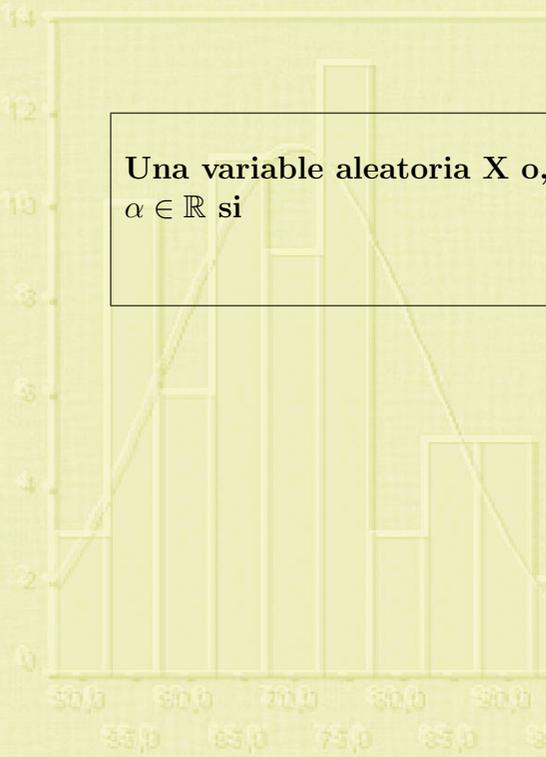




Distribuciones simétricas

Una variable aleatoria X o, equivalentemente, su distribución, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$P(X \leq \alpha + x) = P(X \geq \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Valor de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
blanco	5	0.20
azul	4	0.16
rojo	3	0.12
verde	5	0.20
violeta	1	0.04
metálico	4	0.16
Total	25	1

Distribuciones simétricas

Una variable aleatoria X o, equivalentemente, su distribución, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$P(X \leq \alpha + x) = P(X \geq \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1: condiciones equivalentes de simetría

Una variable aleatoria X es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- i) Las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución.
- ii) $F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x) + P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Distribuciones simétricas

Una variable aleatoria X o, equivalentemente, su distribución, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$P(X \leq \alpha + x) = P(X \geq \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1: condiciones equivalentes de simetría

Una variable aleatoria X es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- i) Las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución.
- ii) $F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x) + P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Demostración:

Distribuciones simétricas

Una variable aleatoria X o, equivalentemente, su distribución, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$P(X \leq \alpha + x) = P(X \geq \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1: condiciones equivalentes de simetría

Una variable aleatoria X es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- i) Las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución.
- ii) $F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x) + P(X = \alpha - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

- i) La condición de simetría de la definición puede expresarse como

$$P(X - \alpha \leq x) = P(\alpha - X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Distribuciones simétricas

Una variable aleatoria X o, equivalentemente, su distribución, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$P(X \leq \alpha + x) = P(X \geq \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1: condiciones equivalentes de simetría

Una variable aleatoria X es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- i) Las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución.
- ii) $F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x) + P(X = \alpha - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

i) La condición de simetría de la definición puede expresarse como

$$P(X - \alpha \leq x) = P(\alpha - X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

lo que significa que las funciones de distribución (y, por tanto, las distribuciones) de las variables $X - \alpha$ y $\alpha - X$ coinciden.

Distribuciones simétricas

Una variable aleatoria X o, equivalentemente, su distribución, es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$P(X \leq \alpha + x) = P(X \geq \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1: condiciones equivalentes de simetría

Una variable aleatoria X es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- i) Las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución.
- ii) $F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x) + P(X = \alpha - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

i) La condición de simetría de la definición puede expresarse como

$$P(X - \alpha \leq x) = P(\alpha - X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

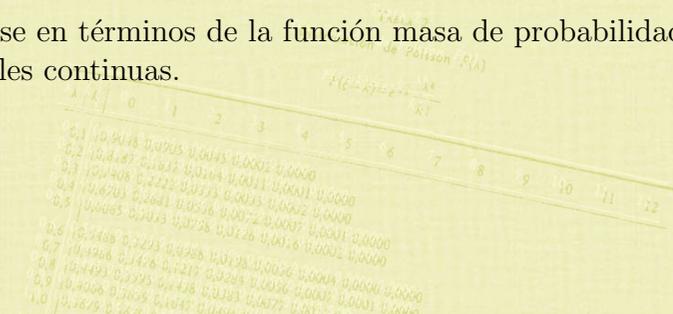
lo que significa que las funciones de distribución (y, por tanto, las distribuciones) de las variables $X - \alpha$ y $\alpha - X$ coinciden.

ii) Es inmediato sin más que tener en cuenta que, de la definición de simetría, $F_X(\alpha + x) = P(X \geq \alpha - x)$ y

$$P(X \geq \alpha - x) = 1 - P(X < \alpha - x) = 1 - [P(X \leq \alpha - x) - P(X = \alpha - x)]. \quad \blacksquare$$



La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.



Valor de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
blanco	5	0.20
gris	4	0.16
rojo	3	0.12
verde	5	0.20
violeta	1	0.04
total	4	0.16
	25	1



x	f(x)
0	0.0000
1	0.0000
2	0.0000
3	0.0000
4	0.0000
5	0.0000
6	0.0000
7	0.0000
8	0.0000
9	0.0000
10	0.0000
11	0.0000
12	0.0000
13	0.0000
14	0.0000
15	0.0000
16	0.0000
17	0.0000
18	0.0000
19	0.0000
20	0.0000
21	0.0000
22	0.0000
23	0.0000
24	0.0000
25	0.0000

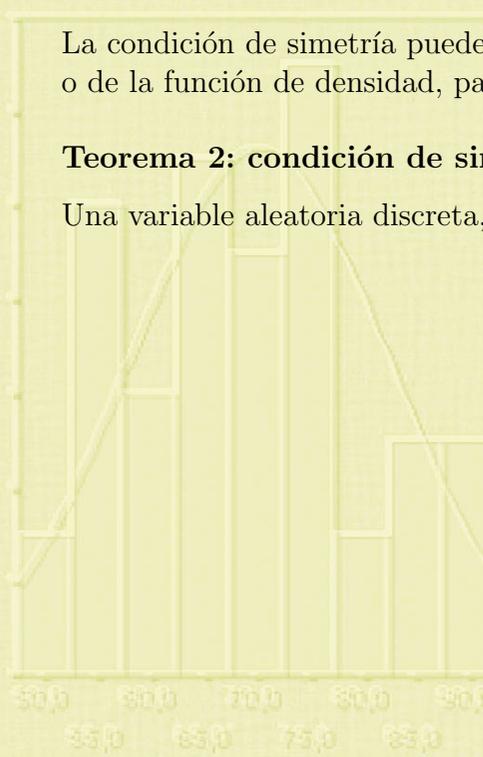


La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X , es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Background collage of mathematical and statistical content:

- Probability Mass Function (PMF) for Poisson:**

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$
- Table: Color Distribution**

Valor de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
blanco	5	0.20
rojo	4	0.16
verde	3	0.12
verde	5	0.20
violeta	1	0.04
total	4	0.16
Total	25	1
- Table: Car Colors**

Color	Count
rojo	1
verde	2
rojo	3
verde	4
rojo	5
verde	6
rojo	7
verde	8
rojo	9
verde	10
rojo	11
verde	12
rojo	13
verde	14
rojo	15
verde	16
rojo	17
verde	18
rojo	19
verde	20
rojo	21
verde	22
rojo	23
verde	24
rojo	25
- Table: Probability Density Function (PDF)**

x	f(x)
1	0.0000
2	0.0000
3	0.0000
4	0.0000
5	0.0000
6	0.0000
7	0.0000
8	0.0000
9	0.0000
10	0.0000
11	0.0000
12	0.0000
13	0.0000
14	0.0000
15	0.0000
16	0.0000
17	0.0000
18	0.0000
19	0.0000
20	0.0000
21	0.0000
22	0.0000
23	0.0000
24	0.0000
25	0.0000



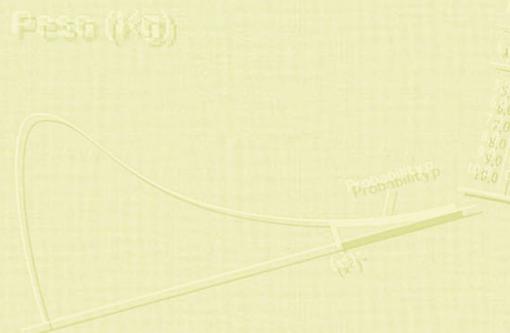
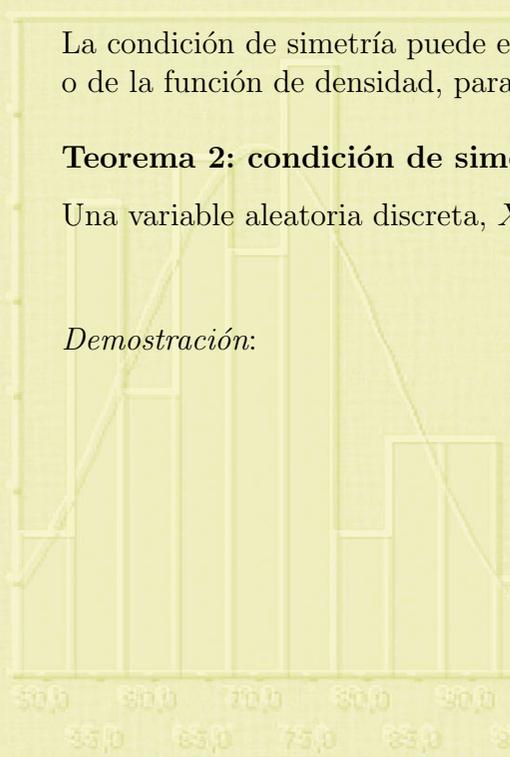
La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X , es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:



Valor de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
blanco	5	0.20
azul	4	0.16
rojo	3	0.12
verde	5	0.20
violeta	1	0.04
metalicado	4	0.16
Total	25	1

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

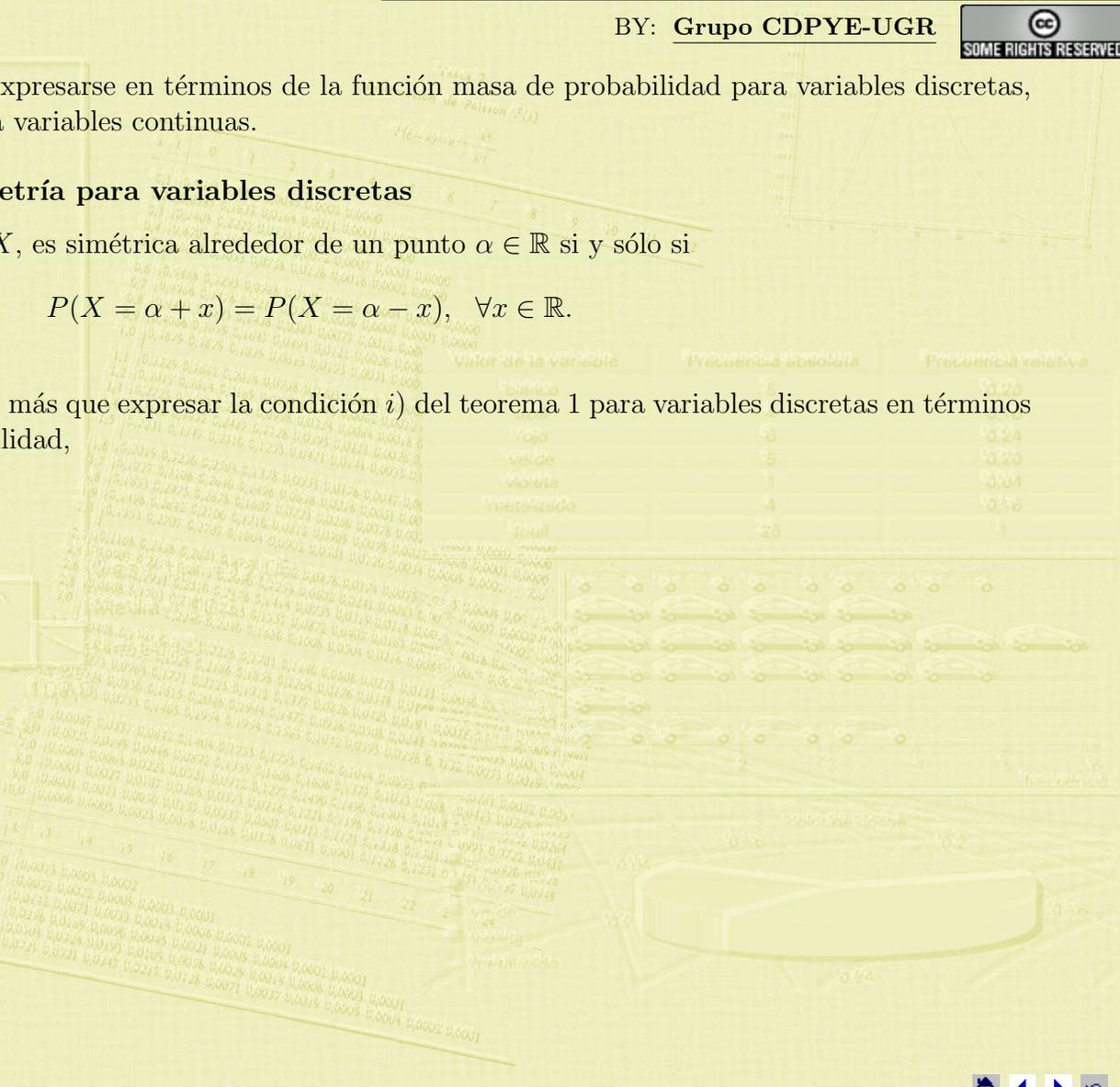
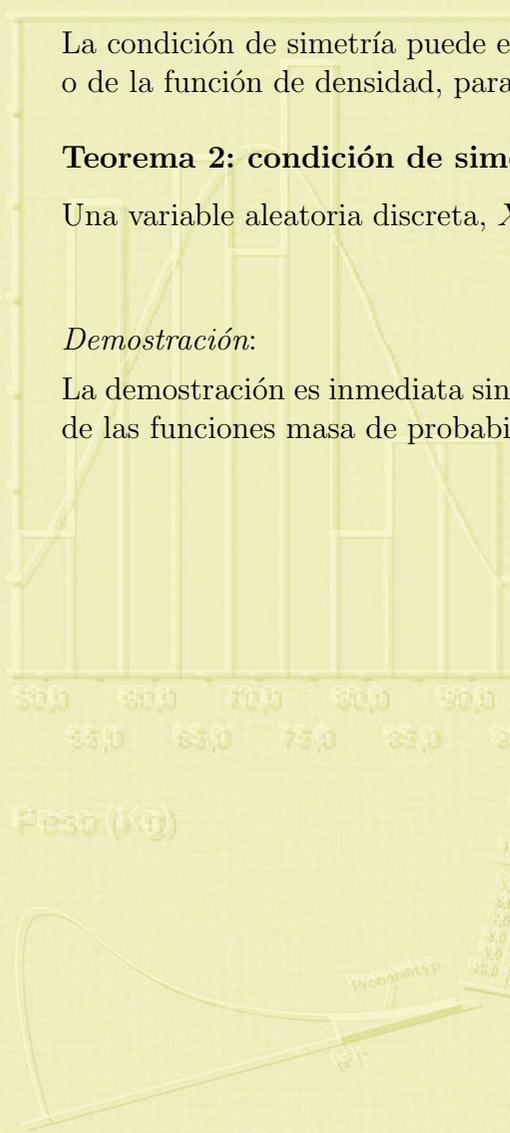
Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X , es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La demostración es inmediata sin más que expresar la condición *i)* del teorema 1 para variables discretas en términos de las funciones masa de probabilidad,



La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X , es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La demostración es inmediata sin más que expresar la condición *i)* del teorema 1 para variables discretas en términos de las funciones masa de probabilidad,

$$P(X - \alpha = x) = P(\alpha - X = x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X , es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La demostración es inmediata sin más que expresar la condición *i*) del teorema 1 para variables discretas en términos de las funciones masa de probabilidad,

$$P(X - \alpha = x) = P(\alpha - X = x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Teorema 3: condición de simetría para variables continuas

Una variable continua, X , con función de densidad f_X , es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X , es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La demostración es inmediata sin más que expresar la condición *i)* del teorema 1 para variables discretas en términos de las funciones masa de probabilidad,

$$P(X - \alpha = x) = P(\alpha - X = x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Teorema 3: condición de simetría para variables continuas

Una variable continua, X , con función de densidad f_X , es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X , es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La demostración es inmediata sin más que expresar la condición *i)* del teorema 1 para variables discretas en términos de las funciones masa de probabilidad,

$$P(X - \alpha = x) = P(\alpha - X = x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Teorema 3: condición de simetría para variables continuas

Una variable continua, X , con función de densidad f_X , es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

Notemos en primer lugar que la condición *ii)* del teorema 1 para variables continuas se expresa como

$$F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X , es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La demostración es inmediata sin más que expresar la condición *i)* del teorema 1 para variables discretas en términos de las funciones masa de probabilidad,

$$P(X - \alpha = x) = P(\alpha - X = x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Teorema 3: condición de simetría para variables continuas

Una variable continua, X , con función de densidad f_X , es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

Notemos en primer lugar que la condición *ii)* del teorema 1 para variables continuas se expresa como

$$F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

de donde, derivando respecto de x , se obtiene la condición para la función de densidad.



La condición de simetría puede expresarse en términos de la función masa de probabilidad para variables discretas, o de la función de densidad, para variables continuas.

Teorema 2: condición de simetría para variables discretas

Una variable aleatoria discreta, X , es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

La demostración es inmediata sin más que expresar la condición *i)* del teorema 1 para variables discretas en términos de las funciones masa de probabilidad,

$$P(X - \alpha = x) = P(\alpha - X = x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Teorema 3: condición de simetría para variables continuas

Una variable continua, X , con función de densidad f_X , es simétrica alrededor de un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

Notemos en primer lugar que la condición *ii)* del teorema 1 para variables continuas se expresa como

$$F_X(\alpha + x) = 1 - F_X(\alpha - x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

de donde, derivando respecto de x , se obtiene la condición para la función de densidad.

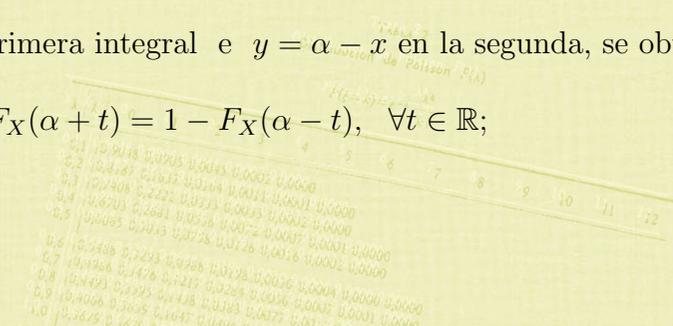
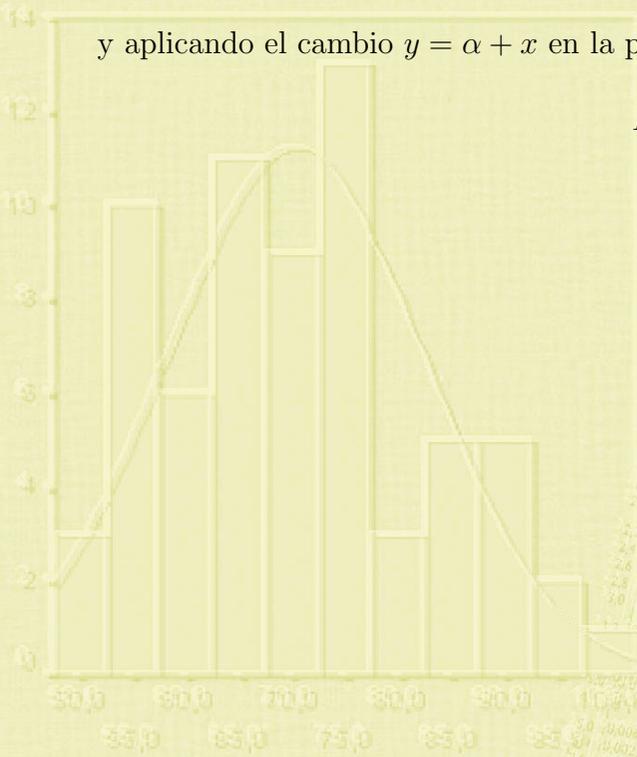
Para demostrar el recíproco notemos que

$$\int_{-\infty}^t f_X(\alpha + x) dx = \int_{-\infty}^t f_X(\alpha - x) dx, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$



y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$



Valor de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
blanco	5	0.20
rojo	4	0.16
verde	5	0.20
violeta	1	0.04
metálico	4	0.16
Total	25	1



Pest (KG)



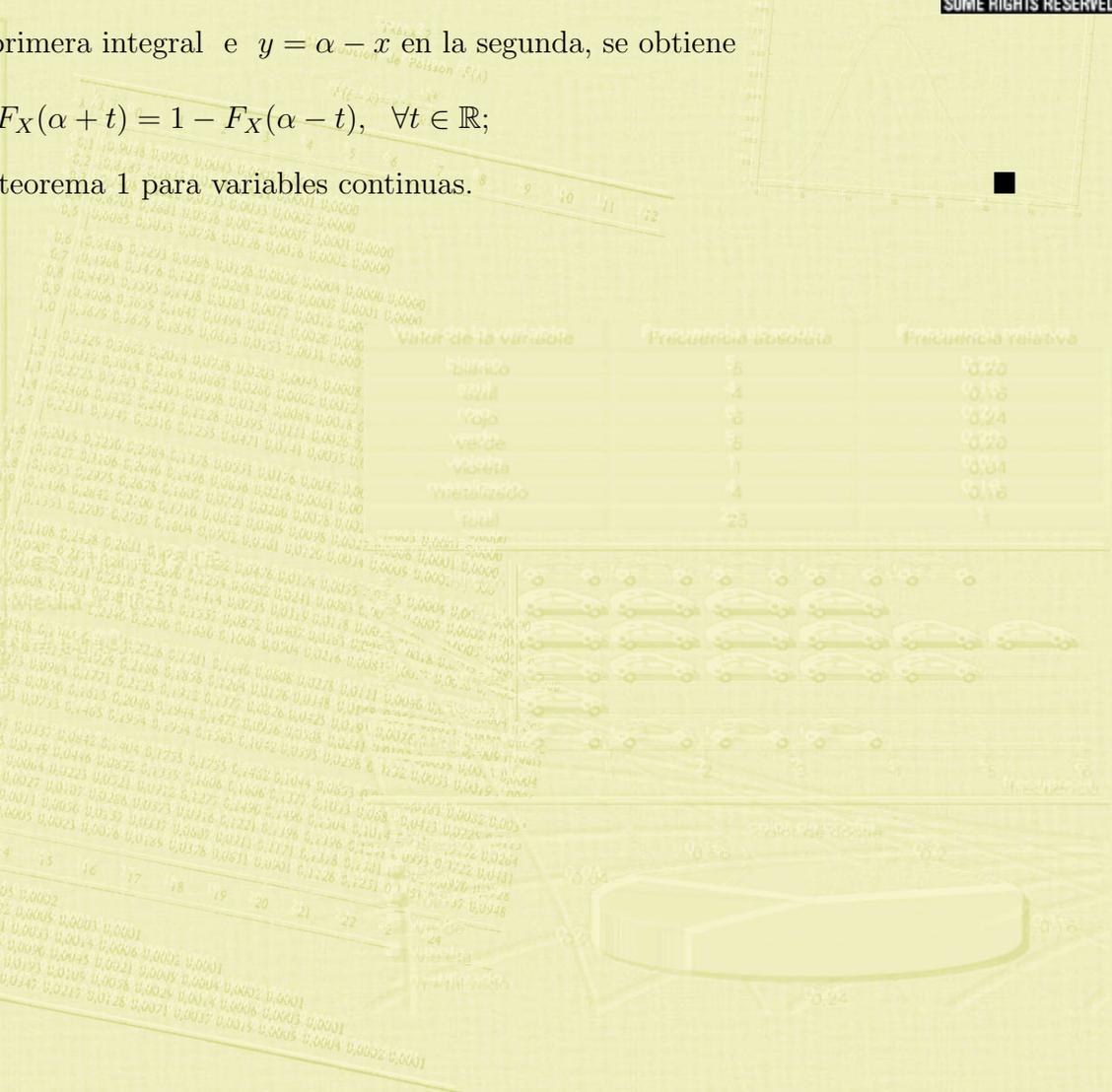
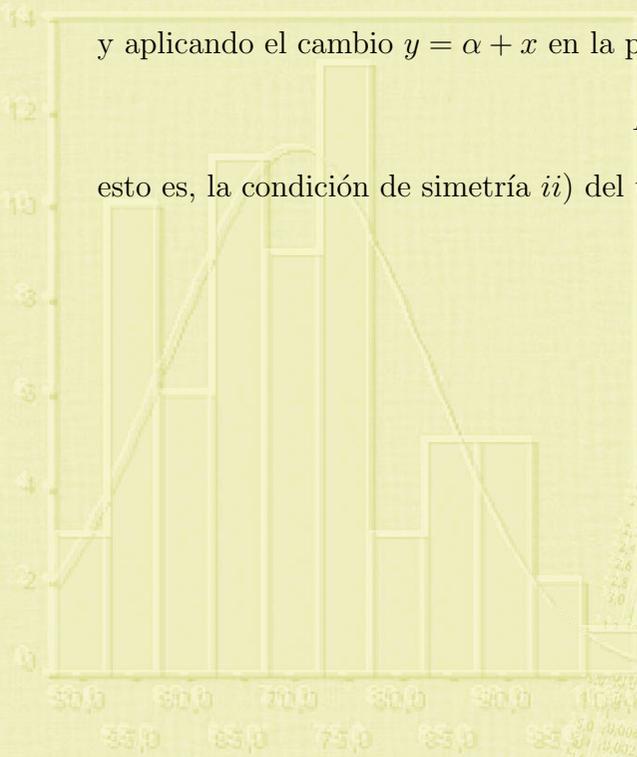
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000



y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría ii) del teorema 1 para variables continuas. ■



Pest (KG)

Probabilidad

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

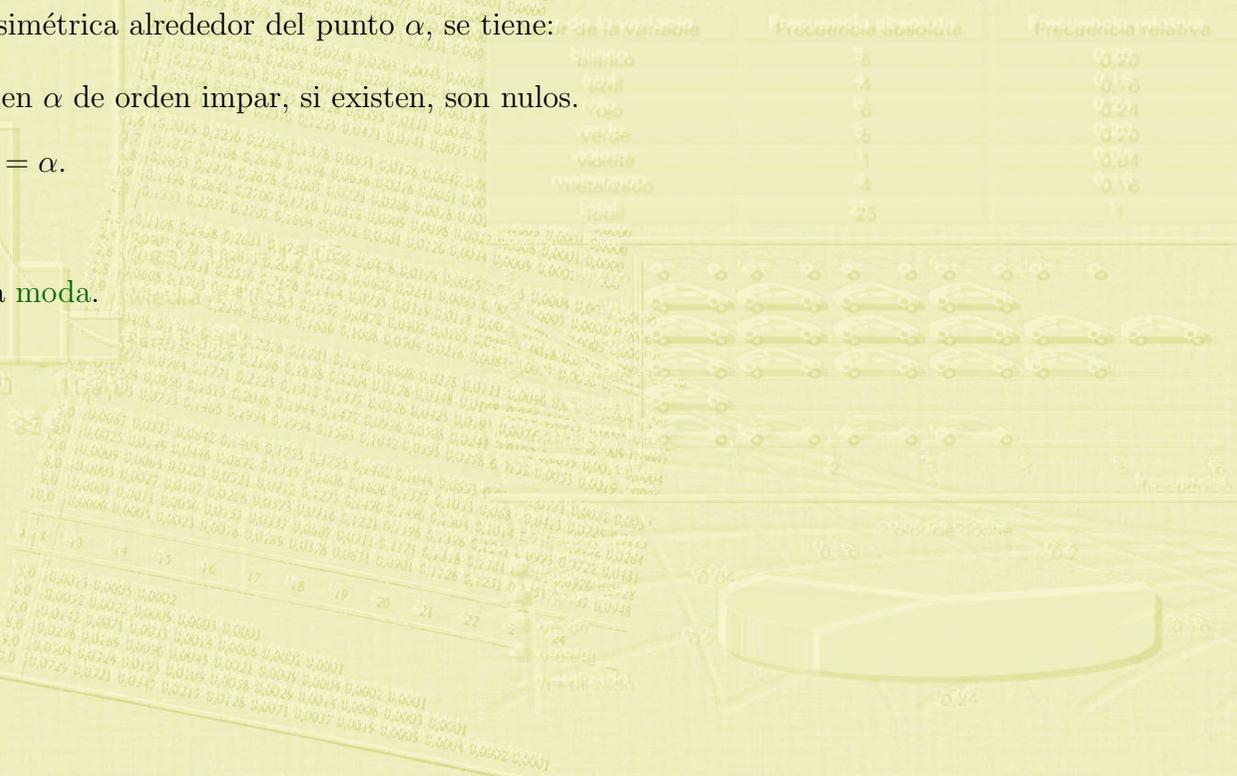
$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii)* del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α , se tiene:

- i)* Los **momentos centrados** en α de orden impar, si existen, son nulos.
- ii)* Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.
- iii)* α es **mediana** de X .
- iv)* Si X es unimodal, α es la **moda**.



y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii)* del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α , se tiene:

- i)* Los momentos centrados en α de orden impar, si existen, son nulos.
- ii)* Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.
- iii)* α es mediana de X .
- iv)* Si X es unimodal, α es la moda.

Demostración:

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii*) del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α , se tiene:

- i) Los **momentos centrados** en α de orden impar, si existen, son nulos.
- ii) Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.
- iii) α es **mediana** de X .
- iv) Si X es unimodal, α es la **moda**.

Demostración:

- i) Por la condición de simetría *i*) del teorema 1, las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución y, por tanto, sus momentos, si existen, coinciden.

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii*) del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α , se tiene:

- i*) Los **momentos centrados** en α de orden impar, si existen, son nulos.
- ii*) Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.
- iii*) α es **mediana** de X .
- iv*) Si X es unimodal, α es la **moda**.

Demostración:

i) Por la condición de simetría *i*) del teorema 1, las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución y, por tanto, sus momentos, si existen, coinciden. Así,

$$E[(X - \alpha)^{2k+1}] = E[(\alpha - X)^{2k+1}], \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii*) del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α , se tiene:

- i*) Los **momentos centrados** en α de orden impar, si existen, son nulos.
- ii*) Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.
- iii*) α es **mediana** de X .
- iv*) Si X es unimodal, α es la **moda**.

Demostración:

i) Por la condición de simetría *i*) del teorema 1, las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución y, por tanto, sus momentos, si existen, coinciden. Así,

$$E[(X - \alpha)^{2k+1}] = E[(\alpha - X)^{2k+1}], \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y teniendo en cuenta que $E[(\alpha - X)^{2k+1}] = -E[(X - \alpha)^{2k+1}]$, se obtiene que $E[(X - \alpha)^{2k+1}] = 0$.

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii)* del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α , se tiene:

- i)* Los **momentos centrados** en α de orden impar, si existen, son nulos.
- ii)* Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.
- iii)* α es **mediana** de X .
- iv)* Si X es unimodal, α es la **moda**.

Demostración:

i) Por la condición de simetría *i)* del teorema 1, las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución y, por tanto, sus momentos, si existen, coinciden. Así,

$$E[(X - \alpha)^{2k+1}] = E[(\alpha - X)^{2k+1}], \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y teniendo en cuenta que $E[(\alpha - X)^{2k+1}] = -E[(X - \alpha)^{2k+1}]$, se obtiene que $E[(X - \alpha)^{2k+1}] = 0$.

ii) Como consecuencia inmediata de *i)* se tiene que $E[X - \alpha] = 0$ o, equivalentemente, $E[X] = \alpha$.

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii)* del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α , se tiene:

- i)* Los **momentos centrados** en α de orden impar, si existen, son nulos.
- ii)* Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.
- iii)* α es **mediana** de X .
- iv)* Si X es unimodal, α es la **moda**.

Demostración:

i) Por la condición de simetría *i)* del teorema 1, las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución y, por tanto, sus momentos, si existen, coinciden. Así,

$$E[(X - \alpha)^{2k+1}] = E[(\alpha - X)^{2k+1}], \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y teniendo en cuenta que $E[(\alpha - X)^{2k+1}] = -E[(X - \alpha)^{2k+1}]$, se obtiene que $E[(X - \alpha)^{2k+1}] = 0$.

ii) Como consecuencia inmediata de *i)* se tiene que $E[X - \alpha] = 0$ o, equivalentemente, $E[X] = \alpha$.

iii) Haciendo $x = 0$ en la definición de simetría, $P(X \leq \alpha) = P(X \geq \alpha)$.

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii)* del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α , se tiene:

- i)* Los **momentos centrados** en α de orden impar, si existen, son nulos.
- ii)* Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.
- iii)* α es **mediana** de X .
- iv)* Si X es unimodal, α es la **moda**.

Demostración:

i) Por la condición de simetría *i)* del teorema 1, las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución y, por tanto, sus momentos, si existen, coinciden. Así,

$$E[(X - \alpha)^{2k+1}] = E[(\alpha - X)^{2k+1}], \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y teniendo en cuenta que $E[(\alpha - X)^{2k+1}] = -E[(X - \alpha)^{2k+1}]$, se obtiene que $E[(X - \alpha)^{2k+1}] = 0$.

ii) Como consecuencia inmediata de *i)* se tiene que $E[X - \alpha] = 0$ o, equivalentemente, $E[X] = \alpha$.

iii) Haciendo $x = 0$ en la definición de simetría, $P(X \leq \alpha) = P(X \geq \alpha)$. De esta propiedad se deduce que tal probabilidad debe ser mayor o igual que $1/2$ ya que, de lo contrario, $P(X \leq \alpha) + P(X \geq \alpha) < 1$.

y aplicando el cambio $y = \alpha + x$ en la primera integral e $y = \alpha - x$ en la segunda, se obtiene

$$F_X(\alpha + t) = 1 - F_X(\alpha - t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

esto es, la condición de simetría *ii)* del teorema 1 para variables continuas. ■

Propiedades de las distribuciones simétricas

Si X es una variable aleatoria simétrica alrededor del punto α , se tiene:

- i)* Los **momentos centrados** en α de orden impar, si existen, son nulos.
- ii)* Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.
- iii)* α es **mediana** de X .
- iv)* Si X es unimodal, α es la **moda**.

Demostración:

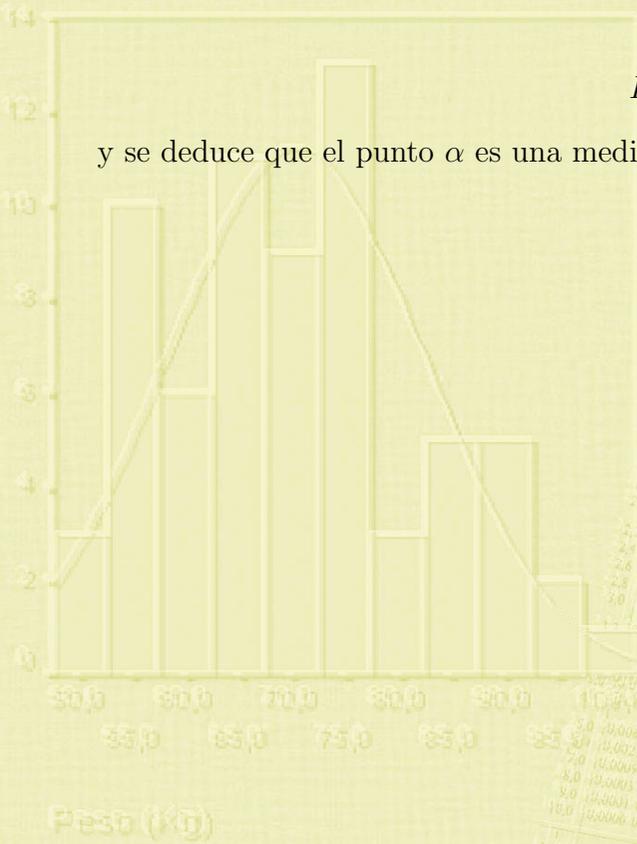
i) Por la condición de simetría *i)* del teorema 1, las variables aleatorias $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución y, por tanto, sus momentos, si existen, coinciden. Así,

$$E[(X - \alpha)^{2k+1}] = E[(\alpha - X)^{2k+1}], \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y teniendo en cuenta que $E[(\alpha - X)^{2k+1}] = -E[(X - \alpha)^{2k+1}]$, se obtiene que $E[(X - \alpha)^{2k+1}] = 0$.

ii) Como consecuencia inmediata de *i)* se tiene que $E[X - \alpha] = 0$ o, equivalentemente, $E[X] = \alpha$.

iii) Haciendo $x = 0$ en la definición de simetría, $P(X \leq \alpha) = P(X \geq \alpha)$. De esta propiedad se deduce que tal probabilidad debe ser mayor o igual que $1/2$ ya que, de lo contrario, $P(X \leq \alpha) + P(X \geq \alpha) < 1$. Entonces,



$$P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2},$$

y se deduce que el punto α es una mediana de la distribución de X .

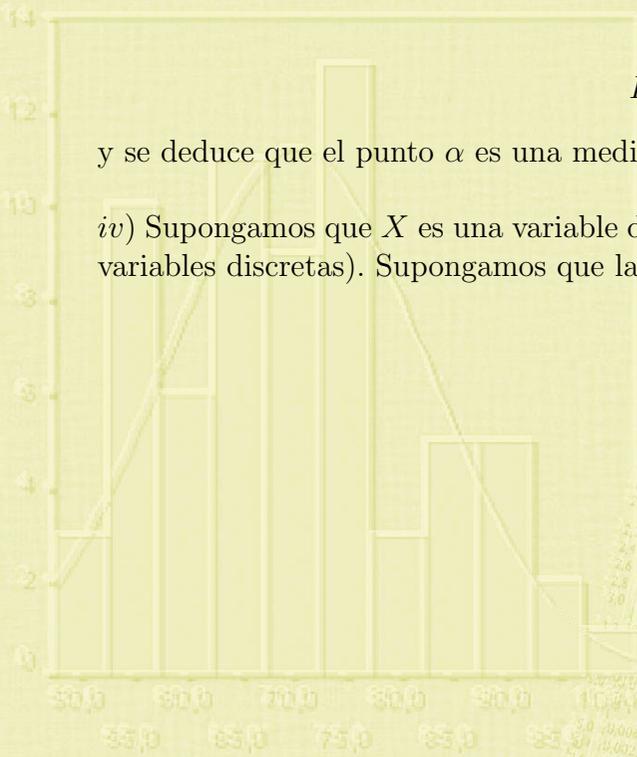
Tabla 2
Distribución de Poisson

k	$P(X=k)$	$P(X \leq k)$	$P(X \geq k)$
0	0,0000	0,0000	1,0000
1	0,0000	0,0000	0,9999
2	0,0000	0,0000	0,9998
3	0,0000	0,0000	0,9997
4	0,0000	0,0000	0,9996
5	0,0000	0,0000	0,9995
6	0,0000	0,0000	0,9994
7	0,0000	0,0000	0,9993
8	0,0000	0,0000	0,9992
9	0,0000	0,0000	0,9991
10	0,0000	0,0000	0,9990
11	0,0000	0,0000	0,9989
12	0,0000	0,0000	0,9988

Valor de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
blanco	5	0,20
rojo	4	0,16
verde	3	0,12
violeta	5	0,20
total	1	0,04
total	4	0,16
total	25	1

k	$P(X=k)$	$P(X \leq k)$	$P(X \geq k)$
0	0,0000	0,0000	1,0000
1	0,0000	0,0000	0,9999
2	0,0000	0,0000	0,9998
3	0,0000	0,0000	0,9997
4	0,0000	0,0000	0,9996
5	0,0000	0,0000	0,9995
6	0,0000	0,0000	0,9994
7	0,0000	0,0000	0,9993
8	0,0000	0,0000	0,9992
9	0,0000	0,0000	0,9991
10	0,0000	0,0000	0,9990
11	0,0000	0,0000	0,9989
12	0,0000	0,0000	0,9988
13	0,0000	0,0000	0,9987
14	0,0000	0,0000	0,9986
15	0,0000	0,0000	0,9985
16	0,0000	0,0000	0,9984
17	0,0000	0,0000	0,9983
18	0,0000	0,0000	0,9982
19	0,0000	0,0000	0,9981
20	0,0000	0,0000	0,9980
21	0,0000	0,0000	0,9979
22	0,0000	0,0000	0,9978
23	0,0000	0,0000	0,9977
24	0,0000	0,0000	0,9976
25	0,0000	0,0000	0,9975





$$P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2},$$

y se deduce que el punto α es una mediana de la distribución de X .

iv) Supongamos que X es una variable de tipo continuo con función de densidad f_X (de igual forma se razonará para variables discretas). Supongamos que la moda es $\alpha' \neq \alpha$.

Tabla 2
Distribución de Poisson

k	$P(X=k)$	$P(X \leq k)$	$P(X \geq k)$
0	0,0000	0,0000	1,0000
1	0,0000	0,0000	0,9999
2	0,0000	0,0000	0,9998
3	0,0000	0,0000	0,9996
4	0,0000	0,0000	0,9993
5	0,0000	0,0000	0,9988
6	0,0000	0,0000	0,9980
7	0,0000	0,0000	0,9969
8	0,0000	0,0000	0,9953
9	0,0000	0,0000	0,9932
10	0,0000	0,0000	0,9906
11	0,0000	0,0000	0,9875
12	0,0000	0,0000	0,9839
13	0,0000	0,0000	0,9798
14	0,0000	0,0000	0,9752
15	0,0000	0,0000	0,9702
16	0,0000	0,0000	0,9648
17	0,0000	0,0000	0,9591
18	0,0000	0,0000	0,9530
19	0,0000	0,0000	0,9466
20	0,0000	0,0000	0,9400
21	0,0000	0,0000	0,9331
22	0,0000	0,0000	0,9260
23	0,0000	0,0000	0,9187
24	0,0000	0,0000	0,9112
25	0,0000	0,0000	0,9036
26	0,0000	0,0000	0,8958
27	0,0000	0,0000	0,8878
28	0,0000	0,0000	0,8796
29	0,0000	0,0000	0,8712
30	0,0000	0,0000	0,8627
31	0,0000	0,0000	0,8541
32	0,0000	0,0000	0,8454
33	0,0000	0,0000	0,8366
34	0,0000	0,0000	0,8277
35	0,0000	0,0000	0,8187
36	0,0000	0,0000	0,8096
37	0,0000	0,0000	0,8004
38	0,0000	0,0000	0,7911
39	0,0000	0,0000	0,7817
40	0,0000	0,0000	0,7722
41	0,0000	0,0000	0,7627
42	0,0000	0,0000	0,7531
43	0,0000	0,0000	0,7435
44	0,0000	0,0000	0,7338
45	0,0000	0,0000	0,7241
46	0,0000	0,0000	0,7143
47	0,0000	0,0000	0,7045
48	0,0000	0,0000	0,6946
49	0,0000	0,0000	0,6847
50	0,0000	0,0000	0,6747

Valor de la variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
blanco	5	0,20
azul	4	0,16
rojo	3	0,12
verde	5	0,20
violeta	1	0,04
metálico	4	0,16
Total	25	1

k	$P(X=k)$	$P(X \leq k)$	$P(X \geq k)$
0	0,0000	0,0000	1,0000
1	0,0000	0,0000	0,9999
2	0,0000	0,0000	0,9998
3	0,0000	0,0000	0,9996
4	0,0000	0,0000	0,9993
5	0,0000	0,0000	0,9988
6	0,0000	0,0000	0,9980
7	0,0000	0,0000	0,9969
8	0,0000	0,0000	0,9953
9	0,0000	0,0000	0,9932
10	0,0000	0,0000	0,9906
11	0,0000	0,0000	0,9875
12	0,0000	0,0000	0,9839
13	0,0000	0,0000	0,9798
14	0,0000	0,0000	0,9752
15	0,0000	0,0000	0,9702
16	0,0000	0,0000	0,9648
17	0,0000	0,0000	0,9591
18	0,0000	0,0000	0,9530
19	0,0000	0,0000	0,9466
20	0,0000	0,0000	0,9400
21	0,0000	0,0000	0,9331
22	0,0000	0,0000	0,9260
23	0,0000	0,0000	0,9187
24	0,0000	0,0000	0,9112
25	0,0000	0,0000	0,9036
26	0,0000	0,0000	0,8958
27	0,0000	0,0000	0,8878
28	0,0000	0,0000	0,8796
29	0,0000	0,0000	0,8712
30	0,0000	0,0000	0,8627
31	0,0000	0,0000	0,8541
32	0,0000	0,0000	0,8454
33	0,0000	0,0000	0,8366
34	0,0000	0,0000	0,8277
35	0,0000	0,0000	0,8187
36	0,0000	0,0000	0,8096
37	0,0000	0,0000	0,8004
38	0,0000	0,0000	0,7911
39	0,0000	0,0000	0,7817
40	0,0000	0,0000	0,7722
41	0,0000	0,0000	0,7627
42	0,0000	0,0000	0,7531
43	0,0000	0,0000	0,7435
44	0,0000	0,0000	0,7338
45	0,0000	0,0000	0,7241
46	0,0000	0,0000	0,7143
47	0,0000	0,0000	0,7045
48	0,0000	0,0000	0,6946
49	0,0000	0,0000	0,6847
50	0,0000	0,0000	0,6747



$$P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2},$$

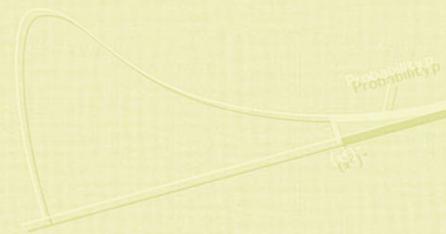
y se deduce que el punto α es una mediana de la distribución de X .

iv) Supongamos que X es una variable de tipo continuo con función de densidad f_X (de igual forma se razonará para variables discretas). Supongamos que la moda es $\alpha' \neq \alpha$.

Si $\alpha' > \alpha$ y $x = \alpha' - \alpha$, teniendo en cuenta la condición de simetría para variables continuas, se tiene

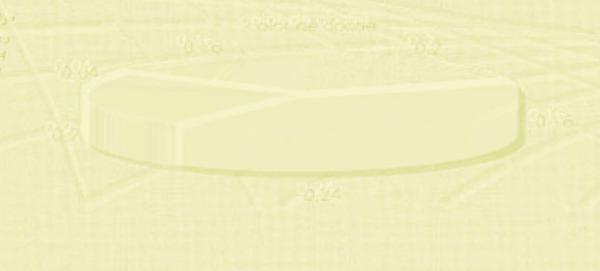
$$f_X(\alpha') = f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x),$$

Peso (kg)



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
0.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Color	Frecuencia relativa
Blanco	0.20
Azul	0.15
Rojo	0.24
Verde	0.20
Violeta	0.04
Naranja	0.16
Total	1.00



$$P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2},$$

y se deduce que el punto α es una mediana de la distribución de X .

iv) Supongamos que X es una variable de tipo continuo con función de densidad f_X (de igual forma se razonará para variables discretas). Supongamos que la moda es $\alpha' \neq \alpha$.

Si $\alpha' > \alpha$ y $x = \alpha' - \alpha$, teniendo en cuenta la condición de simetría para variables continuas, se tiene

$$f_X(\alpha') = f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x),$$

de donde se deduce que $\alpha - x = 2\alpha - \alpha'$ es también moda de la distribución, contradiciendo el hecho de que ésta es unimodal.

$$P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2},$$

y se deduce que el punto α es una mediana de la distribución de X .

iv) Supongamos que X es una variable de tipo continuo con función de densidad f_X (de igual forma se razonará para variables discretas). Supongamos que la moda es $\alpha' \neq \alpha$.

Si $\alpha' > \alpha$ y $x = \alpha' - \alpha$, teniendo en cuenta la condición de simetría para variables continuas, se tiene

$$f_X(\alpha') = f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x),$$

de donde se deduce que $\alpha - x = 2\alpha - \alpha'$ es también moda de la distribución, contradiciendo el hecho de que ésta es unimodal. De forma similar, si $\alpha' < \alpha$, se deduce que $2\alpha - \alpha'$ es también moda.

$$P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2},$$

y se deduce que el punto α es una mediana de la distribución de X .

iv) Supongamos que X es una variable de tipo continuo con función de densidad f_X (de igual forma se razonará para variables discretas). Supongamos que la moda es $\alpha' \neq \alpha$.

Si $\alpha' > \alpha$ y $x = \alpha' - \alpha$, teniendo en cuenta la condición de simetría para variables continuas, se tiene

$$f_X(\alpha') = f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x),$$

de donde se deduce que $\alpha - x = 2\alpha - \alpha'$ es también moda de la distribución, contradiciendo el hecho de que ésta es unimodal. De forma similar, si $\alpha' < \alpha$, se deduce que $2\alpha - \alpha'$ es también moda.

Consecuentemente, la moda ha de ser $\alpha' = \alpha$. ■