ELEMENTOS DE TOPOLOGÍA CONJUNTISTA

CÉSAR ROSALES.
TOPOLOGÍA II

En estas notas introduciremos recogeremos algunos hechos de topología general necesarios para el estudio de la asignatura.

1. Notación básica

Sea X un *espacio topológico* no vacío (e.t.). Esto significa que en X hay definida una *topología*, es decir, una familia de subconjuntos de X que contiene al vacío $\emptyset$ y a X, y que es cerrada para uniones arbitrarias y para intersecciones finitas. Los elementos de la topología se llaman *abiertos* de X. Un subconjunto $A \subseteq X$ es *cerrado* en X si su complementario $X - A$ es abierto. Si A es cualquier subconjunto de X, la *topología inducida* en A por X se obtiene intersecando con A los abiertos de X.

Recordemos que una aplicación $f : X \to Y$ entre dos e.t. es *continua* si el conjunto $f^{-1}(B) := \{x \in X \,/\, f(x) \in B\}$ es abierto (resp. cerrado) en X para cada B abierto (resp. cerrado) en Y. Un *homeomorfismo* (homeo.) entre dos e.t. es una aplicación biyectiva y continua $f : X \to Y$ cuya inversa $f^{-1} : Y \to X$ es también continua. En tal caso diremos que X e Y son *espacios homeomorfos* y lo representaremos $X \cong Y$.

Denotaremos $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \,/\, x_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, \ldots, n\}$. Salvo que se indique lo contrario consideraremos en $\mathbb{R}^n$ la *topología métrica usual*: aquella para la que las bolas abiertas forman una base. Esto significa que un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto si para cada $x_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subseteq A$. Aquí $B(x_0, r)$ representa la *bola abierta* de centro x_0 y radio r para la norma euclídea, esto es:

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - x_0\| < r\}, \quad \|x - y\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Representaremos por $\overline{B}(x_0, r)$ a la *bola cerrada* de centro x_0 y radio r, dada por:

$$\overline{B}(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - x_0\| \leqslant r\}.$$

Por otro lado, la *esfera* de centro x_0 y radio r es el conjunto:

$$\mathbb{S}^{n-1}(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - x_0\| = r\}.$$

Como es habitual denotaremos $\mathbb{S}^{n-1} := \mathbb{S}^{n-1}(0, 1)$.

2. Lema de pegado

Nuestro primer resultado nos dice cómo aplicaciones continuas definidas sobre una cantidad finita de cerrados de X (con la topología inducida) se pueden "pegar" para determinar una aplicación continua sobre todo X.

Lema 2.1 (Lema de pegado)**.** *Sea $\{A_i \,/\, i = 1, \ldots, m\}$ una familia finita de cerrados de un e.t. X, de forma que $X = \bigcup_{i=1}^m A_i$. Supongamos que para cada $i = 1, \ldots, m$ tenemos una aplicación continua $f_i : A_i \to Y$, donde Y es otro e.t., tal que si $x \in A_i \cap A_j$ entonces*

$f_i(x) = f_j(x)$. Entonces, la aplicación $f : X \to Y$ dada por $f_{|A_i} := f_i$ para cada $i = 1, \ldots, m$ está bien definida y es continua.

Demostración. Dado $x \in X$, entonces $x \in A_i$ para algún $i = 1, \ldots, m$ y, por tanto, $f(x) = f_i(x)$ por definición. Esto asegura que todo punto de X tiene al menos una imagen por f. Además, dicha imagen es única, puesto que si $x \in A_i \cap A_j$, entonces $f_i(x) = f_j(x)$ por hipótesis. Así, f es un aplicación bien definida. Para probar que $f : X \to Y$ es continua, dado B un cerrado en Y, nótese que:

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^{m} f_i^{-1}(B),$$

lo que se prueba fácilmente por doble inclusión. Ahora, cada $f_i^{-1}(B_i)$ es cerrado en A_i al ser $f_i : A_i \to Y$ continua. Y como cada A_i cerrado en X, se sigue que cada $f_i^{-1}(B)$ es también cerrado en X. Así, $f^{-1}(B)$ es cerrado en X al ser unión finita de cerrados de X. □

Nota 2.2. Como en un e.t. X la unión arbitraria de abiertos es un abierto, se puede probar el lema anterior cuando $\{A_i \,/\, i \in I\}$ es una familia arbitraria de abiertos de X.

Ejemplo 2.3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x), & \text{si } \ x \leqslant 0, \\ x^2, & \text{si } \ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Se puede aplicar el lema de pegado para probar que f es continua.

3. Conjuntos convexos

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ denotaremos por $[x, y]$ al *segmento* que une x con y, es decir:

$$[x, y] := \{x + s\,(y - x) \,/\, s \in [0, 1]\} = \{(1 - s)x + sy \,/\, s \in [0, 1]\}.$$

Si $x = y$ entonces $[x, y] = \{x\}$. Si $x \neq y$ entonces $[x, y]$ es el subconjunto cerrado de la recta afín $x + L(\vec{xy})$ comprendido entre x e y. Es obvio que $[x, y] = [y, x]$. En el caso particular $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \leqslant y$, es inmediato que $[x, y] = \{t \in \mathbb{R} \,/\, x \leqslant t \leqslant y\}$.

Un subconjunto no vacío $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es *convexo* si $[x, y] \subseteq X$ para cada $x, y \in X$. Veamos algunos ejemplos y construcciones con conjuntos convexos.

Ejemplo 3.1. 1. Es obvio que $X = \{x_0\}$ y $X = \mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos.

2. Las bolas abiertas y cerradas de $\mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos. Veamos expresamente que cada bola abierta $B(x_0, r)$ es un convexo. Sean $x, y \in B(x_0, r)$ y $s \in [0, 1]$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \|(1 - s)x + sy - x_0\| &= \|(1 - s)x + sy - (1 - s)x_0 - sx_0\| = \|(1 - s)(x - x_0) + s(y - x_0)\| \\ &\leqslant (1 - s)\,\|x - x_0\| + s\,\|y - x_0\| < (1 - s)r + sr = r, \end{aligned}$$

lo que prueba que $[x, y] \subseteq B(x_0, r)$. La convexidad de $\overline{B}(x_0, r)$ se prueba del mismo modo.

3. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $n \in \mathbb{R}^n$ con $n \neq 0$. Recordemos que el *hiperplano afín* que pasa por x_0 y es perpendicular a n viene dado por:

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \langle x - x_0, n \rangle = 0\},$$

donde $\langle u, v \rangle$ es el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$. Es sabido que $\mathbb{R}^n - P$ tiene dos componentes conexas, que se llaman *semiespacios abiertos* asociados a P. Son los conjuntos siguientes:

$$P^+ := \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \langle x - x_0, n \rangle > 0\}, \quad P^- := \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \langle x - x_0, n \rangle < 0\}.$$

Po otro lado, los *semiespacios cerrados* asociados a P son los conjuntos $\overline{P^+}$ y $\overline{P^-}$. Los semiespacios abiertos y los semiespacios cerrados son conjuntos convexos. Lo comprobamos sólo con P^- (los demás se hacen igual). Sean $x, y \in P^-$ y $s \in [0,1]$. Entonces:

$$\begin{aligned}\big\langle (1-s)x + sy - x_0, n\big\rangle &= \big\langle (1-s)x + sy - (1-s)x_0 - sx_0, n\big\rangle \\ &= (1-s)\big\langle x - x_0, n\big\rangle + s\big\langle y - x_0, n\big\rangle < 0,\end{aligned}$$

como se quería.

4. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. Si $X := \cap_{i\in I} X_i$ es no vacío, entonces es un conjunto convexo. La prueba es muy simple y queda como ejercicio.

5. Llamaremos *polígono cerrado* en $\mathbb{R}^2$ a un conjunto compacto y no vacío $Q \subset \mathbb{R}^2$ que coincide con la intersección de una cantidad finita de semiplanos cerrados. Gracias a los dos puntos anteriores se sigue que cada polígono cerrado es un conjunto convexo.

6. Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos convexos, entonces $X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es convexo (ejercicio). En particular, cada paralelepípedo $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ es un convexo de $\mathbb{R}^n$.

7. Recordemos que un *endomorfismo afín* de $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que cumple $f(x) = \vec{f}(x) + x_0$, donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un endomorfismo. Cuando f es biyectiva (lo que equivale a que $\vec{f}$ sea un automorfismo) decimos que f es una *afinidad*. Es sencillo comprobar que toda afinidad es un homeo. Además, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un endomorfismo afín y $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces $f(X)$ es también un conjunto convexo.

Terminaremos este apartado con un resultado bastante intuitivo y que será útil a la hora de reducir a la bola unidad cerrada ciertos cálculos para conjuntos convexos.

Teorema 3.2. *Sea $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un convexo compacto con interior no vacío y B la bola unidad cerrada en $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, existe un homeo. $F : B \to X$ tal que $F(\mathbb{S}^n) = \partial X$ (aquí ∂X es la frontera topológica de X en $\mathbb{R}^{n+1}$).*

Demostración. Componiendo una traslación con una homotecia (ambas afinidades de $\mathbb{R}^{n+1}$) tenemos un homeo. de X en un convexo compacto $Y \subset \mathbb{R}^{n+1}$ cuyo interior $\operatorname{int}(Y)$ contiene a B. Además, este homeomorfismo lleva ∂X en ∂Y. Así, basta probar el teorema para Y.

Definimos $g : \partial Y \to \mathbb{S}^n$ como $g(y) := y/\|y\|$. Geométricamente $g(y)$ en el único punto de corte de $\mathbb{S}^n$ con la semirrecta $\{s\, y \,/\, s \geqslant 0\}$. Obviamente g es continua, ya que $0 \notin \partial Y$ ($0 \in \operatorname{int}(Y)$). Como ∂Y es compacto (es un cerrado contenido en Y) y $\mathbb{S}^n$ es de Hausdorff, se sigue que g es cerrada. Para ver que g es un homeo. basta comprobar que g es biyectiva.

Sea $x_0 \in \mathbb{S}^n$. Queremos ver que existe un único $y_0 \in \partial Y$ tal que $g(y_0) = x_0$. Sea $R := \{s\, x_0 \,/\, s \geqslant 0\}$. Como R es un conjunto cerrado e Y es compacto, deducimos que $R \cap Y$ es compacto. Sea $y_0 \in R \cap Y$ un punto en el que la función $y \in R \cap Y \mapsto \|y\|$ alcanza su máximo absoluto. Pongamos $y_0 = s_0\, x_0$. Tomando módulos se tiene que $s_0 = \|y_0\|$. Además, $y_0 \neq 0$ pues $\|y_0\| = \text{máx}\{\|y\| \,/\, y \in R \cap Y\} \geqslant \|x_0\| = 1$. Veamos que $y_0 \in \partial Y$. De lo contrario $y_0 \in \operatorname{int}(Y)$ y existirá $\varepsilon > 0$ tal que $B(y_0, \varepsilon) \subseteq Y$. Tomemos el punto $y := y_0 + \varepsilon\, x_0 = (s_0 + \varepsilon)\, x_0$. Es claro que $y \in R \cap Y$ con $\|y\| = s_0 + \varepsilon > s_0 = \|y_0\|$, lo que contradice que $\|y_0\| = \text{máx}\{\|y\| \,/\, y \in R \cap Y\}$. Una vez probado que $y_0 \in \partial Y$ nótese que $g(y_0) = y_0/\|y_0\| = (s_0\, x_0)/s_0 = x_0$. Sólo falta comprobar la unicidad de y_0.

Supongamos probado que $R \cap Y = [0, y_0]$ y que $[0, y_0[\, \subseteq \operatorname{int}(Y)$. A partir de aquí es obvio que $R \cap \partial Y = \{y_0\}$. En consecuencia, si existiese $y_0' \in \partial Y$ con $g(y_0') = x_0$ entonces se tendría $y_0' \in R \cap \partial Y = \{y_0\}$ y, por tanto, $y_0' = y_0$.

Veamos primero que $R \cap Y = [0, y_0]$. Sea $y \in R \cap Y$. Como $y \in R$ entonces $y = s\, x_0 = (s/\|y_0\|)\, y_0$ con $s \geqslant 0$. Como $s = \|y\| \leqslant \|y_0\|$ se sigue que $y \in [0, y_0]$. Recíprocamente, sea

$y \in [0, y_0]$. Entonces $y = s\, y_0$ con $0 \leqslant s \leqslant 1$. En particular, $y = s\, \|y_0\|\, x_0$, por lo que $y \in R$. Además, como Y es convexo deducimos que $[0, y_0] \subset Y$, por lo que $y \in Y$ (este ha sido el primer momento de la prueba en el que se ha empleado la convexidad de Y).

Veamos ahora que $[0, y_0[\subseteq \text{int}(Y)$. Tomemos $y = s\, y_0$ con $0 \leqslant s < 1$. Si probamos que $B(y, 1-s) \subseteq Y$ hemos acabado. Sea $z \in B(y, 1-s)$. Definimos el punto $x := (z-y)/(1-s)$. Es obvio que $\|x\| < 1$ y, por tanto, $x \in B \subset Y$. Ahora, es claro que $z = y + (1-s)\, x = s\, y_0 + (1-s)\, x$, por lo que $z \in [y_0, x]$. De aquí se concluye que $z \in Y$ por ser Y convexo.

Para completar la prueba del teorema construiremos un homeo. $F : B \to Y$ tal que $F(x) = f(x)$, para cada $x \in B$, siendo $f : \mathbb{S}^n \to \partial Y$ el homeo. inverso de g. Para ello definimos:

$$F(x) := \begin{cases} \|x\|\, f(x/\|x\|), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Geométricamente, dado $x \in \mathbb{S}^n$, la aplicación F envía el segmento $[0, x] \subseteq B$ en el segmento $[0, f(x)] \subseteq Y$. Dado $x \in B$ con $x \neq 0$, sabemos que $f(x/\|x\|) \in \partial Y$. Nótese que $F(x) \in [0, f(x/\|x\|)]$, lo que asegura que F está bien definida al ser Y convexo. Además, como g está acotada al ser ∂Y compacto, y $\|x\| \to 0$ cuando $x \to 0$, se sigue que F es continua. Por otro lado, no es difícil verificar que la aplicación $G : Y \to B$ dada por:

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{\big\langle y, f(y/\|y\|)\big\rangle}{\|f(y/\|y\|)\|^2}\, \dfrac{y}{\|y\|} & y \neq 0, \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

está bien definida, es continua, y es la inversa de F. $\square$

4. Arcos en un espacio topológico

Sea X un e.t. Un *arco o camino* en X es una aplicación continua $\alpha : [0,1] \to X$. El punto $x := \alpha(0) \in X$ se llama *origen* del arco, mientras que $y := \alpha(1) \in X$ se llama *final* del arco. Diremos que x e y son los *extremos* del arco, y que α une x con y. Cuando $x = y = x_0$, diremos que α es un *lazo* en X con punto base x_0. En ocasiones, al par (X, x_0) lo llamaremos *espacio topológico con punto base.* Dados $x, y \in X$ emplearemos la siguiente notación:

$$\Omega(X, x, y) := \{\alpha : [0,1] \to X \text{ arco} \,/\, \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y\},$$
$$\Omega(X, x_0) := \Omega(X, x_0, x_0) = \{\alpha : [0,1] \to X \text{ lazo} \,/\, \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}.$$

Llamaremos *traza* de α al conjunto $\alpha([0,1])$.

Nota 4.1. El papel del intervalo $[0,1]$ en la definición de arco no es relevante. De hecho, se suele llamar arco en X a cualquier aplicación continua $\alpha : [a,b] \to X$. En tal caso, nótese que si $\phi : [0,1] \to [a,b]$ es el homeo. dado por $\phi(t) := a + (b-a)t$, entonces $\sigma := \alpha \circ \phi : [0,1] \to X$ es un arco con el mismo origen, el mismo final y la misma traza que α. Por ello, no supone pérdida de generalidad suponer que todos los arcos están definidos en $[0,1]$.

Dado $x \in X$, denotaremos por ε_x al *lazo constante o trivial* definido por $\varepsilon_x(t) := x$, para cada $t \in [0,1]$. Es obvio que $\varepsilon_x \in \Omega(X, x)$ y que $\varepsilon_x([0,1]) = \{x\}$.

Dado $\alpha \in \Omega(X, x, y)$, se define el *camino contrario, opuesto o inverso* de α como la aplicación $\overleftarrow{\alpha} : [0,1] \to X$ dada por $\overleftarrow{\alpha}(t) := \alpha(1-t)$, es decir, $\overleftarrow{\alpha} = \alpha \circ \phi$, donde $\phi : [0,1] \to [0,1]$ es el homeo. dado por $\phi(t) := 1 - t$. Nótese que $\overleftarrow{\alpha} \in \Omega(X, y, x)$ y que $\overleftarrow{\alpha}([0,1]) = \alpha([0,1])$, es decir, la traza de α y $\overleftarrow{\alpha}$ es la misma: sólo cambia el sentido de recorrido.

Por último, si $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ y $\beta \in \Omega(X, y, z)$, se define el *producto, concatenación o yuxtaposición* de α y β (en ese orden) como la aplicación $\alpha * \beta : [0,1] \to X$ dada por:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ \beta(2t-1), & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Por el lema de pegado se tiene que $\alpha * \beta \in \Omega(X, x, z)$. Geométricamente recorremos primero la traza de α en $[0, 1/2]$ y luego la traza de β en $[1/2, 1]$. En particular, es claro que $(\alpha * \beta)([0,1]) = \alpha([0,1]) \cup \beta([0,1])$.

Nota 4.2. Para definir $\alpha * \beta$ es esencial que el final del arco α coincida con el origen del arco β, de lo contrario no es posible unir los dos arcos de forma continua.

Ejercicio 1. Probar las siguientes propiedades:

(i) $\overleftarrow{\overleftarrow{\alpha}} = \alpha$, para cada $\alpha \in \Omega(X, x, y)$.
(ii) Si $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ y $\beta \in \Omega(X, y, z)$, entonces $\overleftarrow{\alpha * \beta} = \overleftarrow{\beta} * \overleftarrow{\alpha}$.
(iii) Sea $f : X \to Y$ continua y $\alpha \in \Omega(X, x, y)$. Entonces $f \circ \alpha \in \Omega(Y, f(x), f(y))$ y $\overleftarrow{f \circ \alpha} = f \circ \overleftarrow{\alpha}$.
(iv) Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Dados $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ y $\beta \in \Omega(X, y, z)$, probar que $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$.

Ejercicio 2. Es claro que * define una operación es el conjunto $\Omega(X, x_0)$ de los lazos en X con punto base x_0. ¿Es esta operación conmutativa o asociativa? ¿Es el lazo ε_{x_0} un elemento neutro para dicha operación? Dado $\alpha \in \Omega(X, x_0)$, ¿es cierto que $\alpha * \overleftarrow{\alpha} = \varepsilon_{x_0}$?

5. Espacios arco-conexos

Sea X un e.t. Definimos en X esta relación: dados $x, y \in X$ decimos que $x \sim y$ si existe $\alpha \in \Omega(X, x, y)$, es decir, hay un arco $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Por lo estudiado en el apartado anterior se tiene que $\sim$ es una relación de equivalencia en X. Las clases de equivalencia de X según $\sim$ se llaman *componentes arco-conexas* (c.a.c.) de X. Dado $x \in X$, su c.a.c. C_x está dada por:

$$C_x := \{y \in X \,/\, x \sim y\} = \{y \in X \,/\, \exists \alpha \in \Omega(X, x, y)\}.$$

Como en toda relación de equivalencia, las clases forman una partición de X, es decir, $X = \bigcup_{x \in X} C_x$, mientras que $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ si y sólo si $C_x = C_y$.

Nota 5.1. Sea $y \in C_x$, es decir, existe $\alpha \in \Omega(X, x, y)$. Veamos que $\alpha([0,1]) \subseteq C_x$. Sea $a \in [0,1]$. Si definimos $\sigma : [0,1] \to X$ como $\sigma(t) := \alpha(at)$ entonces $\sigma \in \Omega(X, x, \alpha(a))$. Esto implica que $\alpha(a) \in C_x$ por definición de C_x. Acabamos de probar que $\alpha([0,1]) \subseteq C_x$.

Diremos que un e.t. X es *arco-conexo* (a.c.) o *conexo por arcos* si tiene una única componente arco-conexa. Esto equivale a lo siguiente: para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple que existe $\alpha \in \Omega(X, x, y)$.

Ejemplo 5.2. Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es *estrellado* si existe $x_0 \in X$ tal que $[x_0, x] \subseteq X$ para cada $x \in X$. Esto implica que $X = \bigcup_{x \in X} [x_0, x]$, por lo que X es unión de segmentos que salen de x_0. Es claro que $X = \{x_0\}$ y $X = \mathbb{R}^n$ son estrellados. Si X es estrellado, entonces X es a.c. En efecto; dados $x, y \in X$, se tiene que $[x, x_0] \subseteq X$ y $[x_0, y] \subseteq X$. Parametrizando ambos segmentos como $\alpha(t) := (1-t)x + tx_0$ y $\beta(t) := (1-t)x_0 + ty$ se tiene que $\alpha * \beta \in \Omega(X, x, y)$.

Ejemplo 5.3. Todo subconjunto convexo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es a.c. Aunque esto es una consecuencia inmediata del ejemplo anterior también es sencillo verlo directamente. De hecho, si $x, y \in X$, la convexidad de X nos garantiza que $[x, y] \subseteq X$. Por tanto, definiendo $\alpha(t) := (1-t)x + ty$, obtenemos que $\alpha \in \Omega(X, x, y)$.

Si X es un e.t. y $A \subseteq X$, diremos que A es un *subconjunto arco-conexo* de X si A es un espacio a.c. con la topología inducida por X.

Lema 5.4 (Maximalidad de las c.a.c.). *En un e.t. X las c.a.c. son subconjuntos a.c. Además, si $A \subseteq X$ es un subconjunto a.c. con $x \in A$, entonces $A \subseteq C_x$.*

Demostración. Veamos primero que las c.a.c. son subconjuntos a.c. En efecto; sea C_x la c.a.c. de $x \in X$. Tomemos $y, z \in C_x$. Queremos ver que hay un arco en C_x que une y con z. Por definición de c.a.c. existen $\alpha \in \Omega(X, y, x)$ y $\beta \in \Omega(X, x, z)$. Por la Nota 5.1 se sigue que $\alpha \in \Omega(C_x, y, x)$ y $\beta \in \Omega(C_x, x, z)$. Entonces, $\alpha * \beta \in \Omega(C_x, y, z)$.

Para la segunda parte, sea $x \in X$ y $A \subseteq X$ un subconjunto a.c. con $x \in A$. Queremos ver que $A \subseteq C_x$. Sea $y \in A$. Como A es a.c., existe $\alpha \in \Omega(A, x, y) \subseteq \Omega(X, x, y)$. Así $y \in C_x$ por definición de C_x y se concluye. $\square$

Recuerda que un e.t. X es *conexo* si para cada partición $X = A \cup B$ en la que A y B son abiertos disjuntos de X se cumple que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. Esto equivale a que si $A \subseteq X$ es a la vez abierto y cerrado en X, entonces $A = \emptyset$ o $A = X$.

¿Qué relación hay entre espacio a.c. y espacio conexo?

Proposición 5.5. *Si X es a.c. entonces X es conexo. El recíproco no es cierto: hay ejemplos de espacios conexos que no son a.c.*

Demostración. Sea $X = A \cup B$ una partición de X por abiertos disjuntos. Supongamos que ambos son no vacíos y lleguemos a contradicción. Tomemos $x \in A$ e $y \in B$. Como suponemos que X es a.c., debe existir un arco $\alpha : [0, 1] \to X$ con $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Pero entonces:

$$[0, 1] = \alpha^{-1}(X) = \alpha^{-1}(A \cup B) = \alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B),$$

lo que nos da una partición de $[0, 1]$ en abiertos disjuntos no vacíos. Esto contradice que $[0, 1]$ es conexo con la topología usual. Un espacio conexo que no es a.c. es la llamada curva *seno del topólogo*:

$$X := \{\big(t, \operatorname{sen}(1/t)\big) \,/\, t \in (0, 1]\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]),$$

los detalles se pueden encontrar en [1, Ejemplo 7, p. 178]. $\square$

Nota 5.6. Por la proposición anterior cada c.a.c. de X está contenida en una y sólo una de las componentes conexas (c.c.) de X. En general, las c.a.c. y las c.c. de X no coinciden. Tampoco es cierto en general que las c.a.c. de X sean subconjuntos cerrados de X (recuerda que las c.c. de X sí lo son). El espacio X de la prueba anterior es un ejemplo que ilustra estas afirmaciones.

¿Qué le falta a un espacio conexo para ser a.c.?

Proposición 5.7. *Un e.t. X es a.c. si y sólo si es conexo y cada $x \in X$ tiene un entorno A_x en X que es a.c.*

Demostración. La implicación de izquierda a derecha es obvia, sin más que tomar $A_x = X$ para cada $x \in X$. Probemos ahora la otra implicación.

Sea $x \in X$ un punto arbitrario. Vamos a probar que $C_x = X$. Como X se supone conexo, es suficiente ver que C_x es abierto y cerrado en X. Sea $y \in C_x$, es decir, existe $\alpha \in \Omega(X, x, y)$. Veamos que $A_y \subseteq C_x$. En efecto; dado $z \in A_y$ se tiene, al ser A_y a.c., que existe $\beta \in \Omega(A_y, y, z) \subseteq \Omega(X, y, z)$. Pero entonces $\alpha * \beta \in \Omega(X, x, z)$, lo que prueba que $z \in C_x$. Finalmente, probemos que $X - C_x$ es abierto en X. Sea $y \notin C_x$, es decir, no existe $\alpha \in \Omega(X, x, y)$. Afirmamos que $A_y \subseteq X - C_x$; de lo contrario encontraríamos $z \in C_x \cap A_y$. De este modo existirían $\alpha \in \Omega(X, x, z)$ y $\beta \in \Omega(A_y, z, y) \subseteq \Omega(X, z, y)$. Entonces $\alpha * \beta \in \Omega(X, x, y)$, lo que contradice que $y \notin C_x$. □

Corolario 5.8. *Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y conexo, entonces X es a.c.*

Demostración. Es consecuencia directa de la Proposición 5.7 y de que las bolas abiertas de $\mathbb{R}^n$ sean subconjuntos a.c. (por ser convexos). □

En el siguiente resultado mostramos algunos métodos de construcción de espacios a.c.

Proposición 5.9. *Sean X e Y dos e.t. Entonces, se cumplen estas propiedades:*

(i) *Si X e Y son a.c., entonces $X \times Y$ con la topología producto (para la que una base está formada por productos de abiertos) también es a.c.*
(ii) *Si $f : X \to Y$ es continua y X es a.c. entonces $f(X) := \{f(x) \,/\, x \in X\}$ es a.c. Por tanto, todo cociente de un espacio a.c. es un espacio a.c. Además, la arco-conexión es un invariante topológico: se conserva por homeomorfismos.*
(iii) *Sea $\{A_i \,/\, i \in I\}$ una familia de subconjuntos a.c. de X de forma que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Entonces $A := \bigcup_{i\in I} A_i$ es a.c.*

Demostración. Probemos (i). Tomemos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Como suponemos que X e Y son a.c., existen $\alpha \in \Omega(X, x_1, x_2)$ y $\beta \in \Omega(Y, y_1, y_2)$. Entonces, la aplicación $(\alpha, \beta) : [0, 1] \to X \times Y$ dada por $(\alpha, \beta)(t) := (\alpha(t), \beta(t))$ es un arco en $X \times Y$ que une (x_1, y_1) con (x_2, y_2). Probemos (ii). Sean $y_1, y_2 \in f(X)$. Esto implica que existen $x_1, x_2 \in X$ con $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Como X es a.c. existe $\alpha \in \Omega(X, x_1, x_2)$. Entonces, es inmediato que $f \circ \alpha \in \Omega(f(X), y_1, y_2)$. Finalmente probemos (iii). Sea $x_0 \in \bigcap_{i\in I} A_i$ y $x, y \in A$. Supongamos que $x \in A_i$ y que $y \in A_j$. Como A_i y A_j son a.c., existen $\alpha \in \Omega(A_i, x, x_0) \subseteq \Omega(A, x, x_0)$ y $\beta \in \Omega(A_j, x_0, y) \subseteq \Omega(A, x_0, y)$. Entonces $\alpha * \beta \in \Omega(A, x, y)$ y se concluye. □

Corolario 5.10. *Los siguientes e.t. son a.c.:*

(i) $\mathbb{R}^n$ *con* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
(ii) $\mathbb{S}^n$ *con* $n \in \mathbb{N}$,
(iii) $\mathbb{R}^n - A$ *con* $n \geqslant 2$ *y* $A \subset \mathbb{R}^n$ *finito,*
(iv) $\mathbb{S}^n - A$ *con* $n \geqslant 2$ *y* $A \subset \mathbb{S}^n$ *finito,*
(v) $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ *con* $n, m \in \mathbb{N}$,
(vi) $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *y* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
(vii) *el toro T, la cinta de Moebius M, la botella de Klein K y los espacios proyectivos reales $\mathbb{RP}^n$.*

Demostración. Ya sabemos que $\mathbb{R}^n$ es a.c. al ser convexo. Para ver que $\mathbb{S}^n$ es a.c. basta usar el apartado (iii) de la Proposición 5.9, pues $\mathbb{S}^n$ es la unión de $\mathbb{S}^n - \{\text{polo norte}\}$ y $\mathbb{S}^n - \{\text{polo sur}\}$, que son dos abiertos de $\mathbb{S}^n$ homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ (por la proyección estereográfica) con intersección no vacía.

Probemos que si $n \geqslant 2$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ es finito, entonces $X := \mathbb{R}^n - A$ es a.c. Sean $x, y \in X$. Si $[x, y] \subset X$, entonces definimos $\alpha(t) := (1 - t)x + ty$, por lo que $\alpha \in \Omega(X, x, y)$. Si $[x, y] \nsubseteq X$ es porque hay puntos de A en $[x, y]$. Tomamos bolas cerradas centradas en dichos puntos y con radios lo suficientemente pequeños como para que sean dos a dos disjuntas y no contengan a ningún punto más de A que sus centros (esto se puede conseguir por ser A finito). Combinando trozos de $[x, y]$ con arcos en las esferas que bordean dichas bolas obtenemos un arco en X que une x con y. Que $\mathbb{S}^n - A$ es a.c. cuando $n \geqslant 2$ y $A \subset \mathbb{S}^n$ es finito se debe a que, por la proyección estereográfica, $\mathbb{S}^n - A$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n - B$, donde $B \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto finito que tiene un punto menos que A.

Los productos $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ y $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m$ son a.c. por el apartado (i) de la Proposición 5.9. El toro T, la banda de Moebius M y la botella de Klein K son cocientes de convexos. El espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ es cociente de $\mathbb{S}^n$ cuando identificamos puntos antípodas. Como un cociente de un espacio a.c. es también a.c. se concluye. □

Nota 5.11. Recuerda que $\mathbb{R} - \{x\}$ y $\mathbb{S}^1 - \{x, y\}$ no son conexos: por tanto tampoco son a.c.

Ejercicio 3. Sea L un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 2$ y $L \neq \mathbb{R}^n$. Demostrar que $X := \mathbb{R}^n - L$ es a.c. si y sólo si $\dim(L) \leqslant n - 2$.

6. Espacios localmente arco-conexos

En este apartado estudiaremos una condición suficiente para asegurar que las c.c. de un e.t. X coinciden con las c.a.c.

Un e.t. X se dice *localmente arco-conexo* (l.a.c.) si para cada $x \in X$ existe una base $\mathcal{B}_x$ de entornos a.c. de x en X. Esto equivale a lo siguiente: para cada $x \in X$ y cada entorno N de x en X, existe un entorno a.c. N_x de x en X con $N_x \subseteq N$.

Nota 6.1. Un espacio a.c. no tiene por qué ser l.a.c. Un ejemplo de esta situación es:

$X := ([-1, 0] \times \{0\}) \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1,\, y \geqslant 0\} \cup \{\big(x, (1/2)\operatorname{sen}(\pi/x)\big) \,/\, x \in (0, 1]\}.$

Un espacio l.a.c. no tiene por qué ser a.c. Basta considerar X como la unión de dos intervalos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}$.

Para un espacio l.a.c. la conexión y la arco-conexión son propiedades equivalentes como consecuencia de la Proposición 5.7.

Corolario 6.2. *Sea X un espacio l.a.c. Entonces X es a.c. si y sólo si X es conexo.*

Diremos que $A \subseteq X$ es un *subconjunto localmente arco-conexo* de X cuando A es l.a.c. con la topología inducida por X. Veamos algunos ejemplos de espacios l.a.c.

Ejemplo 6.3. 1. Si X es un espacio l.a.c. y A es abierto en X, entonces A es l.a.c. La demostración es sencilla y se deja como ejercicio.

2. Es obvio que $\mathbb{R}^n$ es l.a.c. pues, dado $x \in \mathbb{R}^n$, las bolas abiertas centradas en x proporcionan una base de entornos a.c. de x en $\mathbb{R}^n$ Como consecuencia del punto anterior, cada abierto de $\mathbb{R}^n$ es l.a.c.

3. Recordemos que un *homeomorfismo local* (homeo. local) es una aplicación continua $f : X \to Y$ entre e.t. que localmente es un homeo. Esto significa que, para cada $x \in X$, existe A_x entorno de x en X y B_y entorno de $y := f(x)$ en Y, tales que $f : A_x \to B_y$ es un homeo. Es muy fácil comprobar que si $f : X \to Y$ es un homeo. local y X es l.a.c., entonces $f(X)$ también es l.a.c. En particular, como todo homeo. es un homeo. local, se sigue que la arco-conexión local es un invariante topológico.

4. La esfera $\mathbb{S}^n$ es l.a.c. pues cada punto tiene un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ por la proyección estereográfica (este entorno será $\mathbb{S}^n - \{\text{polo norte}\}$ o $\mathbb{S}^n - \{\text{polo sur}\}$) y $\mathbb{R}^n$ es l.a.c. Como consecuencia, cada abierto de $\mathbb{S}^n$ es l.a.c.

5. Es sencillo probar que si X e Y son l.a.c., entonces $X \times Y$ también lo es. Como consecuencia, los productos $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ y $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m$ son l.a.c.

6. También es cierto que el toro T, la cinta de Moebius M, la botella de Klein K y el espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^n$ son l.a.c. Aunque esto se puede probar directamente de la definición

de estos espacios, lo deduciremos más adelante cuando estudiemos ejemplos de *aplicaciones recubridoras* (que, en particular, son homeos. locales sobreyectivos).

Ahora probaremos una caracterización del concepto de espacio l.a.c. que es bastante útil.

Proposición 6.4. *En un e.t. X las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *X es l.a.c.*
(ii) *Si A es abierto en X entonces las c.a.c. de A (como e.t. con la topología inducida por X) son abiertos de X.*

Demostración. Supongamos que X es l.a.c. Sea A un abierto en X y A_x una c.a.c. de A. Queremos ver que A_x es abierto en X. Como A es abierto en X y $x \in A$, entonces A es un entorno de x en X. Por tanto, debe existir un entorno N_x de x en X que es a.c. y cumple $N_x \subseteq A$. Como N_x y A_x son a.c. en A y ambos contienen a x, se concluye que $N_x \subseteq A_x$ por el Lema 5.4. Supongamos ahora que las c.a.c. de cada abierto de X son abiertos de X. Probemos que X es l.a.c. Sea $x \in X$ y N un entorno de x en X. No hay pérdida de generalidad en suponer que N es abierto en X. Sea N_x la c.a.c. de N que contiene a x. Entonces, N_x es un abierto a.c. en N (y por tanto en X) con $x \in N_x \subseteq N$. □

Ejercicio 4. Se dice que un e.t. X es *localmente conexo* (l.c.) si cada $x \in X$ tiene una base $\mathcal{B}_x$ de entornos conexos en X. Usando las ideas de la proposición anterior, demostrar que X es l.c. si y sólo si las c.c. de cada abierto de X son conjuntos abiertos en X.

Acabamos esta sección con un resultado que anunciamos al principio de la misma: en un espacio l.a.c., las c.c. coinciden con las c.a.c.

Corolario 6.5. *En un espacio l.a.c. X las c.c. coinciden con las c.a.c.*

Demostración. Sean C_x y D_x las componentes a.c. y conexa, respectivamente, de x en X. Por ser X l.a.c. es también l.c., por lo que C_x y D_x son abiertos en X. Por la Proposición 5.5 se tiene $C_x \subseteq D_x$. Para la otra inclusión es suficiente, por el Lema 5.4, con ver que D_x es un subconjunto a.c. de X. Como D_x es abierto en X y X es l.a.c. entonces D_x también es l.a.c. Por el Corolario 6.2 se sigue que D_x es a.c., lo que concluye la prueba. □

Referencias

[1] James. R. Munkres, *Topología*, 2ª edición. Prentice Hall, Madrid, 2002.