófono no es la misma.
Por tanto, aunque las ondas se superponen destructivamente, como la amplitud no es la misma, se registrará un sonido débil.

-Fuentes en fase:
Se escuchará un sonido de amplitud máxima.

-Se alternará entre escuchar sonido débil y fuerte, pero siempre se escuchará sonido.

16.- Dos barcos A y B se acercan uno al otro moviéndose a la velocidad respecto a tierra de módulo 7 m/s. El viento sopla con 5 m/s (respecto a tierra) en la dirección y sentido del barco A. En cada barco hay sendas orquestas de Jazz. El oboe de A toca el la (440 Hz). Entonces los músicos de B se afinan según dicho tono y lo tocan también. ¿Cuál será la frecuencia que se escucha en A?

Cuando las ondas del barco A llegan al B, hay un aumento en la frecuencia escuchada en B debida al efecto Doppler. Cuando las ondas vuelven de nuevo a A, vuelve a haber un aumento de frecuencia. Aplicando dos veces la ecuación del efecto Doppler incluyendo la velocidad del medio se tiene:

$$\frac{f_{oB}}{c+(v+vm)} = \frac{f}{c-(v-v_m)} \rightarrow f_{oB} = 458{,}225 \text{ Hz}$$

$$\frac{f_{oA}}{c+(v-vm)} = \frac{f}{c-(v+v_m)} \rightarrow f_{oA} = 477{,}783 \text{ Hz}$$

17.- Una fuente puntual emite ondas sonoras esféricas de longitud de onda *λ = 1 m* con una potencia *P = 10⁻⁴ W*, a una distancia *d = 20 m* de una pared vertical.
a) Calcule la frecuencia del sonido si la temperatura ambiente es de *T = 27 ºC*.
b) Calcule la intensidad física de la onda sonora en un punto de la pared situado en la normal que contiene a la fuente.
c) Determine el tipo de interferencia producida en el punto medio de la recta mediatriz, entre la onda sonora directa y la reflejada por la pared.
d) Calcule la amplitud y la intensidad resultante en el punto anterior en función de los valores del punto de la pared. (NOTA: $R = 8{,}31 J/mol\cdot K$; $\gamma_{aire} = 1{,}6$)

a) La velocidad del sonido en un gas es $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$, y con la ley de los gases ideales $PV = nRT = \frac{m}{M_m}RT$, donde $M_m = 28{,}8\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$ es la masa molecular del aire. La velocidad es $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_m}} = 372{,}249\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Como $c = \lambda f \Rightarrow f = 372{,}249$ Hz.

b) La intensidad en la pared es $I_{pared} = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi d^2} = 1{,}989\cdot 10^{-8}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

c) Se produce la superposición de dos ondas armónicas de la misma frecuencia y diferente amplitud. Además se produce un cambio de fase en la reflexión de la onda en la pared.

Sea *p* el punto de superposición de la onda directa y reflejada. Como $\lambda = 1$ m, la onda que llega directamente al punto *p* tiene la misma fase que la incidente porque entre la fuente y *p* hay una distancia 10λ. La que llega a la pared recorre una distancia 20λ, y está en fase con la fuente. La onda reflejada en la pared sufre un cambio de fase de π rad. Cuando llega a p la onda reflejada recorre una distancia 10λ, y no se desfasa respecto a la onda reflejada en la pared. Por tanto, ambas ondas están en contrafase, o la interferencia es destructiva. Sin embargo, la amplitud total no será cero pues las ondas directa y reflejada recorren diferente distancia, y por tanto tienen diferente amplitud.

d) La intensidad de la onda directa es $I_1 = \dfrac{P}{4\pi(d/2)^2} = \dfrac{P}{4\pi\dfrac{d^2}{4}} = 4I_{pared}$.

La intensidad de la onda reflejada es $I_2 = \dfrac{P}{4\pi\left(d+\dfrac{d}{2}\right)^2} = \dfrac{P}{4\pi d^2}\dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{9}I_{pared}$.

Como la relación entre intensidad y amplitud para una onda esférica es $A \propto \sqrt{I} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 4I_{pared} \Rightarrow A_1 = 2A_{pared} \\ I_2 = \dfrac{4}{9}I_{pared} \Rightarrow A_2 = \dfrac{2}{3}A_{pared} \end{cases}$. Como están en contrafase, la amplitud final es $A = A_1 - A_2 = \left(2 - \dfrac{2}{3}\right)A_{pared} = \dfrac{4}{3}A_{pared}$.

18.- Una onda estacionaria en una cuerda está representada por la siguiente función de onda: $y(x,t) = 0,02\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\sin(40\pi t)$ (x,y en metros; t en segundos).

a) Escribir dos funciones de onda viajeras que al superponerse producen la onda estacionaria anterior.
b) ¿Cuál es la distancia entre los nodos de la onda estacionaria?
c) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración máximas de un punto de la cuerda situado en x = 1 m?

a) Si dos ondas armónicas de la misma frecuencia y amplitud se superponen viajando en sentidos opuestos se produce una onda estacionaria. Sean dos ondas armónicas en las condiciones anteriores $y_1 = A_0\sin(\omega t - kx + \phi_1)$ y $y_2 = A_0\sin(\omega t + kx + \phi_2)$. La superposición de ambas es

$$\begin{aligned} &y_T = y_1 + y_2 = A_0\sin(\omega t - kx + \phi_1) + A_0\sin(\omega t + kx + \phi_2) = A\cos(kx+\alpha)\sin(\omega t + \beta) \\ &A = 2A_0 \quad \alpha = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \quad \beta = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \end{aligned}.$$

En este caso concreto

$$\omega = 40\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}; k = \frac{\pi}{2}\ \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$A = 2A_0 \Rightarrow A_0 = \frac{A}{2} = 0,01\ \text{m}.$$

$$\phi_1 = \phi_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Por tanto las funciones de onda son
$y_1 = 0,01\sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{2}x\right), \quad y_2 = 0,01\sin\left(40\pi t + \frac{\pi}{2}x\right)$.

b) La distancia entre dos nodos adyacentes es la distancia entre dos ceros consecutivos del factor multiplicativo que depende de la distancia. Determinando las posiciones para las que dicho factor es cero $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{2} = 0, \pm\pi, \pm 2\pi ... \pm n\pi \Rightarrow x_n = \pm 2n$. Por tanto dos posiciones consecutivas distan $\Delta x = x_{n+1} - x_n = 2 \text{ m}$.

c)
Derivando la función de onda armónica se obtiene:
$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = 0,02 \cdot 40\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(40\pi t)$$
Particularizando para $x = 1$ y calculando el valor máximo
$$v_{\max}(6,t) = \left|0,02 \cdot 40\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi 1}{2}\right)\right| = 2,513 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Derivando de nuevo la función de onda respecto del tiempo se tiene
$$a(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -0,02(40\pi)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin(40\pi t).$$

Particularizando para $x = 1$ y calculando el valor máximo
$$a_{\max}(6,t) = \left|-0,02(40\pi)^2 \cos\left(\frac{\pi 1}{2}\right)\right| = 315,827 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

19.- Al pulsar una cuerda tensada con una fuerza de 25 N y sujeta por ambos extremos se produce un sonido que, analizado, presenta un espectro conteniendo la frecuencia fundamental (de amplitud A_0), y los armónicos primero y segundo (de amplitudes 1/10 y 1/4, respectivamente, de la fundamental).
a) Calcule la frecuencia fundamental y la amplitud de la vibración del punto central de la cuerda.
b) Escriba la ecuación de la onda estacionaria correspondiente a los dos armónicos anteriores. (Datos de la cuerda: longitud=50 cm; radio=1 mm; densidad=$1.5 \cdot 10^3$ kg/m^3).

a) La densidad lineal de la cuerda es, para un trozo de longitud arbitraria *L*,
$$\mu = \frac{\text{m}}{\text{L}} = \frac{\text{m/V}}{\text{L/V}} = \rho\frac{\text{V}}{\text{L}} = \rho\frac{\pi\text{R}^2\text{L}}{\text{L}} = \rho\pi\text{R}^2 = 4,712 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$
La velocidad de propagación en la cuerda es $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 72,8366 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Como las frecuencias permitidas son de la forma $f_n = n\frac{c}{2L}, n = 1, 2, ...$, la frecuencia fundamental es, para el valor $n = 1$, $f = 72,8366 \text{ Hz}$.

En el punto central la contribución a la amplitud final es máxima para el armónico fundamental, cero para el primer armónico, y máxima para el segundo armónico. La superposición es $A = \left(1 + \frac{1}{4}\right) A_0 = 1,25 A_0$

b) Las frecuencias angulares de las vibraciones permitidas son $\omega_n = 2\pi n \frac{c}{2L}, n = 1, 2, \ldots$.

Los números de ondas permitidos son $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = n\frac{\pi}{\lambda}, n = 1, 2 \ldots$

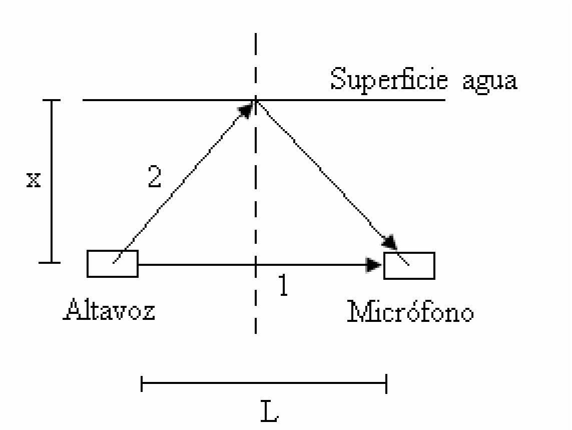
Sustituyendo se tiene:

$\omega_2 = 915,291$ Hz, $k_2 = 12,5664 \ \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ y $\omega_3 = 1372,94$ Hz, $k_3 = 18,8496 \ \frac{\text{rad}}{\text{m}}$.

Las funciones de onda son:

$y_2 = \frac{A_0}{10}\sin(12,5664\,x)\sin(915,291t), y_3 = \frac{A_0}{4}\sin(18,8496\,x)\sin(1372,94t)$.

20.- Un micrófono y un altavoz se sujetan a los extremos una barra recta de 100 m de longitud, sumergiendo a continuación el conjunto horizontalmente en un lago a 20 m de profundidad. El altavoz emite un tono puro de 500 Hz de frecuencia. Si se iza la barra lentamente, manteniéndola horizontal, calcule las profundidades a las que el micrófono registra un máximo de intensidad. La velocidad del sonido en el agua a la temperatura del experimento es c=1500 m/s .



Desde el altavoz al micrófono llegan dos ondas: La directa (1) y la reflejada en la superficie del agua (2).

La diferencia de camino recorrido por las ondas 1 y 2 es:

$$\Delta r = 2\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2} - L = 2\sqrt{\frac{L^2}{4} + x^2} - L$$

Suponiendo que la atenuación es despreciable (es decir, suponiendo ondas planas), la condición de interferencia constructiva es:

$$\Delta r = n\lambda \rightarrow 2\sqrt{\frac{L^2}{4}+x^2} - L = n\lambda$$

$$\sqrt{L^2+4x^2} = n\lambda + L$$

$$L^2+4x^2 = (n\lambda+L)^2 \rightarrow 4x^2 = (n\lambda+L)^2 - L^2$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{(n\lambda+L)^2 - L^2} = \frac{1}{2}\sqrt{n^2\lambda^2+2n\lambda L}$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{n^2\lambda^2+2n\lambda L}$$

Dando valores tenemos que:

$n = 0 \rightarrow$ no tiene sentido

$n = 1 \rightarrow x = 12.339\, m$

$n = 2 \rightarrow x = 17.5784\, m$

$n = 3 \rightarrow x = 21.6852\, m \rightarrow> 20\, m$

Por tanto las soluciones con x < 20 m son:

x = (12.339, 17.5784) m