Cálculo I

Tema 5: Convergencia y acotación. Subsucesiones. Operaciones con sucesiones convergentes.

Sucesiones

Definición

Una sucesión de números reales es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.
En lugar de notarlas de esta forma, se suelen escribir de la forma $\{x_n\}$ o $\{x_n\}_n$, donde $x_n = f(n)$ para cada natural n. Al elemento x_n se llama término n-ésimo de la sucesión $\{x_n\}$.

Ejemplos

- $\{1\}_n$
- $\{(-1)^n\}_n$
- $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

Sucesiones acotadas

Sucesiones acotadas

- Una sucesión $\{x_n\}$ está mayorada si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Una sucesión $\{x_n\}$ está minorada si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$m \leq x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Una sucesión $\{x_n\}$ es acotada si es minorada y mayorada. Es fácil comprobar que esta condición equivale a que exista $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|x_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sucesiones

Ejemplos

- $\{1\}_n$ es acotada.
- $\{(-1)^n\}_n$ es acotada.
- $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ es acotada.
- $\{n\}$ está minorada y no mayorada, luego no está acotada.
- $\{-n^2\}$ está mayorada y no minorada, luego tampoco es acotada.
- $\{(-1)^n n\}$ no está mayorada ni minorada.

Sucesiones

Sucesión convergente

Una sucesión de números reales $\{x_n\}$ es convergente si existe un número real x que verifica la siguiente condición:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \quad \Rightarrow \quad |x_n - x| < \varepsilon$$

En tal caso, el número real x es único y se llama límite de la sucesión $\{x_n\}$. Diremos también que la sucesión $\{x_n\}$ converge a x, y suele notarse de alguna de las siguientes formas

$$x = \lim_n \{x_n\}, \qquad \{x_n\} \to x$$

Para un subconjunto de naturales equivalen ser finito y estar mayorado. Por tanto, la condición que aparece en la definición de convergencia equivale a que, para cada real y positivo ε, el conjunto

$$A_\varepsilon = \{n \in N : |x_n - x| \geq \varepsilon\}$$

sea finito.

Sucesiones

Ejemplos

- $\{1\}_n \to 1$
- $\{\frac{1}{n}\} \to 0$
- $\{(-1)^n\}$ no converge

Proposición

Toda sucesión convergente está acotada

El recíproco no es cierto. Por ejemplo, la sucesión $\{(-1)^n\}$ está acotada y no es convergente.

Subsucesiones

Definición

Una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es estrictamente creciente si $\sigma(n) < \sigma(m)$ para cualesquiera naturales n, m tales que $n < m$.

Es inmediato comprobar por inducción que una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, si, y sólo si, se verifica

$$\sigma(n) < \sigma(n+1), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplos

1) $\sigma(n) = 2n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$

2) $\sigma(n) = 2n-1, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$

3) $\sigma(n) = 2^n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Definición

Una sucesión $\{y_n\}$ es una subsucesión (o una sucesión parcial) de $\{x_n\}$ si existe una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $y_n = x_{\sigma(n)}$ para cada natural n.

Subsucesiones

Ejemplos

- $\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$ es una subsucesión de $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$
- $\{3^n\}$ es una subsucesión de $\{n\}$
- Si $\{x_n\}$ es una sucesión, entonces $\{x_{2n}\}$ es la subsucesión de los términos pares de $\{x_n\}$ y $\{x_{2n-1}\}$ es la subsucesión de los términos impares.

Por inducción es muy sencillo comprobar la siguiente afirmación.

Proposición

Si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, entonces $\sigma(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Del resultado anterior podemos deducir fácilmente:

Proposición

Si $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una subsucesión de una sucesión convergente $\{x_n\}$, entonces $\{x_{\sigma(n)}\}$ también es convergente, con $\operatorname{lím}\{x_{\sigma(n)}\} = \operatorname{lím}\{x_n\}$.

Subsucesiones

Es inmediato comprobar la siguiente afirmación:

Proposición

Si una sucesión es acotada, toda subsucesión suya también es acotada.

Proposición

Se verifican las siguientes afirmaciones:

1) $\{x_n\} \to x$ si, y sólo si, para cada natural k, $\{x_{n+k}\} \to x$

2)

$$\{x_n\} \to x \iff \{x_{2n}\} \to x \quad \text{y} \quad \{x_{2n-1}\} \to x$$

Operaciones con sucesiones convergentes

Proposición

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $\{x_n\} \to x \Leftrightarrow \{x_n - x\} \to 0 \Leftrightarrow \{|x_n - x|\} \to 0$

2) $\{x_n\} \to 0 \Leftrightarrow \{|x_n|\} \to 0$

3) $\{x_n\} \to x \Rightarrow \{|x_n|\} \to |x|$

Es fácil ver que el recíproco de la última afirmación no es cierto:

Ejemplo

La sucesión $\{(-1)^n\}$ no converge. Sin embargo, $\{|(-1)^n|\} = \{1\}_n \to 1$.

Operaciones con sucesiones convergentes

Proposición

Sea $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de números reales. Se verifica:

1) Si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y$, entonces $\{x_n + y_n\} \to x + y$.

2) Si $\{x_n\} \to 0$ e $\{y_n\}$ está acotada, entonces $\{x_n y_n\} \to 0$.

3) Si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y$, entonces $\{x_n y_n\} \to xy$.

4) Si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y$, y supongamos además que $y \neq 0$ y que $y_n \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} \to \frac{x}{y}$.

Convergencia de sucesiones y orden de $\mathbb{R}$

Proposición

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de números reales. Se verifica:

1) Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son convergentes y $\lim\{x_n\} < \lim\{y_n\}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < y_n$ para cada $n \geq m$.

2) Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen y $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n\}$ es infinito, entonces $\lim\{x_n\} \leq \lim\{y_n\}$.

3) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x_n\}$ converge y el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \alpha \leqslant x_n\}$ es infinito, entonces $\alpha \leqslant \lim\{x_n\}$.

4) Si $\beta \in \mathbb{R}$, $\{x_n\}$ converge y el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq \beta\}$ es infinito, entonces $\lim\{x_n\} \leqslant \beta$.

5) En particular, si $\{x_n\}$ es convergente se tiene:

$$\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \lim\{x_n\} \leqslant \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

6) Supongamos que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen al mismo límite y $\{z_n\}$ es una sucesión de reales tales que $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{z_n\}$ también converge al mismo límite.

Supremo, ínfimo y sucesiones

A veces resulta cómodo usar las siguientes caracterizaciones de supremo y de ínfimo:

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

i)

$$\alpha = \text{Inf } A \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \leq a, \forall a \in A \\ \text{y} \\ \exists \{a_n\} \to \alpha, \quad a_n \in A, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ii)

$$\beta = \text{Sup } A \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} a \leq \beta, \forall a \in A \\ \text{y} \\ \exists \{a_n\} \to \beta, \quad a_n \in A, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Supremo, ínfimo y sucesiones

En vista de la densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ obtenemos:

Corolario

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

a) Existen sucesiones $\{r_n\}$ y $\{s_n\}$ de números racionales, tales que:

$$r_n < x < s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x = \lim\{r_n\} = \lim\{s_n\}$$

b) Existen sucesiones $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ de números irracionales, tales que:

$$\alpha_n < x < \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x = \lim\{\alpha_n\} = \lim\{\beta_n\}$$