La construcción del producto topológico se extiende al caso de una cantidad finita de espacios (e incluso de una infinita, aunque ese caso no lo trataremos aquí).

Nota 7.9. Dados (X_j, τ_j), $j = 1, \dots, n$, $n \geq 2$, una familia finita de espacios topológicos, por un procedimiento inductivo estandar podemos definir $\big(\prod_{j=1}^n X_j, \tau(\prod_{j=1}^n \tau_j)\big)$ como

$$\Big((\prod_{j=1}^{n-1} X_j) \times X_n, \tau(\tau(\prod_{j=1}^{n-1} \tau_j) \times \tau_n)\Big).$$

Salvo la identificación canónica $(\prod_{j=1}^{n-1} X_j) \times X_n \equiv \prod_{j=1}^n X_j$, $((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) \equiv (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, la topología $\tau(\prod_{j=1}^n \tau_j)$ no es sino la que admite por base a $\prod_{j=1}^n \tau_j = \{O_1 \times \overset{n}{\dots} O_n \; : \; O_j \in \tau_j, \; j = 1, \dots, n\}$

Todos los enunciados probados para el caso $n = 2$ admiten una traslación natural y análoga al caso general del producto de n espacios. Dejamos los detalles al alumno.

8. Topología cociente: Identificaciones

Una de las construcciones más interesantes en Topología es la que permite inducir la estructura de espacio topológico sobre el cociente de un espacio topológico por una relación de equivalencia. En ocasiones, es común identificar puntos de un espacio o realizar operaciones de pegado en el mismo para generar un objeto nuevo. Sirva como ejemplo intuitivo el caso de una cinta de papel, que tras pegar o identificar puntos simétricos de dos de sus bordes paralelos u opuestos proporciona un cilindro. La misma operación de pegado pero realizando previamente un bucle en la cinta genera una *cinta de Möbius*. El propio cilindro puede ser sometido a este tipo de procedimientos, si se dobla convenientemente e identifican los círculos opuestos obtenemos un neumático (toro topológico). Son muchas las posibilidades que se nos ocurren para este tipo de operaciones de pegado, por lo que podemos afirma sin temor a equivocarnos que estamos ante una herramienta crucial para la construcción de un gran número de espacios topológicos.

Para una mayor flexibilidad a la hora de presentar estas ideas, es apropiado introducir el concepto de topología final para una aplicación e identificación topológica.

Teorema 8.1. *Sean (X, τ) un espacio topológico, Y un conjunto y $f\colon X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. Llamemos $\tau[f] := \{O \subseteq Y \; : \; f^{-1}(O) \in \tau\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Entonces*

(a) *$\tau[f]$ es una topología en Y.*
(b) *$\tau[f]$ es la más fina topología en Y haciendo a f continua.*
(c) *Dado un espacio topológico (Z, τ') y una aplicación $h\colon \, : Y \to Z$,*

$$h\colon (Y, \tau[f]) \to (Z, \tau') \text{ es continua} \iff h \circ f\colon (X, \tau) \to (Z, \tau') \text{ es continua.}$$

Dem: Probemos (a). Como $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$ y $f^{-1}(Y) = X \in \tau$, $\emptyset, Y \in \tau[f]$.

Si $O_1, O_2 \in \tau[f]$, $f^{-1}(O_j) \in \tau$, $j = 1, 2$, de donde $f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2) = f^{-1}(O_1 \cap O_2) \in \tau$ y $O_1 \cap O_2 \in \tau[f]$.

Por último, si $\{O_\lambda \; : \; \lambda \in \Lambda\} \subseteq \tau[f]$, por el hecho de que $f^{-1}(O_\lambda) \in \tau$ para todo $\lambda \in \Lambda$ uno deduce que $\cup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(O_\lambda) = f^{-1}\big(\cup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda\big) \in \tau$, esto es $\cup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \tau[f]$.

Demostremos ahora (b). Obviamente, por definición $f\colon (X, \tau) \to (Y, \tau[f])$ es continua. Sea $\widehat{\tau}$ cualquier topología en Y tal que $f\colon (X, \tau) \to (Y, \widehat{\tau})$ es continua. Por continuidad, si $O \in \widehat{\tau}$ entonces $f^(O) \in \tau$, de donde $O \in \tau[f]$ y $\widehat{\tau} \subseteq \tau[f]$.

Para probar (c), observemos que $h\colon (Y, \tau[f]) \to (Z, \tau')$ es continua si y sólo si $h^{-1}(O) \in \tau[f]$ para todo $O \in \tau'$, esto es, si y solo si $f^{-1}(h^{-1}(O)) = (h \circ f)^{-1}(O) \in \tau$ para todo $O \in \tau'$:

téngase en cuenta la definición de $\tau[f]$. Pero este último enunciado es equivalente a decir que $h \circ f\colon (X,\tau) \to (Z,\tau')$ es continua. $\square$

Definición 8.2. Dados un espacio topológico (X,τ), un conjunto Y y una aplicación sobreyectiva $f\colon X \to Y$, la topología $\tau[f]$ del Teorema 8.1 será referida como *topología final* inducida por la aplicación f en Y.

Definición 8.3. Una aplicación $f\colon (X,\tau) \to (Y,\tau')$ se dice una *identificación topológica* si y solo si f es sobreyectiva y $\tau' = \tau[f]$. En este caso también se dice que (Y,τ') es el *espacio identificación* asociado al espacio topológico (X,τ) y a la aplicación sobreyectiva $f\colon X \to Y$.

Corolario 8.4. *Sean (X,τ) un espacio topológico, Y un conjunto y $f\colon X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. Llamemos $\mathcal{F}[f] := \{F \subseteq Y \,:\, f^{-1}(F) \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$, donde $\mathcal{F}$ es la familia de cerrados en (X,τ). Entonces*

(a) *$\mathcal{F}[f]$ es la familia de cerrados de $\tau[f]$.*
(b) *Si τ' es una topología en Y tal que $f\colon (X,\tau) \to (Y,\tau')$ es continua $\Longrightarrow \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}[f]$, donde $\mathcal{F}'$ es la familia de cerrados de τ'.*

Dem: Obsérvese que $\tau[f] = \{Y - F \,:\, F \in \mathcal{F}[f]\}$ y utilícese el Toerema 8.1. $\square$

Dada una aplicación sobreyectiva $f\colon X \to Y$, un subconjunto $A \subseteq X$ se dice *f-saturado* si $f^{-1}(f(A)) = A$. En ese contexto, si τ es una topología en X entonces

$$\tau[f] = \{f(O) \,:\, O \in \tau \text{ y } O \text{ es } f\text{-saturado}\}.$$

La prueba de estos dos enunciados es trivial por definición de identificación.

Un caso particular especialmente interesante es el de las proyecciones al cociente por una relación de equivalencia.

Definición 8.5. Sea (X,τ) un espacio topológico y sea R una relación de equivalencia en X. Sean $X/R := \{[x] \,:\, x \in X\}$ el espacio cociente de las clases de equivalencia de R en X y $\pi\colon X \to X/R$, $\pi(x) = [x]$, la correspondiente proyección.

La topología $\tau/R := \tau[\pi]$ es conocida como la *topología cociente* asociada a τ y R. También se dice que $(X/R, \tau/R)$ es el espacio topológico cociente de (X,τ) por la relación de equivalencia R.

Obviamente, en las condiciones de la definición anterior $\pi\colon (X,\tau) \to (X/R,\tau/R)$ es una identificación. Por tanto, el Teorema 8.1 nos dice que:

Corolario 8.6. *Sea (X,τ) un espacio topológico y R una relación de equivalencia en X. Sea $(X/R,\tau/R)$ el espacio topológico cociente y $\pi\colon (X,\tau) \to (X/R,\tau/R)$ la aplicación proyección (identificación).*

Entonces

(a) *τ/R es la más fina topología en X/R haciendo a π continua.*
(b) *Dado un espacio topológico (Z,τ') y una aplicación $h\colon\ \colon X/R \to Z$,*

$$h\colon (X/R,\tau/R) \to (Z,\tau') \text{ es continua} \iff h \circ \pi\colon (X,\tau) \to (Z,\tau') \text{ es continua.}$$

Tal y como se ha presentado el concepto de espacio topológico cociente, pareciera un caso particular del aparentemente más general de espacio identificación. Sin embargo, los espacios identificación y los cocientes topológicos son dos construcciones esencialmente equiparables o equivalentes. Vamos a explicar por qué.

Definición 8.7. Sean X e Y dos conjuntos, y sea $f\colon X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. Denotaremos por R_f a la relación binaria de equivalencia en X dada por:

$$xR_f y \iff f(x) = f(y).$$

Denotaremos por $\widehat{f} : X/R_f \to Y$ a la única aplicación biyectiva satisfaciendo $\widehat{f} \circ \pi = f$. Para ser más preciso,

$$\widehat{f} : X/R_f \to Y, \;\; \widehat{f}([x]) = f(x).$$

Teorema 8.8. *Sea $f\colon (X,\tau) \to (Y, \tau[f])$ una identificación topológica, y sea $\pi : (X,\tau) \to (X/R_f, \tau/R_f)$ la proyección topológica al cociente $(X/R_f, \tau/R_f)$.*

Entonces $\widehat{f} : (X/R_f, \tau/R_f) \to (Y, \tau[f])$, $\widehat{f}([x]) = f(x)$, es un homeomorfismo.

Dem: Como $\widehat{f} \circ \pi = f$ es continua, $\widehat{f}$ es continua por el Corolario 8.6-(b) (o el Teorema 8.1-(c)).

Como $\widehat{f}^{-1} \circ f = \pi$ es continua, $\widehat{f}^{-1}$ es continua por el Teorema 8.1-(c). □

El mensaje de este teorema es que, salvo un homeomorfismo (que no es sino la equivalencia topológica entre espacios) todo espacio identificación es un espacio cociente. Este resultado es útil para reconocer algunos espacios cociente como comprobaremos más adelante.

Es interesante tener criterios operativos para decidir si una aplicación es una identificación. Ese es el objetivo de la siguiente:

Teorema 8.9. *Sea $f\colon (X,\tau) \to (Y,\tau')$ una aplicación. En cualquiera de las siguientes tres circunstancias f es una identificación:*

(a) *f sobreyectiva, continua y abierta.*
(b) *f sobreyectiva, continua y cerrada.*
(c) *f sobreyectiva, continua y admite una inversa continua a la derecha ($\exists g\colon (Y,\tau') \to (X,\tau)$ sobreyectiva y continua tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$).*

Dem: Demostremos (a). Veamos pues que $\tau' = \tau[f]$. Como f es continua, el Teorema 8.1-(b) nos da que $\tau' \subseteq \tau[f]$. Para la otra inclusión tomemos $O \in \tau[f]$, esto es, $O \subseteq Y$ con $f^{-1}(O) \in \tau$. Como f es abierta, $f(f^{-1}(O)) \in \tau'$, y por la sobreyectividad $O = f(f^{-1}(O)) \in \tau'$. Esto prueba que $\tau' = \tau[f]$.

Probemos (b). en este caso veamos que $\mathcal{F}' = \mathcal{F}[f]$, donde $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}[f]$ son las familias de cerrados en (Y,τ') y $(Y,\tau[f])$, respectivamente; ver Corolario 8.4. Como f es continua, el Corolario 8.4-(b) nos da que $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}[f]$. Para la otra inclusión tomemos $F \in \mathcal{F}[f]$, esto es, $F \subseteq Y$ con $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}$, donde $\mathcal{F}$ es la familia de cerrados en (X,τ). Como f es cerrada, $f(f^{-1}(F)) \in \mathcal{F}'$, y por la sobreyectividad $F = f(f^{-1}(F)) \in \mathcal{F}'$. Esto prueba que $\mathcal{F}' = \mathcal{F}[f]$.

Por último, demostremos (c). Como arriba veamos pues que $\tau' = \tau[f]$. Como f es continua, el Teorema 8.1-(b) nos da que $\tau' \subseteq \tau[f]$. Para probar la otra inclusión, tomemos $O \in \tau[f]$, esto es, $O \subseteq Y$ con $f^{-1}(O) \in \tau$. Como g es continua, $g^{-1}(f^{-1}(O)) = (f \circ g)^{-1}(O) \in \tau'$, de donde al ser $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ deducimos que $O \in \tau'$. Esto prueba que $\tau' = \tau[f]$. □

Como complemento al Teorema 8.9, ofrecemos el siguiente corolario.

Corolario 8.10. *Consideremos (X_j, d_j), $j = 1, 2$, dos espacios métricos, donde (X_1, d_1) tiene la siguiente propiedad:* "Toda sucesión acotada en (X_1, d_1) admite una parcial convergente".

Supongamos que $f\colon (X_1, \tau[d_1]) \to (X_2, \tau[d_2])$ es una aplicación sobreyectiva y continua satisfaciendo que $f^{-1}(A)$ es acotado en (X_1, d_1) para todo $A \subseteq X_2$ acotado en (X_2, d_2).

Entonces f es una identificación.

En particular, si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ son subconjuntos dotados de la correspondiente topología euclidiana, X es cerrado en $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$, y $f\colon (X, \tau_u) \to (Y, \tau_u)$ es una aplicación sobreyectiva y continua satisfaciendo que $f^{-1}(A)$ es acotado para todo $A \subseteq Y$ acotado, entonces f es una identificación.

Dem: En ambos casos f es una aplicación cerrada como consecuencia del Teorema 5.6 y del Corolario 5.7, respectivamente. Téngase en cuenta el Toerema 8.9-(b). $\square$

Para acabar la parte teórica del tema, comentemos algunas propiedades básicas de las identificaciones.

Proposición 8.11. *Los siguientes enunciados son ciertos:*

(a) *Si $f_1\colon (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ y $f_2\colon (X_2, \tau_2) \to (X_3, \tau_3)$ son identificaciones entonces $f_2 \circ f_1\colon (X_1, \tau_1) \to (X_3, \tau_3)$ es una identificación.*
(b) *Si $f_1\colon (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ es una identificación y $f_2\colon (X_2, \tau_2) \to (X_3, \tau_3)$ una aplicación continua tal que $f_2 \circ f_1\colon (X_1, \tau_1) \to (X_3, \tau_3)$ es identificación, entonces f_2 es una identificación.*
(c) *Si $f\colon (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ es una aplicación inyectiva,*

$$f \text{ es una identificación} \iff f \text{ es un homeomorfismo.}$$

Dem: Demostremos (a). Por hipótesis, $\tau_2 = \tau_1[f_1]$ y $\tau_3 = \tau_2[f_2]$, y hemos de probar que $\tau_3 = \tau_1[f_2 \circ f_1]$. Como f_1 y f_2 son continuas por ser identificaciones, $f_2 \circ f_1$ es continua y por tanto $\tau_3 \subseteq \tau_1[f_2 \circ f_1]$ por el Teorema 8.1-(b). Para comprobar la otra inclusión, sea $O \in \tau_1[f_2 \circ f_1]$ un abierto arbitrario. Por definición de $\tau_1[f_2 \circ f_1]$, $(f_2 \circ f_1)^{-1}(O) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(O)) \in \tau_1$. Pero esto implica que $f_2^{-1}(O) \in \tau_1[f_1] = \tau_2$ por ser f_1 una identificación, y análogamente que $O \in \tau_2[f_2] = \tau_3$ por ser f_2 una identificación.

Probemos (b). Por hipótesis $\tau_2 = \tau_1[f_1]$ y $\tau_3 = \tau_1[f_2 \circ f_1]$, y hemos de probar que $\tau_3 = \tau_2[f_2]$. Como f_2 es continua, el Teorema 8.1-(b) nos dice que $\tau_3 \subseteq \tau_2[f_2]$. Para la otra inclusión tomemos $O \in \tau_2[f_2]$, esto es, tal que $f_2^{-1}(O) \in \tau_2 = \tau_1[f_1]$. Esto implica que $f_1^{-1}(f_2^{-1}(O)) = (f_2 \circ f_1)^{-1}(O) \in \tau_1$, de donde $O \in \tau_1[f_2 \circ f_1] = \tau_3$, como queríamos demostrar.

Por último, demostremos (c). Obviamente, si f es un homeomorfismo entonces es una identificación (por ejemplo, es sobreyectiva, continua y abierta).

Supongamos ahora que f es una identificación. Como f ha de ser sobreyectiva deducimos que f es biyectiva. También de nuestras hipótesis f es continua, por lo que basta con demostrar que f es abierta. Sea $O \in \tau_1$ y consideremos $f(O) \subseteq X_2$. Como $f^{-1}(f(O)) = O \in \tau_1$, deducimos que $f(O) \in \tau_1[f]$. Pero $\tau_1[f] = \tau_2$ por ser f identificación, de donde $f(O) \in \tau_2$ y f es abierta. $\square$

8.1. **Ejemplos notables de espacios identificación.** En este apartado presentaremos algunos ejemplos significativos de espacios identificación.

8.1.1. *Cociente por un subconjunto.* Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto arbitrario. Establezcamos en X la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim_A y \iff x = y \text{ ó } \{x, y\} \subseteq A.$$

Observemos que la clase de equivalencia $[x]$ de un punto $x \in X$ obedece a la fórmula

$$[x] = \begin{cases} \{x\} & si \quad x \notin A \\ A & si \quad x \in A \end{cases}$$