Distribuciones simétricas

Distribuciones simétricas

Una variable aleatoria X o, equivalentemente, su distribución, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ **si**

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \leq \alpha + \mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \geq \alpha - \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}.$$

Distribuciones simétricas

Una variable aleatoria X o, equivalentemente, su distribución, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \leq \alpha + \mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \geq \alpha - \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1: condiciones equivalentes de simetría

Una variable aleatoria X es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

i) Las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución.

ii) $F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x) + P(X = \alpha - x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Distribuciones simétricas

Una variable aleatoria X o, equivalentemente, su distribución, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \leq \alpha + \mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \geq \alpha - \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1: condiciones equivalentes de simetría

Una variable aleatoria X es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

$i)$ Las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución.

$ii)$ $F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x) + P(X = \alpha - x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Distribuciones simétricas

Una variable aleatoria X o, equivalentemente, su distribución, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \leq \alpha + \mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \geq \alpha - \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1: condiciones equivalentes de simetría

Una variable aleatoria X es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

i) Las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución.

ii) $F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x) + P(X = \alpha - x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

i) La condición de simetría de la definición puede expresarse como

$$P(X - \alpha \leq x) = P(\alpha - X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Distribuciones simétricas

Una variable aleatoria X o, equivalentemente, su distribución, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \leq \alpha + \mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \geq \alpha - \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1: condiciones equivalentes de simetría

Una variable aleatoria X es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

i) Las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución.

ii) $F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x) + P(X = \alpha - x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

i) La condición de simetría de la definición puede expresarse como

$$P(X - \alpha \leq x) = P(\alpha - X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

lo que significa que las funciones de distribución (y, por tanto, las distribuciones) de las variables $X - \alpha$ y $\alpha - X$ coinciden.

Distribuciones simétricas

Una variable aleatoria X o, equivalentemente, su distribución, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \leq \alpha + \mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \geq \alpha - \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1: condiciones equivalentes de simetría

Una variable aleatoria X es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

i) Las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución.

ii) $F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x) + P(X = \alpha - x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

i) La condición de simetría de la definición puede expresarse como

$$P(X - \alpha \leq x) = P(\alpha - X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

lo que significa que las funciones de distribución (y, por tanto, las distribuciones) de las variables $X - \alpha$ y $\alpha - X$ coinciden.

ii) Es inmediato sin más que tener en cuenta que, de la definición de simetría, $F_X(\alpha + x) = P(X \geq \alpha - x)$ y

$$P(X \geq \alpha - x) = 1 - P(X < \alpha - x) = 1 - [P(X \leq \alpha - x) - P(X = \alpha - x)]\,. \qquad \blacksquare$$

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La demostración es inmediata sin más que expresar la condición $i)$ del teorema 1 para variables discretas en términos de las funciones masa de probabilidad,

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La demostración es inmediata sin más que expresar la condición $i)$ del teorema 1 para variables discretas en términos de las funciones masa de probabilidad,

$$P(X - \alpha = x) = P(\alpha - X = x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La demostración es inmediata sin más que expresar la condición $i)$ del teorema 1 para variables discretas en términos de las funciones masa de probabilidad,

$$P(X - \alpha = x) = P(\alpha - X = x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3: condición de simetría para variables continuas

Una variable continua, X, con función de densidad f_X, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La demostración es inmediata sin más que expresar la condición $i)$ del teorema 1 para variables discretas en términos de las funciones masa de probabilidad,

$$P(X - \alpha = x) = P(\alpha - X = x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3: condición de simetría para variables continuas

Una variable continua, X, con función de densidad f_X, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La demostración es inmediata sin más que expresar la condición $i)$ del teorema 1 para variables discretas en términos de las funciones masa de probabilidad,

$$P(X - \alpha = x) = P(\alpha - X = x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3: condición de simetría para variables continuas

Una variable continua, X, con función de densidad f_X, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

Notemos en primer lugar que la condición $ii)$ del teorema 1 para variables continuas se expresa como

$$F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La demostración es inmediata sin más que expresar la condición $i)$ del teorema 1 para variables discretas en términos de las funciones masa de probabilidad,

$$P(X - \alpha = x) = P(\alpha - X = x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3: condición de simetría para variables continuas

Una variable continua, X, con función de densidad f_X, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

Notemos en primer lugar que la condición $ii)$ del teorema 1 para variables continuas se expresa como

$$F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

de donde, derivando respecto de x, se obtiene la condición para la función de densidad.

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La demostración es inmediata sin más que expresar la condición $i)$ del teorema 1 para variables discretas en términos de las funciones masa de probabilidad,

$$P(X - \alpha = x) = P(\alpha - X = x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3: condición de simetría para variables continuas

Una variable continua, X, con función de densidad f_X, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

Notemos en primer lugar que la condición $ii)$ del teorema 1 para variables continuas se expresa como

$$F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

de donde, derivando respecto de x, se obtiene la condición para la función de densidad.

Para demostrar el recíproco notemos que

$$\int_{-\infty}^{t} f_X(\alpha + x)dx = \int_{-\infty}^{t} f_X(\alpha - x)dx, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría $ii)$ del teorema 1 para variables continuas. ■

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría $ii)$ del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α, se tiene:

$i)$ Los momentos centrados en α de orden impar, si existen, son nulos.

$ii)$ Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.

$iii)$ α es mediana de X.

$iv)$ Si X es unimodal, α es la moda.

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii*) del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α, se tiene:

i) Los momentos centrados en α de orden impar, si existen, son nulos.

ii) Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.

iii) α es mediana de X.

iv) Si X es unimodal, α es la moda.

Demostración:

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii*) del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α, se tiene:

i) Los momentos centrados en α de orden impar, si existen, son nulos.

ii) Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.

iii) α es mediana de X.

iv) Si X es unimodal, α es la moda.

Demostración:

i) Por la condición de simetría *i*) del teorema 1, las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución y, por tanto, sus momentos, si existen, coinciden.

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría ii) del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α, se tiene:

i) Los momentos centrados en α de orden impar, si existen, son nulos.

ii) Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.

iii) α es mediana de X.

iv) Si X es unimodal, α es la moda.

Demostración:

i) Por la condición de simetría i) del teorema 1, las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución y, por tanto, sus momentos, si existen, coinciden. Así,

$$E[(X - \alpha)^{2k+1}] = E[(\alpha - X)^{2k+1}], \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii*) del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α, se tiene:

i) Los momentos centrados en α de orden impar, si existen, son nulos.

ii) Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.

iii) α es mediana de X.

iv) Si X es unimodal, α es la moda.

Demostración:

i) Por la condición de simetría *i*) del teorema 1, las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución y, por tanto, sus momentos, si existen, coinciden. Así,

$$E[(X-\alpha)^{2k+1}] = E[(\alpha - X)^{2k+1}], \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y teniendo en cuenta que $E[(\alpha - X)^{2k+1}] = -E[(X-\alpha)^{2k+1}]$, se obtiene que $E[(X-\alpha)^{2k+1}] = 0$.

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii*) del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α, se tiene:

i) Los momentos centrados en α de orden impar, si existen, son nulos.

ii) Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.

iii) α es mediana de X.

iv) Si X es unimodal, α es la moda.

Demostración:

i) Por la condición de simetría *i*) del teorema 1, las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución y, por tanto, sus momentos, si existen, coinciden. Así,

$$E[(X - \alpha)^{2k+1}] = E[(\alpha - X)^{2k+1}], \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y teniendo en cuenta que $E[(\alpha - X)^{2k+1}] = -E[(X - \alpha)^{2k+1}]$, se obtiene que $E[(X - \alpha)^{2k+1}] = 0$.

ii) Como consecuencia inmediata de *i*) se tiene que $E[X - \alpha] = 0$ o, equivalentemente, $E[X] = \alpha$.

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii*) del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α, se tiene:

i) Los momentos centrados en α de orden impar, si existen, son nulos.

ii) Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.

iii) α es mediana de X.

iv) Si X es unimodal, α es la moda.

Demostración:

i) Por la condición de simetría *i*) del teorema 1, las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución y, por tanto, sus momentos, si existen, coinciden. Así,

$$E[(X - \alpha)^{2k+1}] = E[(\alpha - X)^{2k+1}], \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y teniendo en cuenta que $E[(\alpha - X)^{2k+1}] = -E[(X - \alpha)^{2k+1}]$, se obtiene que $E[(X - \alpha)^{2k+1}] = 0$.

ii) Como consecuencia inmediata de *i*) se tiene que $E[X - \alpha] = 0$ o, equivalentemente, $E[X] = \alpha$.

iii) Haciendo $x = 0$ en la definición de simetría, $P(X \leq \alpha) = P(X \geq \alpha)$.

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii*) del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α, se tiene:

i) Los momentos centrados en α de orden impar, si existen, son nulos.

ii) Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.

iii) α es mediana de X.

iv) Si X es unimodal, α es la moda.

Demostración:

i) Por la condición de simetría *i*) del teorema 1, las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución y, por tanto, sus momentos, si existen, coinciden. Así,

$$E[(X-\alpha)^{2k+1}] = E[(\alpha - X)^{2k+1}], \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y teniendo en cuenta que $E[(\alpha - X)^{2k+1}] = -E[(X-\alpha)^{2k+1}]$, se obtiene que $E[(X-\alpha)^{2k+1}] = 0$.

ii) Como consecuencia inmediata de *i*) se tiene que $E[X - \alpha] = 0$ o, equivalentemente, $E[X] = \alpha$.

iii) Haciendo $x = 0$ en la definición de simetría, $P(X \leq \alpha) = P(X \geq \alpha)$. De esta propiedad se deduce que tal probabilidad debe ser mayor o igual que $1/2$ ya que, de lo contrario, $P(X \leq \alpha) + P(X \geq \alpha) < 1$.

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría $ii)$ del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α, se tiene:

i) Los momentos centrados en α de orden impar, si existen, son nulos.

ii) Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.

iii) α es mediana de X.

iv) Si X es unimodal, α es la moda.

Demostración:

i) Por la condición de simetría *i)* del teorema 1, las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución y, por tanto, sus momentos, si existen, coinciden. Así,

$$E[(X - \alpha)^{2k+1}] = E[(\alpha - X)^{2k+1}], \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y teniendo en cuenta que $E[(\alpha - X)^{2k+1}] = -E[(X - \alpha)^{2k+1}]$, se obtiene que $E[(X - \alpha)^{2k+1}] = 0$.

ii) Como consecuencia inmediata de *i)* se tiene que $E[X - \alpha] = 0$ o, equivalentemente, $E[X] = \alpha$.

iii) Haciendo $x = 0$ en la definición de simetría, $P(X \leq \alpha) = P(X \geq \alpha)$. De esta propiedad se deduce que tal probabilidad debe ser mayor o igual que $1/2$ ya que, de lo contrario, $P(X \leq \alpha) + P(X \geq \alpha) < 1$. Entonces,

$$P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2},$$

$$P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2},$$

y se deduce que el punto α es una mediana de la distribución de X.

$$P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2},$$

y se deduce que el punto α es una mediana de la distribución de X.

iv) Supongamos que X es una variable de tipo continuo con función de densidad f_X (de igual forma se razonará para variables discretas). Supongamos que la moda es $\alpha' \neq \alpha$.

$$P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2},$$

y se deduce que el punto α es una mediana de la distribución de X.

iv) Supongamos que X es una variable de tipo continuo con función de densidad f_X (de igual forma se razonará para variables discretas). Supongamos que la moda es $\alpha' \neq \alpha$.

Si $\alpha' > \alpha$ y $x = \alpha' - \alpha$, teniendo en cuenta la condición de simetría para variables continuas, se tiene

$$f_X(\alpha') = f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x),$$

$$P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2},$$

y se deduce que el punto α es una mediana de la distribución de X.

iv) Supongamos que X es una variable de tipo continuo con función de densidad f_X (de igual forma se razonará para variables discretas). Supongamos que la moda es $\alpha' \neq \alpha$.

Si $\alpha' > \alpha$ y $x = \alpha' - \alpha$, teniendo en cuenta la condición de simetría para variables continuas, se tiene

$$f_X(\alpha') = f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x),$$

de donde se deduce que $\alpha - x = 2\alpha - \alpha'$ es también moda de la distribución, contradiciendo el hecho de que ésta es unimodal.

$$P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2},$$

y se deduce que el punto α es una mediana de la distribución de X.

iv) Supongamos que X es una variable de tipo continuo con función de densidad f_X (de igual forma se razonará para variables discretas). Supongamos que la moda es $\alpha' \neq \alpha$.

Si $\alpha' > \alpha$ y $x = \alpha' - \alpha$, teniendo en cuenta la condición de simetría para variables continuas, se tiene

$$f_X(\alpha') = f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x),$$

de donde se deduce que $\alpha - x = 2\alpha - \alpha'$ es también moda de la distribución, contradiciendo el hecho de que ésta es unimodal. De forma similar, si $\alpha' < \alpha$, se deduce que $2\alpha - \alpha'$ es también moda.

$$P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2},$$

y se deduce que el punto α es una mediana de la distribución de X.

iv) Supongamos que X es una variable de tipo continuo con función de densidad f_X (de igual forma se razonará para variables discretas). Supongamos que la moda es $\alpha' \neq \alpha$.

Si $\alpha' > \alpha$ y $x = \alpha' - \alpha$, teniendo en cuenta la condición de simetría para variables continuas, se tiene

$$f_X(\alpha') = f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x),$$

de donde se deduce que $\alpha - x = 2\alpha - \alpha'$ es también moda de la distribución, contradiciendo el hecho de que ésta es unimodal. De forma similar, si $\alpha' < \alpha$, se deduce que $2\alpha - \alpha'$ es también moda.

Consecuentemente, la moda ha de ser $\alpha' = \alpha$. ∎