

TEMA 4. MODELOS DE PROBABILIDAD DISCRETOS

4.1 Distribución binomial

4.1.1 Definición. Ejemplos

4.1.2 La media y la varianza

4.1.3 Uso de tablas

4.1.4 Aditividad

4.2 Distribución de Poisson

4.2.1 Definición. Ejemplos

4.2.2 La media y la varianza

4.2.3 Uso de tablas

4.2.4 Aditividad

4.2.5 Aproximación de Binomial a Poisson

❖ 4.1 Distribución binomial

❖ 4.1.1 Definición. Ejemplos

- Sea un experimento aleatorio en el que sólo puedan darse dos posibilidades: que ocurra un determinado suceso A , que llamaremos éxito, o que no ocurra dicho suceso, o sea que ocurra su complementario, que llamaremos fracaso, \bar{A} .
- Se conoce la probabilidad de ocurrencia del suceso A , y por lo tanto la de su complementario:

$$P(A) = p; \quad P(\bar{A}) = 1 - p = q$$

- Se repite el experimento n veces en las mismas condiciones (independencia). Se define la variable aleatoria Binomial :
- X : “nº de veces que ocurre el suceso A (nº éxitos) en n realizaciones independientes del experimento”
- ✓ Por lo tanto, $X: 0, 1, 2, 3, \dots, n$

$$X \rightarrow B(n; p)$$

❖ Función de probabilidad

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r}$$

$$r : 0, 1, 2, \dots, n$$

■ Puede comprobarse que se verifica:

$$\sum_{r=0}^n P(X = r) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = 1$$

◆ Ejemplos

- N° de caras al lanzar 20 veces una moneda
- N° de aprobados si se presentan 80 alumnos a un examen
- N° de familias con un solo hijo en una población de 120 familias
- N° de reacciones negativas ante un fármaco administrado a 40 pacientes
- N° de accidentes de tráfico si han circulado 1200 automóviles
- N° de semillas que germinan de las 20 semillas que se han plantado en suelos de idéntica composición

◆ 4.1.2 La media y la varianza

❖ Media

$$\mu = E[X] = \sum_{r=0}^n rP(X=r) = np$$

❖ Varianza

$$\text{Var}[X] = \sigma^2 = \sum_{r=0}^n (r - \mu)^2 P(X=r) = npq$$

◆ Ejemplo

Diez individuos, cada uno de ellos propenso a la tuberculosis, entran en contacto con un portador de la enfermedad. La probabilidad de que la enfermedad se contagie del portador a un sujeto cualquiera es de 0.1. ¿Cuántos se espera que contraigan la enfermedad?

Solución:

$$X \rightarrow B(10; 0.1) \Rightarrow E(X) = 10 \times 0.1 = 1$$

◆ 4.1.3 Uso de tablas

◆ Ejemplo

La probabilidad de que cierto antibiótico presente una reacción negativa al administrarse a un ave rapaz en recuperación es de 0.15. Si se les ha administrado dicho antibiótico a 10 aves, calcúlense las probabilidades de que haya reacción negativa:

- a. En dos aves
- b. En ningún ave
- c. En menos de 4 aves
- d. En más de 3 aves
- e. Entre 2 y 5 aves

Solución:

Suceso A : "A un ave se le presenta reacción negativa"

X : "n° de aves a las que se les presenta tal reacción"

$$P(A) = 0.15 ; n = 10 ; X \rightarrow B(10 ; 0.15)$$

a. $P(X = 2) = 0.2759$

b. $P(X = 0) = 0.1969$

$$\begin{aligned} c. \quad P(X < 4) &= P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + \\ &+ P(X = 2) + P(X = 3) = 0.1969 + 0.3474 + \\ &+ 0.2759 + 0.1298 = 0.95 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d. \quad P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + \\ &+ P(X = 2) + P(X = 3)) = 1 - (0.1969 + 0.3474 + 0.2759 + \\ &+ 0.1298) = 0.05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e. \quad P(2 \leq X \leq 5) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + \\ &+ P(X = 5) = 0.2759 + 0.1298 + 0.0401 + 0.0085 = \\ &= 0.4543 \end{aligned}$$

✧ Un hombre y una mujer, cada uno con un gen recesivo (Azul) y uno dominante (Marrón) para el color de los ojos, son padres de tres hijos. ¿Cuál es la distribución de probabilidades para X , número de hijos con ojos azules?

$$E = \{(AA), (AM), (MA), (MM)\}$$

$$A = \text{“Ojos Azules”}; \quad P(A) = p = 1/4; \quad n = 3$$

$$X = \{\text{N}^\circ \text{ de hijos con ojos azules de 3 hijos}\}$$

$$X \rightarrow B(n; p) = B(3; 0.25)$$

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \binom{3}{r} \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{n-r}; \quad r = 0, 1, 2, 3$$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.4219$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0.4219$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 0.1406$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0.0156$$

◇ 4.1.4 Aditividad

➤ Sean k variables aleatorias, X_1, X_2, \dots, X_k , que verifican:

- Independientes entre sí
- $X_i \rightarrow B(n_i; p)$, $i = 1, 2, \dots, k$

➤ Definimos la variable aleatoria X como:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$



✓ En estas condiciones se verifica que la variable aleatoria X sigue una distribución Binomial:

$$X \rightarrow B(n_1 + \dots + n_k; p)$$

❖ 4.2. Distribución de Poisson

❖ 4.2.1 Definición. Ejemplos

- Se define la variable aleatoria X como el número de sucesos que ocurren en un intervalo continuo de tiempo, longitud o espacio, de un tamaño determinado.
- Sea λ el número medio de sucesos que ocurren en estos intervalos.
- La variable aleatoria así definida sigue una distribución de Poisson de parámetro λ

$$X \rightarrow P(\lambda)$$

◆ Ejemplos

- ❑ N° de leucocitos en una gota de sangre
- ❑ N° de veces que una planta de energía nuclear emite gases radiactivos en un periodo de tres meses

❖ Función de probabilidad

$$P(X = r) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} ; \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad \lambda > 0$$

■ Puede comprobarse que se verifica:

$$\sum_{r=0}^{\infty} P(X = r) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} = 1$$

◇ 4.2.2 La media y la varianza

❖ La media

$$\mu = E[X] = \lambda$$

❖ Varianza

$$\text{Var}[X] = \sigma^2 = \lambda$$

◆ Ejemplos

- ❑ Número de bacterias nocivas por cada cm^3 de agua.
- ❑ Número de partículas radiactivas emitidas cada hora por una cierta sustancia.
- ❑ La probabilidad de reacción negativa ante un fármaco de un individuo es 0.05. Si hay 100 individuos, X: “nº individuos con reacción negativa”
- ❑ La probabilidad de que un individuo tenga un accidente es 0.01. Si hay 3500 individuos, X: “nº de accidentados”
- ❑ Se estima que sólo uno de cada 50 loros capturados en la cuenca del Amazonas, para su utilización como animales domésticos, sobrevive al cambio. Se capturan 700 pájaros en un día, X: “nº de loros que sobreviven”

◇ 4.2.3 Uso de tablas

✧ En una gasolinera la llegada de vehículos sigue la distribución de Poisson de parámetro 1.6. Calcúlese la probabilidad de que:

- a. El n° de vehículos que lleguen sea superior a tres
- b. Esté comprendido entre dos y cinco
- c. Llegue algún vehículo

a. $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = 0.0789$

b. $P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.4689$

c. $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 0.7981$

◇ 4.2.4 Aditividad

➤ Sean k variables aleatorias, X_1, X_2, \dots, X_k , que verifican:

- Independientes entre sí
- $X_i \rightarrow \mathbf{P}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$

➤ Definimos la variable aleatoria X como:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$



✓ En estas condiciones se verifica que la variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson:

$$X \rightarrow P(\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_k)$$

◆ 4.2.5 Aproximación de una Binomial a una Poisson

- Sea X una v.a. con distribución Binomial

$$X \rightarrow B(n; p)$$

- Si se verifica que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n} > \mathbf{30} \text{ y } \mathbf{p} < \mathbf{0.1} \\ \text{o bien} \\ \mathbf{n p} \leq \mathbf{5} \end{array} \right.$$



- ✓ La distribución binomial se aproxima a una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = np$

$$X \rightarrow P(\lambda = np)$$

◆ Ejemplo

La probabilidad de que al administrársele un antibiótico a un ave rapaz en recuperación se le presente una reacción negativa es 0.05. Si se le va a administrar el antibiótico a 80 de estas aves, calcúlese la probabilidad de que:

1. No haya reacción negativa en ningún ave
2. Al menos haya reacción negativa en dos de ellas
3. Como mucho la haya en 5

Solución:

Suceso A : "A un ave se le presenta reacción negativa"

X : "nº de aves a las que se les presenta tal reacción"

$$P(A) = 0.05; \quad n = 80; \quad X \rightarrow B(80; 0.05)$$

$$n > 30 \text{ y } p < 0.1$$

$$\Rightarrow X \rightarrow P(\lambda = np) = P(\lambda = 80 \times 0.05) = P(\lambda = 4)$$

$$1. \quad P(X = 0) = 0.0183$$

$$2. \quad P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ = 0.9084$$

$$3. \quad P(X \leq 5) = P(X = 0) + \dots + P(X = 5) = 0.7851$$