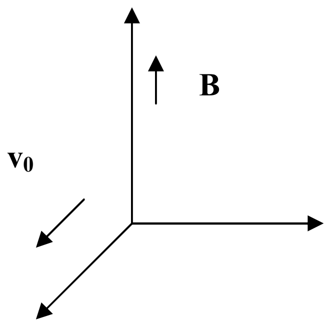
Relación de problemas: Tema 7

1.-Una partícula puntual de masa m y carga q incide con una velocidad inicial v_0, paralela al eje x, sobre una zona de inducción magnética **B** constante, de módulo B y siguiendo la dirección del eje z. Se observa que en esta región la partícula describe una trayectoria circular de radio R con una velocidad de módulo constante e igual a v_0. Dicha trayectoria está incluida en un plano paralelo al plano xy. Calcular la carga de la partícula, supuesto conocidos B, v_0, m y R.

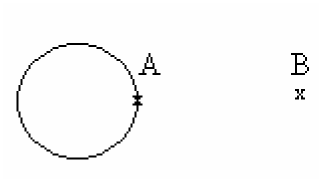


$$\vec{F} = q\vec{v_0}\times\vec{B}$$

En módulos: $qv_0B = \frac{mv_0^2}{R} \rightarrow \boxed{q = \frac{mv_0}{RB}}$

2.- Un meteorito se encuentra inicialmente en reposo a una distancia muy grande de la Tierra. Calcúlese la velocidad que tendrá el meteorito al impactar sobre la superficie terrestre, despreciando el rozamiento con la atmósfera. (Tómese el radio de la Tierra como $R_T=6\cdot10^6$ m y g=10 m/s^2.)

g = 10 m/s^2
R_T =6·10^6 m



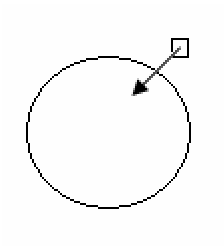
$$E_{mB} = E_{cB} + E_{pB} = 0$$

$$E_{mA} = E_{cA} + E_{pA} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = \frac{1}{2}mv_A^2 - gR_Tm$$

$$E_{mB} = E_{mA} \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 - gR_T\cancel{m} = 0 \Rightarrow v_A = \sqrt{2gR_T}$$

$$\boxed{v_A = 1.1\cdot10^4 \ m/s}$$

3.- Supóngase que en un punto del ecuador de un planeta se observa que si se suelta un cuerpo cerca de la superficie, el cuerpo se queda flotando. Si el día dura 1 h 24 min 18 s, ¿cuál es la densidad del planeta?



El equilibrio de fuerzas en el cuerpo conduce a:

$$F_g = \frac{GM\cancel{m}}{R^2} = \cancel{m}\omega^2 R$$

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4\pi}\frac{M}{R^3} = \frac{3}{4\pi}\frac{\omega^2}{G} \quad \text{con } G = 6.6732 \cdot 10^{-11}$$

El tiempo que tarda en dar una vuelta: t=1h 24 min 18s =5058 s
Luego:

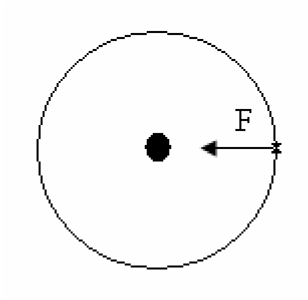
$$\omega = \frac{2\pi}{t} \text{ y}$$

$$\rho = \frac{3}{4\pi}\frac{4\pi^2}{t^2 G} = \frac{3\pi}{t^2 G} = 5520\ Kg/cm^3$$

$$\boxed{\rho = 5.52\ g/cm^3}$$

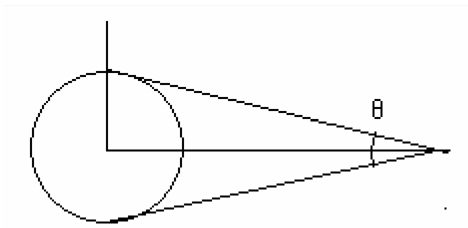
4.- Estímese la densidad media del Sol a partir de los datos siguientes: la constante de gravitación universal *G*, la duración del año terrestre y el ángulo subtendido por el disco solar visto desde la Tierra (≈0,55º).

G = $6.6732 \cdot 10^{-11}$
t = 365·24·60·60 = $3.1536 \cdot 10^{7}$ s



El equilibrio de fuerzas en la Tierra produce:

$$\frac{GM_S M_T}{{R_{TS}}^2} = M_T \omega^2 R_{TS}$$



$$\rho_{sol} = \frac{3M_S}{4\pi {R_{sol}}^3}$$

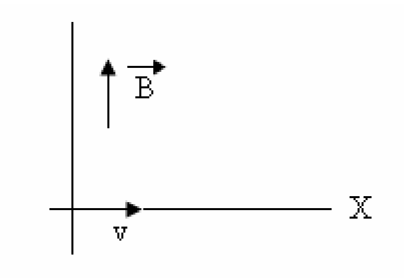
$$R_{sol} = R_{TS}\, sen\frac{\theta}{2}$$

$$\rho_{sol} = \frac{3}{4\pi}\frac{M_S}{sen^3\frac{\theta}{2}R_{TS}{}^3} = \frac{3}{4\pi sen^3\frac{\theta}{2}}\frac{M_S}{R_{TS}{}^3} \quad \text{pero} \quad \frac{M_S}{R_{TS}{}^3} = \frac{\omega^2}{G} = \frac{4\pi^2}{t^2G}$$

$$\text{luego} \quad \rho_{sol} = \frac{3}{4\pi sen^3\frac{\theta}{2}}\frac{4\pi^2}{t^2G} = \frac{3\pi}{sen^3\frac{\theta}{2}t^2G} = 1280\ Kg/m^3$$

$$\boxed{\rho = 1.28\, g/cm^3}$$

5.- Un electrón incide con una velocidad v_0, en la dirección del eje positivo *x* y coincidiendo dicho eje, en una región donde actúa una inducción magnética uniforme *B* en la dirección del eje positivo *y*. Calcúlese el módulo y la dirección del campo eléctrico que habría que aplicar para que el electrón no variara su trayectoria.



$$\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B} = qv_0B\hat{k}$$

Luego el campo que habría que aplicar sería:

$$\boxed{\vec{E} = -qv_0B\hat{k}}$$

6.- Dos partículas con cargas iguales y de signo opuesto se mueven en una región libre de campos con velocidades paralelas entre si, en el mismo sentido y de módulos diferentes. Las partículas penetran en otra región en la que existe un campo magnético uniforme, **B**, cuya dirección es perpendicular al plano de sus trayectorias. Las partículas se encuentran después de haber girado ángulos $\varphi_1 = 90º$ y $\varphi_2 = 150º$. Despreciando la interacción entre las partículas en toda su trayectoria, calcule la relación entre:

a) Sus masas, m_2/m_1.

b) Los radios de sus orbitas, R_2/R_1.

c) Los módulos de sus velocidades, v_2/v_1.

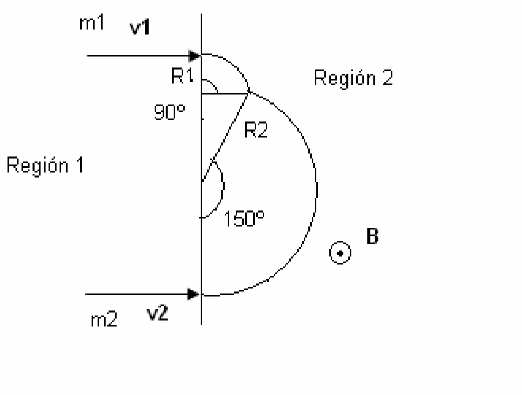
a)

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\Delta\varphi_2/\Delta t}{\Delta\varphi_1/\Delta t} = \frac{150}{90} = \frac{5}{3}$$

$$q(\omega R)B = m\omega^2 R$$

$$qB = m\omega \rightarrow m_1\omega_1 = m_2\omega_2$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow \boxed{\frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{5}}$$



b)

$$R_1 = R_2 \sin 30^\circ \rightarrow \boxed{\frac{R_2}{R_1} = 2}$$

c)

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\omega_2 R_2}{\omega_1 R_1} = \frac{5}{3} \cdot 2 \rightarrow \boxed{\frac{v_2}{v_1} = \frac{10}{3}}$$

7.-Considérese dos satélites artificiales B y C en órbitas circulares alrededor de la Tierra. El radio de la órbita de C es doble que el de B: $r_C = 2r_B$. Calcular el cociente entre:
a) Sus aceleraciones.
b) Sus periodos.
c) El módulo de sus velocidades.

$$\frac{r_C}{r_B} = 2 \rightarrow r_C = 2r_B$$

$$F_C = G\frac{m_C M_T}{r_C^{\,2}} = m_C a_C$$

$$F_B = G\frac{m_B M_T}{r_B^{\,2}} = m_B a_B$$

a) Dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{a_C}{a_B} = \frac{r_B^{\,2}}{r_C^{\,2}} = \left(\frac{r_B}{r_C}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\frac{a_C}{a_B} = \frac{1}{4}}$$

b) Sobre cada satélite actúa una fuerza centrípeta:

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{m_C}\dfrac{v_C{}^2}{r_C} = \cancel{m_C}\,a_C \rightarrow v_C = \sqrt{a_C r_C} \\ \cancel{m_B}\dfrac{v_B{}^2}{r_B} = \cancel{m_B}\,a_B \rightarrow v_B = \sqrt{a_B r_B} \end{array}\right\} \frac{v_C}{v_B} = \sqrt{\frac{a_C r_C}{a_B r_B}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

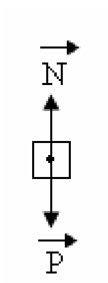
$$\boxed{\frac{v_C}{v_B} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} \omega_C = \dfrac{v_C}{r_C} \rightarrow T_C = \dfrac{2\pi}{\omega_C} = 2\pi\dfrac{r_C}{v_C} \\ \omega_B = \dfrac{v_B}{r_B} \rightarrow T_B = \dfrac{2\pi}{\omega_B} = 2\pi\dfrac{r_B}{v_B} \end{array}\right\} \frac{T_C}{T_B} = \frac{r_C}{r_B}\frac{v_B}{v_C} = 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{\frac{T_C}{T_B} = 2\sqrt{2}}$$

8.- Un objeto en la superficie de la Tierra que descansa sobre un plano horizontal sufre la acción del peso y la reacción normal de dicho plano horizontal. Habitualmente se consideran iguales ambas fuerzas, sin embargo esto no es así si se tiene en cuenta la rotación de la Tierra. Calcúlese el error relativo que se comete al despreciar la rotación de la Tierra. (Tómese el radio de la Tierra como $R_T=6\cdot10^6$ m y $g=10$ m/s^2.)



Suponiendo que el cuerpo está en el ecuador.

$$P - N = m\omega^2 R_T$$

$$\left.\begin{array}{l} P = mg = 10m \\ R_T = 6\cdot 10^6\, m \\ \omega = \dfrac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}\, rad/s \end{array}\right\}$$

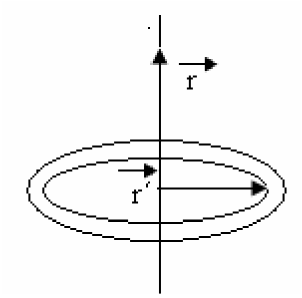
$N_1 = mg - m\omega^2 R_T$

$N_2 = mg$ (sin tener en cuenta la rotación de la Tierra)

$$\varepsilon_{\text{relativo}} = \frac{N_2 - N_1}{\left(N_2 + N_1\right)/2}\cdot 100 = \frac{2m\omega^2 R_T}{2mg - m\omega^2 R_T} = 0.32\%$$

$$\boxed{\varepsilon_{relativo} = 0.32\%}$$

9.- Calcule el campo eléctrico creado en cualquier punto de su eje por una distribución de carga lineal, de forma circular, radio a y densidad lineal de carga ρ_l.

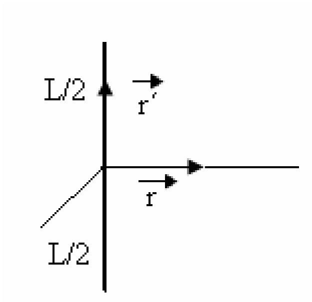


$$\vec{r} = z\hat{k}$$
$$\vec{r}' = a\hat{\rho}'$$
$$dl' = ad\varphi'$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_L\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)^3} adl' = \frac{\rho_L a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\left(z\hat{k}-a\hat{\rho}'\right)}{\left(z^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}d\varphi' = \frac{\rho_L az2\pi\hat{k}}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_L az\hat{k}}{2\varepsilon_0\left(z^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

10.- Calcúlese el campo creado por una distribución lineal de carga recta de longitud *L* y densidad lineal de carga ρ_l en cualquier punto que equidiste de sus extremos.



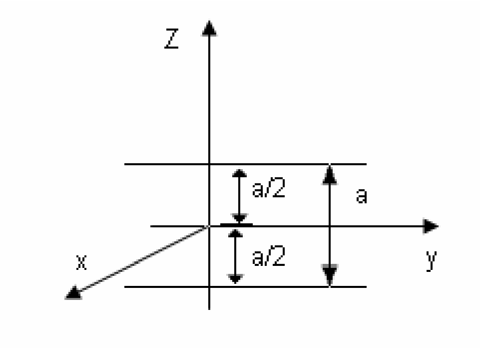
$$\vec{r} = \rho\hat{\rho}$$
$$\vec{r}' = z'\hat{k}$$

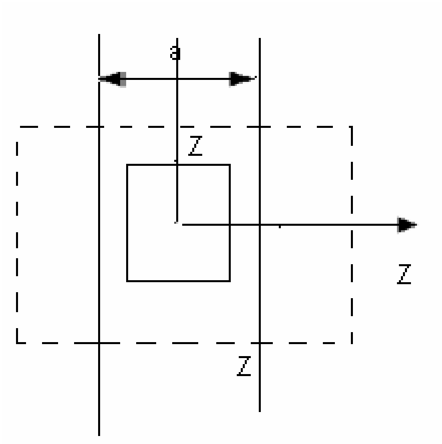
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{\rho_L\left(\rho\hat{\rho}-z'\hat{k}\right)dz'}{\left(\rho^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_L\rho\hat{\rho}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{dz'}{\left(\rho^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_L\rho\hat{\rho}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z'}{\rho^2\sqrt{\rho^2+z'^2}}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_L L\hat{\rho}}{2\pi\rho\varepsilon_0\sqrt{L^2+4\rho^2}}}$$

11.-Una carga de densidad volumétrica constante ρ_0 tiene la forma de una plancha de grosor a. Las caras de la plancha son planos infinitos paralelos al plano xy. Tómese como origen el punto medio entre las caras y encuéntrese **E** para todos los puntos. Compárese los resultados para el caso de un plano infinito de densidad superficial σ.

a)





$|z| \leq \frac{a}{2}$ (punto en el interior)

$$E\cancel{xy} + E\cancel{xy} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 \cancel{xy}\, 2z$$

$$\boxed{\vec{E} = \pm \frac{\rho_0 z}{\varepsilon_0}\hat{k}}$$

b)

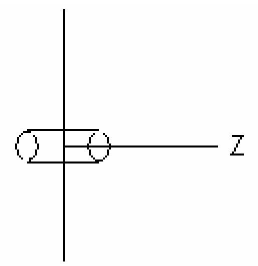
En el exterior:

$|z| > \frac{a}{2}$

$$Exy + Exy = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 xya$$

$$\boxed{\vec{E} = \pm \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{a}{2}\hat{k}}(1)$$

Para un plano infinito.
Aplicando Gauss se obtiene:

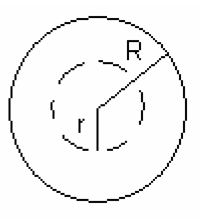


$$\overline{E} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} \quad (2)$$

Comparando las expresiones (1) y (2) se observa que $\rho_o a$ juega el mismo papel que σ.

12.-Calcular la intensidad del campo gravitatorio, en todos los puntos del espacio, debido a una esfera maciza, de radio R y masa M, homogénea y con una distribución de masa con simetría esférica. A partir del resultado anterior, suponer que se pudiera practicar un túnel que atravesara completamente la Tierra pasando por su centro y se abandona en una de las bocas del túnel un cuerpo de masa m, cayendo éste sin rozamiento al interior. Demostrar que el movimiento que realiza el cuerpo será un movimiento armónico simple. Calcular la frecuencia de las oscilaciones en esta situación. Despreciar en cualquier caso los posibles rozamientos.

a) Aplicamos la ley de Gauss en dos zonas:



$r \leq R$ (radio de la Tierra)

$\rho =$ densidad volúmica de masa$=\dfrac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$$\oint_S \overrightarrow{E_G}\cdot\overrightarrow{dS} = -4\pi G\int_V \rho dV$$

$$E_G 4\pi r^2 = -4\pi G\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

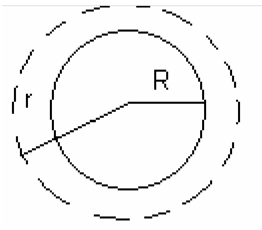
$$E_G = -\frac{4}{3}\pi\rho G r = -G\frac{M_T}{R^3}r \quad r \leq R$$

El signo indica que es un campo dirigido al interior de la Tierra.

$r > R$

$$E_G \cancel{4\pi} r^2 = -\cancel{4\pi} G\rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E_G = -\frac{4}{3}\pi\rho G\frac{R^3}{r^2} = -G\frac{M_T}{r^2} \quad r > R$$



$$\boxed{\begin{array}{l} E_G = -G\dfrac{M_T}{R^3}r \quad r \leq R \\ E_G = -G\dfrac{M_T}{r^2} \quad r > R \end{array}}$$

b)

La fuerza que actúa sobre m es:

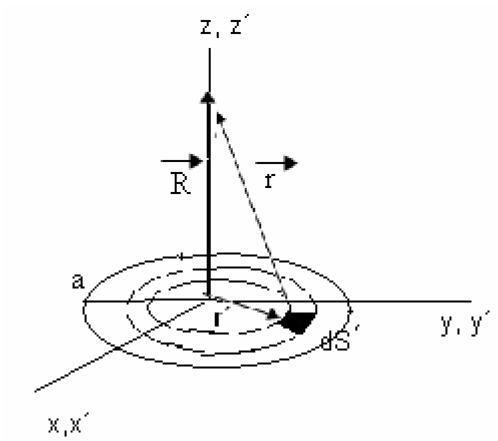
$$F = -\underbrace{\frac{GM_T m}{R^3}}_{K} r = \underbrace{-Kr}_{\substack{\text{Fuerza recuperadora} \\ \rightarrow\text{Movimiento} \\ \text{armónico simple.}}} = ma$$

$$a = -G\frac{M_T}{R^3} r$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{GM_T}{R^3}}}$$

13.-Calcular el campo eléctrico producido en un punto de su eje, por un disco plano de radio a, cargado con una densidad superficial de carga ρ_S. Deducir a partir del resultado cual será el campo eléctrico producido por un plano indefinido cargado con la misma densidad superficial de carga.



$$dS' = \rho' d\varphi' d\rho'$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}' &= \rho'\hat{\rho}' \\ \overrightarrow{R} &= z\hat{k} \end{aligned}\right\} \vec{r} = \overrightarrow{R} - \vec{r}' = z\hat{k} - \rho'\hat{\rho}'$$

$$r = \left(z^2 + \rho'^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r^3 = \left(z^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$d\vec{E}\left(\overrightarrow{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho_S dS' \frac{\vec{r}}{r^3} == \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho_S d\varphi' \rho' d\rho' \frac{z\hat{k} - \rho'\hat{\rho}'}{\left(z^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} d\varphi' \int_{\rho'=0}^{a} \rho' d\rho' \frac{\left(z\hat{k} - \rho'\hat{\rho}'\right)}{\left(z^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Por la simetría del campo, la integral en ρ' se anula.

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}\left(\overrightarrow{R}\right) = \frac{\rho_S z\hat{k}}{2\varepsilon_0} \int_{\rho'=0}^{a} \frac{\rho' d\rho'}{\left(z^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_S z\hat{k}}{2\varepsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + \rho'^2}}\right]_0^a$$

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}\left(\overrightarrow{R}\right) = \frac{\rho_S z\hat{k}}{2\varepsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right]$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}}\left(\overrightarrow{R}\right) = \frac{\rho_S z}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right]\hat{k}}$$

$$a \to \infty$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}}\left(\overrightarrow{R}\right) = \pm\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\hat{k}}$$

14.-En una región del espacio el potencial electrostático en el S.I. viene dado por la expresión:

$$V = 3x + \frac{y^2}{x} - 3yz + 35$$

Calcular:

a) La fuerza que actúa sobre una carga puntual de 200 μC localizada en el punto A(1,2,1) m.

b) El trabajo realizado cuando desplazamos dicha carga desde el punto A al B(-1,3,2) m.

a)

$$V = 3x + \frac{y^2}{x} - 3yz + 35$$

$$q = 200\,\mu C$$
$$A(1,2,1)\,m$$
$$\overrightarrow{F_A} = q\overrightarrow{E_A}$$
$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(3 - \frac{y^2}{x^2}\right)\hat{i} - \left(\frac{2y}{x} - 3z\right)\hat{j} - (-3y)\hat{k}$$
$$\overrightarrow{E_A} = \hat{i} - \hat{j} + 6\hat{k}$$
$$\boxed{\overrightarrow{F_A} = 2\cdot 10^{-4}\left(\hat{i} - \hat{j} + 6\hat{k}\right)N}$$

b)

$$A(1,2,1) \rightarrow B(-1,3,2)$$

$W = q\left(V(B) - V(A)\right) = -6.2\cdot 10^{-3}\,J =$ Trabajo realizado por nosotros contra el campo.

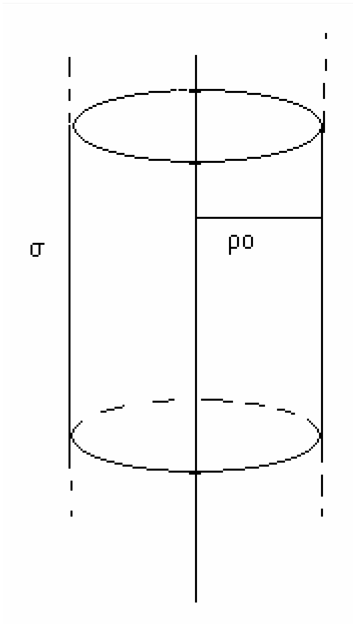
$$\boxed{\mathrm{W} = -6.2\cdot 10^{-3}\,J}$$

$$\left.\begin{array}{l} V(A) = 36\,v \\ V(B) = 5\,v \end{array}\right\}$$ El campo apunta hacia potenciales decrecientes.

Trabajo realizado por campo eléctrico: $W(campo) = -q\left(V(B) - V(A)\right)$

15.-Una línea infinita de densidad de carga ρ_L, se rodea con un cilindro infinitamente largo de radio ρ_0, cuyo eje coincide con ella. La superficie del cilindro posee una densidad superficial de carga constante σ. ¿Qué valor en particular de σ hará que **E** =0 para todos los puntos fuera del cilindro cargado? Calcular la diferencia de potencial entre el cilindro y la línea.

a)



-Campo creado por la línea: Ley de Gauss.

$$\lambda = \rho_L$$

$$\sigma = \rho_S$$

$$\oint_S \overline{E_l} \cdot \overline{dS} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0} \rightarrow E_l 2\pi\rho \cancel{L} = \frac{\rho_L \cancel{L}}{\varepsilon_0} \rightarrow \overline{E_l} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho\varepsilon_0}\hat{\rho} \quad \forall\rho$$

-Campo creado por el cilindro:

En el interior del cilindro de radio ρ_o:

$$\overline{E}_C = 0 \quad \rho < \rho_0$$

Para $\rho \geq \rho_o$: Ley de Gauss.

$$\oint_S \overline{E}_C \cdot \overline{dS} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0} \rightarrow E_C 2\pi\rho L = \frac{\sigma 2\pi\rho_0 L}{\varepsilon_0} \rightarrow \overline{E}_C = \frac{\sigma\rho_0}{\varepsilon_0\rho}\hat{\rho} \quad \rho \geq \rho_0$$

El campo total (por superposición):

$$\overline{E}_T = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho} \quad \rho < \rho_0$$

$$\overline{E}_T = \left(\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho} + \frac{\sigma\rho_0}{\varepsilon_0\rho}\right)\hat{\rho} \quad \rho \geq \rho_0$$

Para que $\overline{E}_T = 0$ para $\rho \geq \rho_0 \rightarrow \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho} + \dfrac{\sigma\rho_0}{\varepsilon_0\rho} = 0 \quad \forall\rho \geq \rho_0$

$$\frac{\rho_L}{2\pi} = -\sigma\rho_0 \rightarrow \boxed{\sigma = -\frac{\rho_L}{2\pi\rho_0}}$$

-La diferencia de potencial ente el cilindro y la línea es:

$$V(cilindro) - V(línea) = \int_0^{\rho_0} dV = -\int_0^{\rho_0} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \hat{\rho} \cdot d\hat{\rho} =$$

$$= -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \int_0^{\rho_0} \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \left[\ln \rho\right]_0^{\rho_0} = \infty$$

$$V(cilindro) - V(línea) = \infty$$

Si a la línea le damos un pequeño radio a:

$$V(cilindro) - V(línea) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \left[\ln a - \ln \rho_0\right] < 0$$

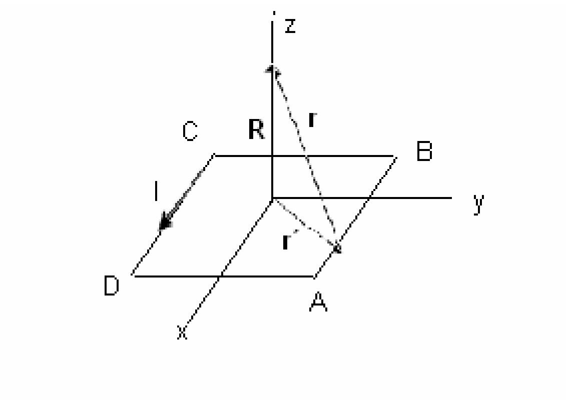
Representa el trabajo que hay que realizar para llevar una carga de 1 C desde un punto a otro (desde la línea al cilindro).

$$V(cilindro) - V(línea) > 0$$

Representa el trabajo que hay que realizar para llevar una carga de 1 C desde el cilindro a la línea contra el campo que crea la línea.

16.- Hallar el campo magnético B producido por una espira cuadrada de lado a recorrida por una intensidad de corriente I, en un punto cualquiera de su eje.

Lamamos a los vértices A, B, C y D



$$\left.\begin{aligned}&\overrightarrow{R}=z\hat{k}\\&\text{Lado AB}\rightarrow\overrightarrow{r'}=x'\hat{\imath}+\frac{a}{2}\hat{j}\end{aligned}\right\}\vec{r}=z\hat{k}-x'\hat{\imath}+\frac{a}{2}\hat{j}$$

$$r=\left[x^2+z^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

El campo sólo tendrá componente $\hat{k}$:

$\vec{B}=B_z\hat{k}$ y los cuatro lados contribuyen por igual.

$$B_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}4\int_A^B\frac{\left(\overrightarrow{dl'}\times\vec{r}\right)\cdot\hat{k}}{r^3}$$

$$\overrightarrow{dl'}\times\vec{r}=-dx\hat{\imath}\times\left(z\hat{k}-x'\hat{\imath}+\frac{a}{2}\hat{j}\right)=zdx\hat{j}-\frac{a}{2}dx\hat{k}$$

$$\left(\overrightarrow{dl'}\times\vec{r}\right)\cdot\hat{k}=-\frac{a}{2}dx$$

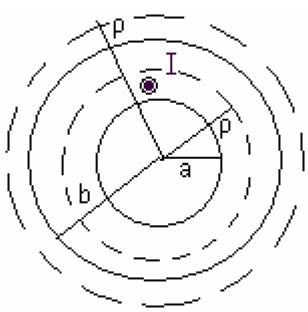
$$B_z=\frac{\mu_0 I}{\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{-\frac{a}{2}dx}{\left[x^2+z^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Buscando en las tablas: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{dx}}{\left[x^2+a^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$

Finalmente queda:

$$\boxed{B_z=\frac{4\mu_0 I a^2}{\pi\left(a^2+4z^2\right)\left(2a^2+4z^2\right)^{\frac{1}{2}}}}$$

17.-Hallar el campo magnético producido en cualquier punto del espacio por un conductor cilíndrico hueco de radios a y b, por el que circula una intensidad I.



$$\vec{J} = \frac{I}{\pi\left(b^2 - a^2\right)}\hat{k} \text{ sólo entre a y b.}$$

Dividimos el espacio en tres regiones:

$\rho < a$

$$\oint_L \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot\vec{dS} \text{ como } \vec{J} = 0 \rightarrow \vec{B} = 0 \qquad \boxed{\vec{B} = 0}$$

$a \leq \rho \leq b$

$$B 2\pi\rho = \frac{\mu_0 I}{\pi\left(b^2 - a^2\right)}\pi\left(\rho^2 - a^2\right)$$

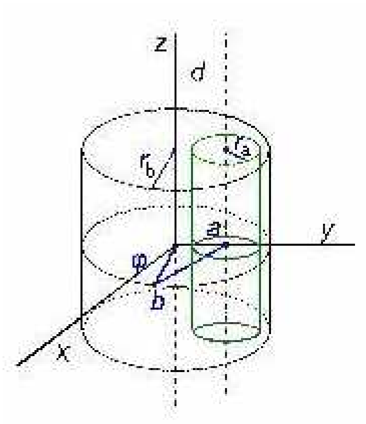
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho\left(b^2 - a^2\right)}\left(\rho^2 - a^2\right)\hat{\varphi} \qquad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho\left(b^2 - a^2\right)}\left(\rho^2 - a^2\right)\hat{\varphi}}$$

$\rho > b$

$$B 2\pi\rho = \mu_0 I$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi} \qquad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}}$$

18.- Un cilindro infinito vertical, de radio r_2, cargado con una densidad volúmica de carga homogénea ρ_v, con su eje pasando por el punto a=(0,d,0) de forma que d > r_2, se encuentra rodeado por una superficie cilíndrica vertical de radio r_1, cargada con densidad superficial de carga homogénea ρs, que está colocada de forma que su eje pasa por el centro de coordenadas y se cumple d+r_2 < r_1, según se muestra en la figura. Calcúlese la diferencia de potencial entre los puntos a situado en (0,d,0) y b de la superficie cilíndrica exterior, que se encuentra en el plano *xy* y cuyo vector de posición forma un ángulo φ con el eje *x*.



En realidad, el cilindro de fuera no interviene en el problema, que resulta consistir en calcular la diferencia de potencial entre el centro de una densidad volúmica de carga cilíndrica e infinita y un punto exterior.

El campo de esta distribución de carga es:

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_V\rho}{2\varepsilon_0}\hat{\rho} & \rho<r_a\\[2mm] \dfrac{\rho_V r_a^{\,2}}{2\rho\varepsilon_0}\hat{\rho} & \rho>r_a\end{cases}$$

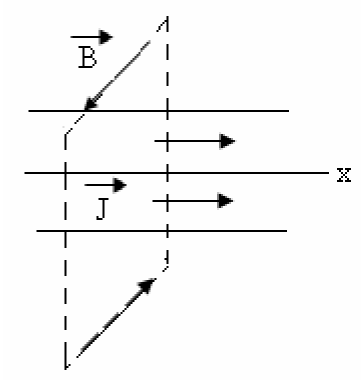
Luego: $\Delta V=-\int_0^{\rho_b}\vec{E}\cdot d\hat{\rho}=-\int_0^{r_a}\dfrac{\rho_V\rho}{2\varepsilon_0}d\rho-\int_{r_a}^{\rho_b}\dfrac{\rho_V r_a^{\,2}}{2\rho\varepsilon_0}d\rho=-\dfrac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{r_a^{\,2}}{2}+r_a^{\,2}\ln\dfrac{\rho_b}{r_a}\right)$

ρ_b es la distancia del punto b al punto a, como el punto b se encuentra en:
$r_b\cos\varphi\hat{i}+r_b sen\varphi\hat{j}$

$$\rho_b=\sqrt{r_b^{\,2}\cos^2\varphi+\left(r_b sen\varphi-d\right)^2}=\sqrt{r_b^{\,2}+d^2-2r_b d sen\varphi}$$

$$\boxed{\Delta V=-\frac{\rho_V r_a^{\,2}}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}+\ln\left[\frac{\sqrt{r_b^{\,2}+d^2-2r_b d sen\varphi}}{r_a}\right]\right)}$$

19.- Calcúlese el campo magnético generado por una plancha plana muy extensa y de grosor d, paralela al plano xy, por la que circula una densidad de corriente constante J en dirección positiva del eje x, en cualquier punto del espacio.



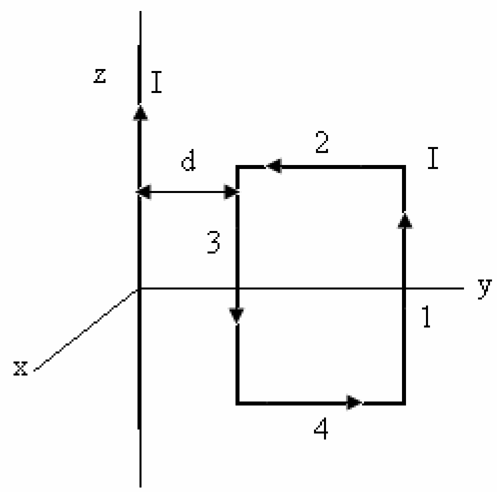
$$\oint\vec{B}\cdot\vec{dl}=\mu_0 I$$

$$\oint\vec{B}\cdot\vec{dl}=2BL$$

$$I=\begin{cases}JLd & \text{si } |Z|>\dfrac{d}{2}\\[2mm] JL2|Z| & \text{si } |Z|\le\dfrac{d}{2}\end{cases}$$

$$\boxed{\vec{B}=\begin{cases}\mu_0 Jz\hat{j} & \text{si } |Z|<\dfrac{d}{2}\\ \dfrac{\mu_0 Jdz}{2|Z|}\hat{j} & \text{si } |Z|\geq\dfrac{d}{2}\end{cases}}$$

20.- Calcúlese la fuerza que ejerce una espira cuadrada de lado L, por la que circula una intensidad de corriente I, sobre un hilo recto infinito coplanario con la espira, paralelo a dos de sus lados y que dista una distancia d de ésta, por el que circula una corriente de la misma intensidad que la de la espira.



$$\vec{F}_{hilo\to espira}=\oint_C I\,\vec{dl}\times\vec{B}_{hilo}$$

$$\vec{B}_{hilo}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$$

Las fuerzas que se generan en la parte de arriba y en la parte de debajo de la espira se anulan, por lo que no se calculan:

$$\vec{F}_{hilo\to espira}=\vec{F}_1+\vec{F}_3=\int_0^L I\,dl\hat{k}\times\frac{\mu_0 I(-\hat{i})}{2\pi(d+L)}+\int_L^0 I\,dl\hat{k}\times\frac{\mu_0 I\hat{i}}{2\pi d}=\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi}\left(-\frac{\hat{j}}{d+L}+\frac{\hat{j}}{d}\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{hilo\to espira}=\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi d}\left(1-\frac{d}{d+L}\right)\hat{j}}$$