ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Facultad de Ciencias

TRIGONOMETRÍA PLANA

¿Cómo se miden los triángulos?

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada

Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

1. Introducción

Un triángulo es la figura más básica en el estudio de las matemáticas. La palabra **trigonometría** significa medida de triángulos[1]. En un triángulo se miden las longitudes de los lados, los ángulos, el área, etc.

El estudio del sol, la tierra y de los demás planetas se ha promovido por el conocimiento de las razones entre los lados de triángulos semejantes.

Eratóstenes (276-194 a.C.) usó triángulos rectángulos semejantes para estimar en 252.000 estadios (39.614,4 km) la circunferencia polar de la tierra. Si lo comparamos con la mejor estimación moderna, 40.008 km, es decir un error de menos del 1%, lo cual es notable.

Hoy la trigonometria es crítica en campos que van desde ciencias de la computación hasta las comunicaciones por satélite.

Aunque en la historia de las matemáticas, las aplicaciones de la trigonometria se basan en el triángulo rectángulo, la trigometria alcanza a todos los polígonos[2] y por un proceso de límite a todas las figuras planas.

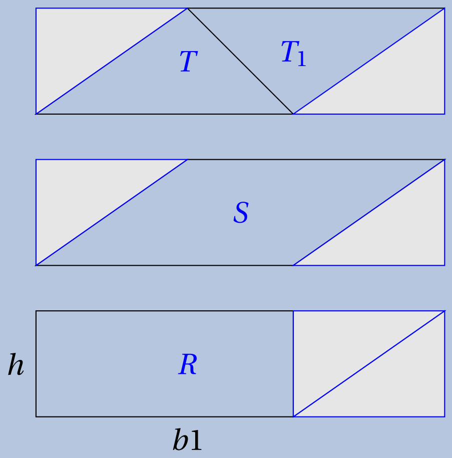
El concepto de área de un rectángulo como base por altura es necesario y previo en todas las demostraciones de teoremas clásicos de trigonometría.

[1]De dos palabras griegas, *trigonon* que significa triángulo y *metrón* que significa medida.
[2]Cualquier polígono se puede descomponer en triángulos que no se solapan.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

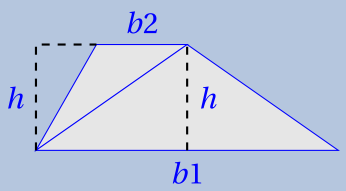
2. Demostraciones sin palabras

Observa los dibujos y comprobarás la verdad de las afirmaciones



$$T = T_1$$
$$2T = S$$
$$S = R = b_1 * h$$
$$\Rightarrow T = \frac{b_1 * h}{2}$$

El área del triángulo es igual a la mitad del área del paralelogramo que define. O sea, base por altura partido por dos.



El área del trapecio es igual a la suma de las áreas de los dos triángulos.

$$S = S_1 + S_2 = \frac{b_1 * h}{2} + \frac{b_2 * h}{2} = \frac{b_1 + b_2}{2} * h$$

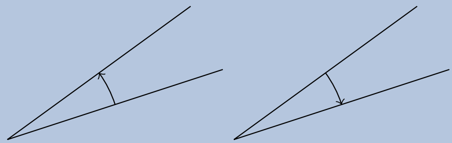
O sea, la semisuma de las bases por la altura.

3. Goniometría: Ángulos y su medida

Dado un espacio bidimensional[3], donde existen puntos y rectas. Un ángulo se puede definir con una pareja de semirectas que se cortan. O sea

Definición 1. *Un ángulo es un par de semirectas con un vértice común.*

Como una pareja tiene un orden, dos semirectas, a y b con un vértice común, definen dos ángulos distintos el $\widehat{ab}$ y el $\widehat{ba}$. Gráficamente,



La medida de un ángulo se define como un número real único que mide la amplitud o separación de ambas semirectas. Más precisamente, dos ángulos

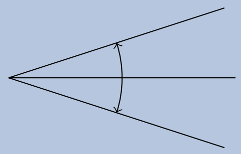
Definición 2. *$\widehat{ab}$ y $\widehat{a'b'}$, miden[4] lo mismo, si se puede trasladar un vértice al otro y hacer coincidir sus semirectas en ese orden, a con a' y b con b'.*

Por tanto, para hallar la medida de un ángulo podemos trasladar el vértice al origen de coordenadas y girar hasta hacer coincidir la semirecta a con el semieje x positivo. Así, los ángulos anteriores, se verían

[3] Una definición moderna de plano es el conjunto, $\mathbb{R}^2$, de parejas de números reales.

[4] Goniometría, del griego gonía ($\gamma\omega\nu\iota\alpha$), ángulo y métron ($\mu\epsilon\tau\theta\nu$), medida.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra



En una circunferencia de centro el origen un ángulo define un único punto en la circunferencia y además dos arcos. Uno que se recorre en el sentido de las agujas del reloj, **sentido horario, negativo, retrógrado o dextrógiro**. Y otro, en **sentido antihorario, positivo, directo, progrado o levógiro**.

Así un ángulo puede tener dos medidas, una negativa y otra positiva. Si le da un valor positivo real a la circunferencia completa y el semieje a coincide con el semieje positivo de las x (abscisas) se tiene:

Definición 3. *La medida de un ángulo, $\widehat{ab}$ es el número real positivo*[5] *que corresponde proporcionalmente al ángulo dado.*

Los babilonios[6] dividían el círculo en 360 **grados sexagesimales**, probablemente porque era aproximadamente el número de días de un año.

Ptolomeo, en su Almagesto (150 A.D.), subdividió un grado en 60 *partes minutae primae*, $1^\circ = 60'$, y cada una de estas partes en otros 60 *partes minutae secondae*, $1' = 60''$. Se convirtieron en nuestros **minutos** y **segundos**.

[5]Eligiendo el sentido positivo o levógiro, la medida es única ya que se toma menor que una circunferencia completa. Se puede elegir el otro sentido y también sale única.

[6]Medían ángulos, principalmente por motivos astronómicos.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Si un ángulo está entre 0° y 90°, decimos que está en el **primer cuadrante**, entre 90° y 180° en el **segundo cuadrante**, entre 180° y 270° en el **tercer cuadrante**, y entre 270° y 360° en el **cuarto cuadrante**.

No se debe confundir el ángulo con su medida. Un ángulo puede tener muchas medidas. Si la medida que os dan es mayor de 360° entonces se le restan multiplos de esta cantidad hasta conseguir su medida única.

Si la medida de la circunferencia completa es 400, decimos que medimos en **grados centesimales**. Decimos que medidos en **radianes**, si la medida de la circunferencia completa es 2π. Si a la circunferencia completa le damos el valor 6400, estamos midiendo en **mils**[7].

La medida en radianes es la más natural, está basada en la longitud de una semicircunferencia de radio 1, que es una cantidad irracional ya que dicha

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749\\4459230781640628620899862803482534211706798214808651\ldots$$

longitud es curva y hay que aproximarla[8] por segmentos cada vez más chicos. Pero no depende del valor real del radio ya que es una proporción.

[7] Esta medida más pequeña tiene mucha utilidad práctica.

[8] La demostración de que este número no es una fracción y tiene infinitos decimales no periódicos. O sea, que π es **irracional** fue dada rigurosamente en 1770 por Johann Lambert. En 1882, Ferdinand Lindemann demostró que el número π es **trascendente**. O sea, no puede ser raíz de una ecuación algebraica con coeficientes racionales.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

O sea, es el cociente de la semicircunferencia al radio. Equivalentemente, es el cociente de la longitud de la circunferencia al diámetro. O sea, el número

Definición 4. *π es la longitud de una circunferencia de diámetro 1. O bien, la de una semicircunferencia de radio 1.*

Arquímedes de Siracusa demostró que también este número coincide con el cociente del área de un círculo partido el cuadrado de su radio. O sea

Definición 5. *π es el valor del área de un círculo de radio 1.*

Como consecuencia, se tienen dos resultados ya conocidos por los griegos

Lema 1. *La longitud de una circunferencia de radio r es* $\boxed{l = 2\pi r}$

El área de un círculo es $\boxed{S = \pi r^2}$

La medida en radianes tiene ciertas ventajas sobre medir en grados. Simplifica el cálculo con funciones trigonométricas. También,

Definición 6. *Un radian es la medida de un ángulo que limita o sustenta un arco de longitud el radio*[9] *(1 metro desde 1 metro o 1 km desde 1 km, etc.).*

En consecuencia, la medida en radianes de un ángulo es el cociente de la longitud del arco que sustenta partido el radio. O sea, $\boxed{\theta = s/r}$.

[9]Por la definición del número π, como la longitud de una semicircuferencia de radio 1.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

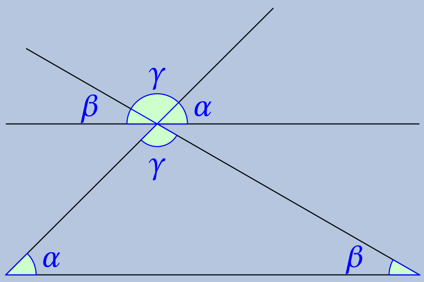
Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Equivalentemente, la longitud del arco sustentado es el producto del valor del ángulo en radianes por el valor del radio, $\boxed{s = \theta * r}$

Ejemplo 1. *La medida en radianes de un ángulo, con vértice en el centro de un círculo de radio* $r = 10$ *metros y que sustenta un arco de* $s = 5$ *m, es*

$$\theta \;=\; \frac{s}{r} \;=\; \frac{5}{10} \;=\; 0.5 \; radianes$$

3.1. Suma de los ángulos de un triángulo. Observa el dibujo



Ángulos de una recta cortada por dos paralelas son iguales. También son iguales los ángulos opuestos por el vértice. Por tanto, del dibujo obtenemos

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = \pi \;\text{rad}$$

O sea, suman un ángulo llano.

Ejemplo 2. *Un triángulo equilátero satisface* $3\alpha \;=\; 180^\circ$. *Luego,* $\alpha = 60^\circ$.

3.2. Conversión entre distintas medidas. Es posible cambiar la unidad.

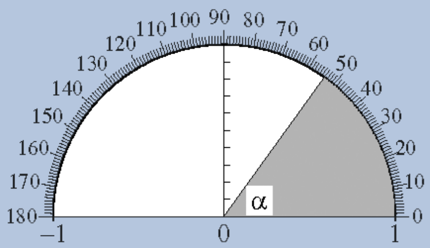
Definición 7. *Llamamos* **factor de conversión***, entre distintas medidas de un ángulo, al valor de una de las unidades de medida en función de la otra.*

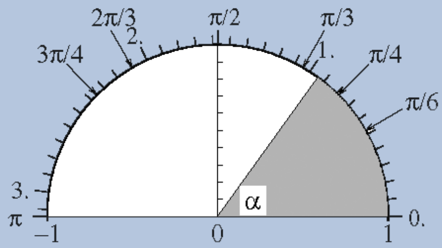
Como $360° = 2\pi$, el factor de grados a radianes se calcula así:

$$1^\circ \;=\; \frac{2\pi}{360} \;=\; \frac{\pi}{180} \;=\; 0.0174533 \text{ radianes}$$

Recíprocamente, el factor de conversión de radianes a grados vale

$$1 \text{ radián} \;=\; \frac{360}{2\pi} \;=\; \frac{180}{\pi} \;=\; 57.2958^\circ$$





Como $360° = 6400$ mils,, el factor de conversión de grados a mils se calcula

$$1 \text{ mil} \;=\; \frac{360}{6400} \;=\; \frac{9}{160} \;=\; 0.05625^\circ, \quad 1^\circ \;=\; \frac{160}{9} \;=\; 17.7778 \text{ mils}$$

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

Ahora, multiplicando dos de los factores ya calculados

$$1 \text{ mil} = \frac{9^\circ}{160} = \frac{9^\circ}{160}\frac{\pi}{180} \text{ radianes} = \frac{\pi}{3200} = 0.000981748 \text{ radianes}$$

Así justifica su nombre[10], $\boxed{1 \text{ mil} \simeq 0.001 = 1/1000 \text{ radianes}}$ y se tiene que *1 mil ($\simeq$ miliradián o mrad), es aproximandamente el ángulo que sustenta una longitud de arco igual a 1/1000 del radio del círculo*.

En la Primera Guerra Mundial, Francia adoptó el uso de los mils en artillería. EE.UU. también adoptó los mils para uso militar.

En la década de 1950, la OTAN adoptó el sistema métrico decimal (SI). Mils, metros y kilogramos se convirtieron en estándar. Aunque por tradición, en el uso civil naval y aéreo, se mantienen los grados sexagesimales.

El uso de los Mils se aplica a ángulos pequeños, y para estos, $\sin(\alpha) \simeq \alpha$. O sea, se puede prescindir del seno y trabajar con mils[11].

Es útil para determinar el tamaño o la distancia del blanco con una precisión aceptable para disparos de rifle y distancias cortas de artillería. Muchas miras telescópicas usadas en rifles tienen retículas que se marcan en mils.

Así, para objetos de tamaño conocido se puede calcular su distancia. Por ej.

[10] Ideado por Charles-Marc Dapples (1837-1920), profesor de la Universidad de Lausana.

[11] Un mil sustenta aproximadamente un metro en una distancia de mil metros. Ya que para ángulos pequeños, se identifican el cateto opuesto y la cuerda con el arco.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ejemplo 3. *Para calcular la distancia entre laderas opuestas de un barranco, sabiendo que una persona de 1.83 m de altura sustenta desde el lado opuesto un ángulo de 3 mils. Basta usar la igualdad de la medida en radianes, de donde se despeja el radio o distancia*

$$\frac{3}{1000} = \frac{1.83}{r} \implies r = \frac{1830}{3} = 610 \; metros$$

Recíprocamente, conociendo la distancia se puede calcular el ángulo.

Ejemplo 4. *Un Land Rover visto lateralmente tiene unos 3 m de largo. Para calcular el ángulo que sustentaría a 100 m de distancia*

$$\frac{\alpha}{1000} = \frac{3}{100} = 0.03 \; radianes \implies \alpha = 0.03 * 1000 = 30 \; mils$$

Como el dedo índice, con el brazo extendido, sustenta unos 30 mils, ésta es la medida angular lateral de un Land Rover a 100 m de distancia.

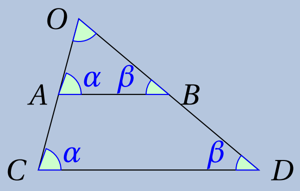
Una mano abierta con el brazo extendido sustenta unos 300 mils. Así,

Ejemplo 5. *Si un objeto de 10 m se oculta completamente con una mano abierta está a una distancia de*

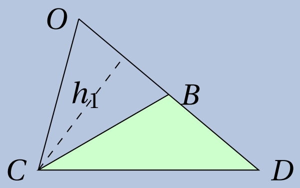
$$\frac{300}{1000} = \frac{10}{r} \implies r = \frac{100}{3} = 33.33 \; metros$$

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

4. Teorema de Tales

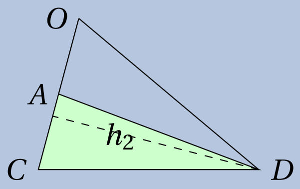


Si por un triángulo se traza una paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes.



Las áreas de los dos triángulos son

$$S(COB) = \frac{h_1 * \overline{OB}}{2}, \quad S(CBD) = \frac{h_1 * \overline{BD}}{2}$$



Las áreas de los dos triángulos son

$$S(DAC) = \frac{h_2 * \overline{AC}}{2}, \quad S(OA) = \frac{h_2 * \overline{DOA}}{2}$$

Como los triángulos verdes CBD y DAC tienen la misma altura sobre CD. Tienen el mismo área $S(CBD) = S(DAC)$. Como el triángulo grande es el mismo, también tienen la misma área los otros dos triángulos pequeños, $S(COB) = S(DOA)$. Multiplicando por 2, tenemos las igualdades.

$$h_1 * \overline{BD} = h_2 * \overline{AC}, \qquad h_1 * \overline{OB} = h_2 * \overline{OA}$$

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

dividiéndolas miembro a miembro y simplificando se obtiene

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Longrightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}+\overline{BD}}{\overline{OA}+\overline{AC}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} \Longrightarrow \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$$

Finalmente, como los dos triángulos iniciales tienen los mismos 3 ángulos, se puede desplazar el triángulo superior OAB hasta hacer coincidir el vértice B con el D. Obteniéndose otra configuración de Tales. Como antes, deducimos otra proporcionalidad de lados, que junto con la anterior, nos da el

Corolario 1. [Teorema de Tales] *Dados dos triángulos, si tienen los mismos ángulos sus lados son proporcionales* $\boxed{\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}}$

Como hay 3 ángulos y 3 configuraciones de Tales posibles entre dos triángulos cuyos lados son proporcionales, tienen también los mismos ángulos[12].

Tales de Mileto (639 - 547/6 a.C.) fue el primero y más famoso de los Siete Sabios de Grecia, fundador de la escuela jónica de filosofía y de la matemática como hoy se concibe. Se cree fue el maestro de Pitágoras. Su teorema se formalizó, mas tarde en el libro de Los Elementos de Euclides.

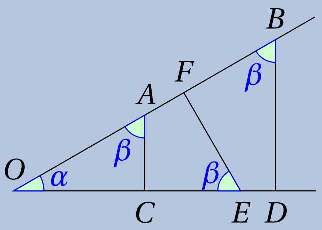
Se le atribuye la aplicación práctica de este teorema, para hallar la altura de la gran pirámide de Keops midiendo su sombra[13].

[12] Así, son **semejantes**, cuando tienen dos ángulos iguales o son proporcionales sus lados.
[13] Ya que los rayos del sol son (casi) paralelos. Cuando tu sombra iguale tu altura

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

5. Las razones de un ángulo

Una aplicación inmediata del teorema de Tales se obtiene con un triángulo rectángulo. Mejor dicho con todos los semejantes a uno dado.



Todos estos triángulos son rectángulos y semejantes, verificando $\alpha+\beta = 90°$. Por tanto, sus lados son proporcionales. O sea, los cocientes de lados correspondientes coinciden. Por ejemplo, $\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OF}}$

Todos los triángulos rectángulos, semejantes entre si, se definen por la pareja de sus ángulos complementarios, $\alpha+\beta = 90°$. O sólo por uno de ellos, ya que el otro está unívocamente determinado por la igualdad $\beta = 90° - \alpha$.

También, todos los triángulos rectángulos, semejantes entre si, vienen determinados por las proporcionalidades entre sus tres lados[14]. Por tanto, esas constantes de proporcionalidad están asociadas al ángulo α[15].

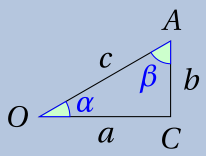
Ahora, dados los valores, a, b, c, de las longitudes de tres lados de un triángulo rectángulo se pueden hacer exactamente 6 cocientes:

[14] Por el teorema de Tales.

[15] Equivalentemente, a su complementario, el ángulo β.

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
Página 17 de 48
Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra



$$\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{c} \text{ y sus tres inversos } \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}$$

Esos 6 cocientes nos van a definir las 6 **razones**[16] de α.

Definición 8. *Se llaman respectivamente,* **coseno, seno, tangente, secante, cosecante y cotangente del ángulo** α.

$$\cos(\alpha) = \tfrac{a}{c},\ \sin(\alpha) = \tfrac{b}{c},\ \tan(\alpha) = \tfrac{b}{a},\ \sec(\alpha) = \tfrac{c}{a},\ \csc(\alpha) = \tfrac{c}{b},\ \cot(\alpha) = \tfrac{a}{b}$$

Al lado a se le llama **cateto contiguo**, *b el* **cateto opuesto** *y c la* **hipotenusa**.

Así, el seno de un ángulo es el cociente del cateto opuesto por la hipotenusa, el coseno es el cociente del cateto contiguo por la hipotenusa, etc.

Observaremos, que con la misma definición, las mismas seis razones son respectivamente el seno, coseno, cotangente, cosecante, secante, y tangente del ángulo complementario[17], $\beta = 90° - \alpha$.

De la definición, se deduce que $\tan(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$. También

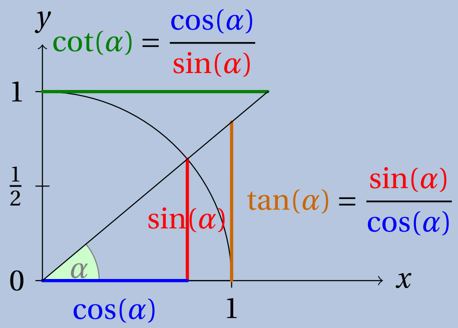
$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)},\ \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)},\ \csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}$$

[16] Llamadas **razones goniométricas o trigonométricas** de α.

[17] La misma hipotenusa, pero el cateto contiguo de β es el opuesto de α y viceversa.

6. Las razones en el primer cuadrante

Si se dibuja un **ángulo agudo** α, esto es $0 \le \alpha \le 90°$, en una circunferencia de radio 1. Se obtienen 3 triángulos semejantes donde se pueden visualizar



4 de las razones de α.

Para $\alpha = 0$, no existe triángulo rectángulo. Del dibujo, $\sin(0) = \tan(0) = 0$, $\cos(0) = 1 = \sec(0)$. Las otras dos razones, csc y cot no existen[18].

Para $\alpha = 90°$, tampoco existe triángulo y $\sin(90°) = 1 = \csc(90°)$, $\cos(90°) = 0 = \cot(90°)$. En este caso, las razones que no existen son la sec y la tan.

Por definición, si un ángulo α es agudo tiene sus 6 razones positivas. Cuando se aceptan ángulos negativos[19] $\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha),\ \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)}$

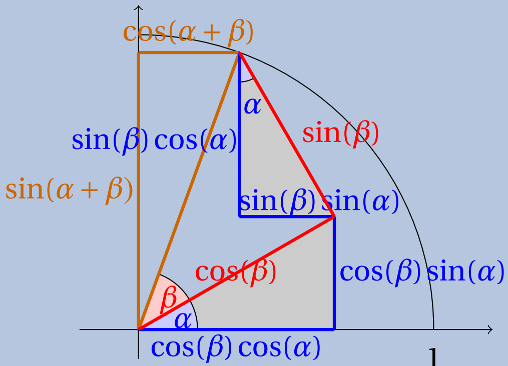
[18] No se puede dividir por cero. Se suele decir que valen infinito.

[19] Ya que cantidades hacia abajo del eje x son negativas. A partir del s. XVII.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

7. Las razones de la suma o diferencia de dos ángulos



Del dibujo

se deducen las fórmulas para las razones de la suma de dos ángulos

Teorema 1. [Ptolomeo A.D. 150, Regiomontanus 1464]

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

Y cambiando β por $-\beta$ se obtienen las razones de la diferencia[20]

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

[20] También se pueden demostrar por proporcionalidad de triángulos o vectorialmente..

Como consecuencia[21], se obtienen las razones del **ángulo complementario**.

$$\begin{aligned}
\cos(90^\circ-\alpha) &= \cos(90)\cos(\alpha)\ +\ \sin(90)\sin(\alpha)=\sin(\alpha)\\
\sin(90^\circ-\alpha) &= \cos(90-(90-\alpha))\ =\ \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

las del **ángulo suplementario**, $180^\circ-\alpha$.

$$\begin{aligned}
\sin(180-\alpha) &= \sin(180)\cos(\alpha)\ -\ \cos(180)\sin(\alpha)=\sin(\alpha)\\
\cos(180-\alpha) &= \cos(180)\cos(\alpha)\ +\ \sin(180)\sin(\alpha)=-\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

y las del **ángulo doble**[22]

$$\begin{aligned}
\sin(2\alpha) &= \sin(\alpha)\cos(\alpha)\ +\ \cos(\alpha)\sin(\alpha)\ =\ 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\\
\cos(2\alpha) &= \cos(\alpha)\cos(\alpha)\ -\ \sin(\alpha)\sin(\alpha)\ =\ \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)
\end{aligned}$$

7.1. Razones en otros cuadrantes.

Las de los ángulos múltiplos de 90°

$$\begin{aligned}
\sin(180^\circ) &= 2\sin(90)\cos(90)=0\\
\cos(180^\circ) &= \cos(90)^2\ -\ \sin(90)^2=-1\\
\sin(270^\circ) &= \sin(90)\cos(180)\ +\ \cos(90)\sin(180)=-1\\
\cos(270^\circ) &= \cos(90)\cos(180)\ -\ \sin(90)\sin(180)=0\\
\sin(360^\circ) &= \sin(90)\cos(270)\ +\ \cos(90)\sin(270)=0\\
\cos(360^\circ) &= \cos(90)\cos(270)\ -\ \sin(90)\sin(270)=1
\end{aligned}$$

[21] Casi todas las fórmulas trigonométricas se obtienen a partir de este teorema.

[22] Las fórmulas del **ángulo mitad** se obtienen de éstas despejando $\sin(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Para un **ángulo obtuso**, $90^\circ \le \alpha \le 180^\circ$, se toma $\alpha = 90^\circ + (\alpha - 90^\circ)$. Así

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin(90^\circ)\cos(\alpha-90^\circ) + \cos(90^\circ)\sin(\alpha-90^\circ) = \cos(\alpha-90^\circ) \\ \cos(\alpha) &= \cos(90^\circ)\cos(\alpha-90^\circ) - \sin(90^\circ)\sin(\alpha-90^\circ) = -\sin(\alpha-90^\circ) \end{aligned}$$

Y para el tercer o cuarto cuadrante se toma, $\alpha = 180^\circ + (\alpha - 180^\circ)$.

7.2. Otras fórmulas trigonométricas.

Dividiendo por $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ en 1 obtenemos

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)} = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)} = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

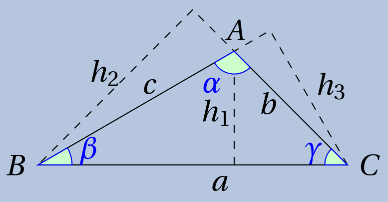
También, sumando se obtiene $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$. Ahora, introduciendo nuevas variables

$$u = \alpha+\beta,\ v = \alpha-\beta \implies \alpha = \frac{u+v}{2},\ \beta = \frac{u-v}{2}$$

se obtiene $\boxed{\sin(u)+\sin(v) = 2\sin(\frac{u+v}{2})\cos(\frac{u-v}{2})}$

Análogamente, se demuestran fórmulas para la diferencia de 2 senos y para la suma o diferencia de 2 cosenos.

8. El teorema de los senos



El área del triángulo vale

$$S = \frac{a * h_1}{2} = \frac{b * h_2}{2} = \frac{c * h_3}{2}$$

del dibujo se obtiene

$\mathrm{Sen}(\beta) = \frac{h_1}{c}$, $\mathrm{Sen}(\gamma) = \frac{h_1}{b}$, $\mathrm{Sen}(\alpha) = \frac{h_2}{c} = \frac{h_3}{b}$

Despejando,

$$h_1 = Sen(\beta) * c = Sen(\gamma) * b, \quad h_2 = Sen(\alpha) * c, \quad h_3 = Sen(\alpha) * b$$

Ahora, por la primera igualdad del área, tenemos

$$a * Sen(\beta) * c = a * h_1 = b * h_2 = b * Sen(\alpha) * c \Longrightarrow a * Sen(\beta) = b * Sen(\alpha)$$

y también

$$a * Sen(\gamma) * b = a * h_1 = c * h_3 = c * Sen(\alpha) * b \Longrightarrow a * Sen(\gamma) = c * Sen(\alpha)$$

dividiendo en ambas igualdades, obtenemos finalmente

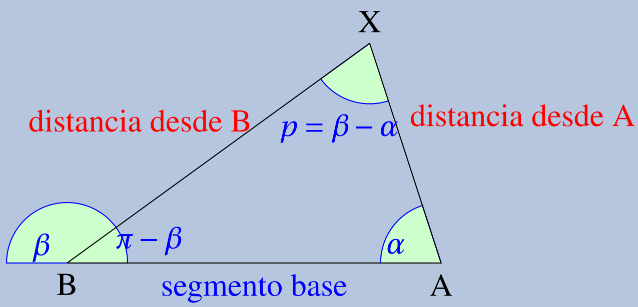
$$\frac{a}{Sen(\alpha)} = \frac{b}{Sen(\beta)} = \frac{c}{Sen(\gamma)}$$

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

9. Cálculo de paralajes

Para calcular la distancia desde un punto, A o B, hasta un objeto X al cual no podemos acceder, basta efectuar una triangulación,



O sea, tomar la referencia de dos puntos hasta los cuales sí podemos acceder y medir los ángulos de visualización del objeto desde ambos puntos.

Se tiene entonces que el triángulo ABX puede resolverse por conocerse un lado AB y los tres ángulos α, β y el $p=\beta-\alpha$ llamado **paralaje** del objetivo.

Del teorema de los senos, se tiene $\frac{AB}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{AX}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{BX}{Sen(\alpha)}$ y despejando

$$
\begin{aligned}
AX &= AB\cdot\frac{\sin(\pi-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)} = AB\cdot\frac{\sin(\beta)}{\sin(p)}\\
BX &= AB\cdot\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)} = AB\cdot\frac{\sin(\alpha)}{\sin(p)}
\end{aligned}
$$

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ejemplo 6. *La distancia rectilínea entre A y B, es AB = 200 m, y los ángulos del mismo lado que forma la dirección del objeto con el segmento base son* $38°12'15''$ *desde A, y* $38°13'07''$ *desde el punto B.*

Entonces, la paralaje es $p = 13'07'' - 12'15'' = 52''$ *y las distancias son*

$$\begin{aligned} d_A &= 200 \cdot \frac{\sin(38°13'07'')}{\sin(52'')} = 200 \cdot \frac{0.618663628}{0.0002521031} = 2454\ m \simeq 2.5\ km \\ d_B &= 200 \cdot \frac{\sin(38°12'15'')}{\sin(52'')} = 200 \cdot \frac{0.618465542}{0.0002521031} = 2453.2\ m \simeq 2.5\ km \end{aligned}$$

9.1. Paralaje diurna. Cuanto más lejos está el objeto, más pequeña es la paralaje p. Cuando el objeto X está demasiado lejano, es conveniente aumentar la longitud del segmento base, a fin de que la medida del ángulo p tenga sentido. Por ej., haciendo que la longitud AB sea un radio terrestre.

En el cálculo de la paralaje diurna, para el cálculo de distancias de objetos en el sistema solar se mide el ángulo desde el mismo punto de observación A en un intervalo de horas desde la culminación hasta la puesta del astro.

De esta forma, uno de los ángulos a medir hacemos que sea recto[23], $\alpha = 90°$ y el despeje de una de las distancia es más sencillo.

$$BX = AB \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(p)} = \frac{AB}{\sin(p)}$$

[23] En la culminación $\alpha = 90°$, el único ángulo entre 0 y π cuyo seno vale 1

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ejemplo 7. *Cuando uno de los observadores ve la Luna en el horizonte y el otro justo encima de su cabeza. La base del triángulo es entonces igual al radio medio de la Tierra,* $r = 6371$ *km, y el ángulo con vértice en la Luna es la paralaje. Su valor observado es de* $p = 57.04' = 0.95°$ *y su distancia es*

$$d = \frac{6371000}{\sin(0.95°)} = 384261197.24 \simeq 384000\ km$$

Así, cuando se toma como segmento base el radio medio de la Tierra, se pueden medir distancias de varias unidades astronómicas, dentro de los confines del sistema solar. El ángulo del objeto es la **paralaje diurna**.

9.2. Paralaje anual. Cuando se trata de medir distancias hasta 250 años luz, es necesario ampliar la longitud del segmento hasta el radio medio de la órbita de la tierra alrededor del Sol, es decir, de unos 150 millones de kilómetros.

El ángulo que se mide se llama la **paralaje anual** de la estrella, en la que también uno de los ángulos es recto[24] y la segunda observación se hace desde el mismo punto a los 6 meses midiendo p sobre el fondo de estrellas fijas[25].

De esta forma, también el despeje de la distancia es sencillo $BX = \frac{AB}{\sin(p)}$

[24] El ángulo es 90° en la culminación de la estrella por el meridiano del lugar

[25] A lo largo del año, algunas estrellas trazan una pequeña elipse sobre el cielo, su paralaje es la máxima distancia angular de dicha elipse.

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
◂◂ ▸▸
◂ ▸

Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

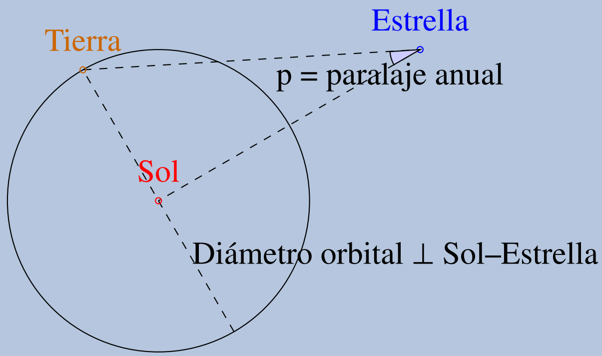
En base a esto, se define una unidad de medida

Ejemplo 8. *Para una paralaje de un segundo, $p = 1''$, y con el radio medio de la órbita terrestre, r = 150 000 000 km, se tiene*

$$d = \frac{r}{\sin(1'')} = \frac{150000000}{0.000004848} = 3.093972094 \cdot 10^{13}\ km \simeq 31 Pm$$

si dividimos por la distancia que recorre la luz en un año $300000 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 0.946080000 \cdot 10^{13}$ *obtenemos* $\boxed{d = \frac{3.093972094 \cdot 10^{13}}{0.946080000 \cdot 10^{13}} \simeq 3.26}$ *años luz.*

Definición 9. *Se llama* **parsec** *(paralage second) a la distancia anterior.*

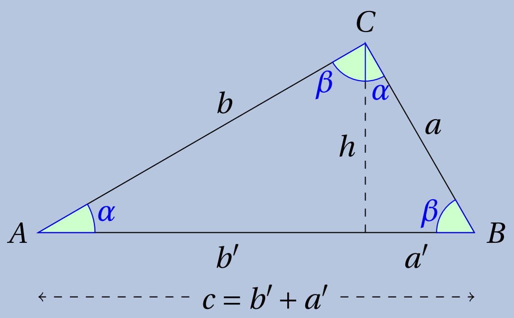


Como consecuencia de la definición de parsec, si la paralaje, p, de una estrella se mide segundos de arco, entonces su distancia en parsecs es $d = 1/p$.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

10. El teorema de los catetos y de la altura

Dado un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos, b' y a', que son las proyecciones de los dos catetos.



Si $\alpha + \beta = 90°$, se obtienen tres triángulos rectángulos semejantes. Por tanto

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{b'}, \quad \frac{a}{a'} = \frac{c}{a'}, \quad \frac{h}{b'} = \frac{a'}{h}$$

de donde

$$b^2 = b' * c, \quad a^2 = a' * c$$

y también $h^2 = b' * a'$

La igualdad $h^2 = b' * a'$ es equivalente a $\boxed{h = \sqrt{b' * a'}}$, llamado el **teorema de la altura**[26].

Las igualdades $\boxed{a^2 = a' * c}$ y $\boxed{b^2 = b' * c}$ son llamadas el **teorema de los catetos**. Son las que usaremos para demostrar el de Pitágoras.

[26] La altura sobre la hipotenusa es la media geométrica de las proyecciones de los catetos.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

11. El teorema de Pitágoras

Se atribuye a Pitágoras[27] la primera demostración del teorema que lleva su nombre, basada en semejanza de triángulos rectángulos.

Con la terminología anterior, si b' y a' son las proyecciones de los dos catetos b y a sobre la hipotenusa, se tiene $b^2 = b' * c$ y $a^2 = a' * c$ y por tanto

$$\boxed{a^2 + b^2 = a' * c + b' * c = (a' + b') * c = c * c = c^2}$$

12. La relación fundamental de la trigonometría plana

Dado un ángulo α, por el teorema de Pitágoras, se tiene que

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

O sea, hemos demostrado el

Teorema 2. [Teorema fundamental de la trigonometría plana]
Para cualquier ángulo α, se verifica

$$\boxed{\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1}$$

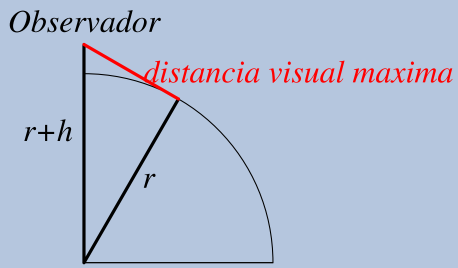
[27] Pitágoras de Samos (aproximadamente 582 - 507 a.C.), filósofo y matemático griego. Sus discípulos mantuvieron la hermandad pitagórica hasta el siglo V d.C.

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
Página 29 de 48
Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

Sabiendo la altura del observador, por el teorema de Pitágoras, se puede calcular la distancia máxima de visualización.

Ejemplo 9. *Si una persona se encuentra en una llanura sin obstáculos. ¿ Cuál es distancia máxima que puede ver ?*

Solución: Se obtiene un triángulo rectángulo con hipotenusa la línea recta desde el centro de la tierra hasta los ojos de la persona, uno de los catetos es también el radio de la tierra y el otro cateto es la visual desde los ojos de la persona hasta el punto tangente con la tierra.



Así, para hallar la distancia máxima de visualización, hay que resolver un triángulo rectángulo. Suponiendo que la persona tiene los ojos a 2 metros del suelo (es muy alta) y el radio medio de la tierra $r = 6\,371\,000$ m, sale

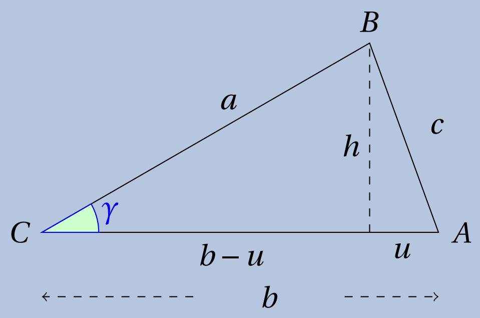
$$d = \sqrt{(r+2)^2 - r^2} = 5048.17 \textit{ metros}$$

O sea, aunque tenga prismáticos puede ver poco más allá de 5 km.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

13. El teorema del coseno

Para un ángulo recto este teorema es equivalente al de Pitágoras. Su demostración[28], por tanto, se hace para el caso de un triángulo no rectángulo.



Por el teorema de Pitágoras,

$$c^2 = h^2 + u^2$$

$$a^2 = h^2 + (b-u)^2 \;=\; h^2 + b^2 - 2bu + u^2$$

de donde $c^2 \;=\; a^2 - b^2 + 2bu$

Ahora, $Cos(\gamma) \;=\; \frac{b-u}{a}$ y despejando

$$u \;=\; b - aCos(\gamma)$$

Finalmente, sustituyendo

$$\boxed{c^2 \;=\; a^2 + b^2 - 2abCos(\gamma)}$$

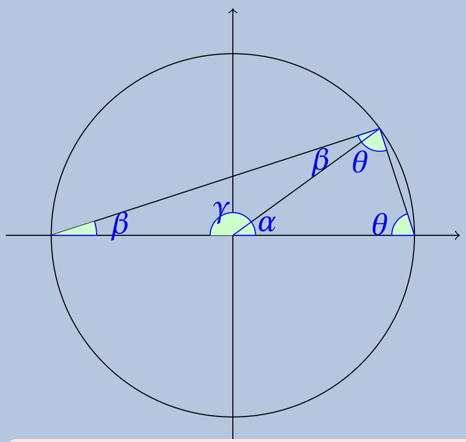
Si se hace la demostración para un ángulo obtuso γ, la fórmula que se obtiene lleva signo mas en vez de menos.
Como el coseno de un ángulo obtuso es negativo, la fórmula que se obtiene formalmente es la misma que para un ángulo agudo.

[28] Para un ángulo, γ, obtuso, la demostración es análoga.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

14. Ángulos inscritos en la circunferencia

Los ángulos inscritos están en relación con los ángulos centrales.



Del triángulo isósceles pequeño de la izquierda, obtenemos

$$2\beta + \gamma = 180^\circ$$

Por otro lado, se tiene la relación inmediata

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

De donde, se deduce que

$$\alpha = 2\beta$$

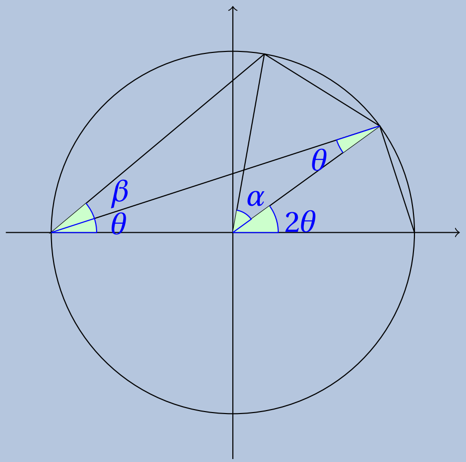
Usando también el triángulo isósceles pequeño de la derecha, obtenemos

$$2\theta + \alpha = 180^\circ$$
$$2\beta + \gamma = 180^\circ$$

sumando, $2\beta + 2\theta + \alpha + \gamma = 360^\circ$ y ahora restando $\alpha + \gamma = 180^\circ$ se obtiene $2\beta + 2\theta = 180^\circ$. Finalmente, dividiendo por 2, $\boxed{\beta + \theta = 90^\circ}$

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra



Por el resultado de arriba, tenemos que

$$\alpha + 2\theta = 2(\beta + \theta)$$

De donde, restando 2θ, se deduce

$$\alpha = 2\beta$$

O sea, cualquier ángulo, α, visto desde el centro es el doble del ángulo, β, visto desde la circunferencia.

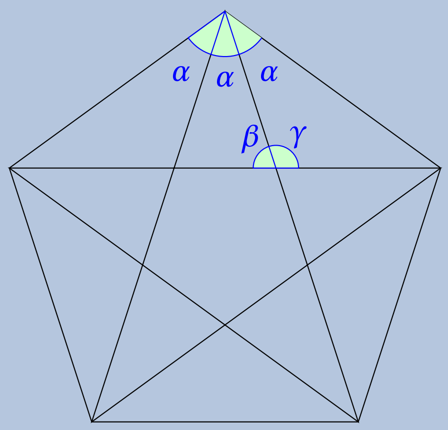
El resultado anterior permite calcular los ángulos de un n-ágono regular.

Definición 10. *Un n-ágono regular*[29] *es un polígono que tiene sus lados y sus ángulos iguales entre si. Así, en cada vértice inciden dos lados.*

El n-ágono regular convexo se obtiene dividiendo una circunferencia en n partes iguales. Así, el ángulo central que sustenta uno cualquiera de sus lados vale $\frac{2\pi}{n}$. Por tanto, el ángulo, θ, en uno de sus vértices sustenta el arco de los $n-2$ lados restantes, visto desde el centro este ángulo vale $(n-2)\frac{2\pi}{n}$. Luego, visto desde el vértice vale la mitad $\boxed{\theta = (n-2)\frac{\pi}{n}}$

[29]Para $n = 3,4$, son el triángulo equilátero y el cuadrado, para cada $n > 4$ hay dos polígonos regulares uno convexo y otro estrellado.

14.1. Las razones de 72°. Para obtener las razones del ángulo de 72°. Basta dibujar el pentagrama pitagórico[30] y darse cuenta que todos los triángulos que se obtienen son isósceles y que todos los ángulos valen 36°, 72° o 108°.



Por un resultado anterior, tenemos que cualquiera de los tres ángulos de cada vértice (15 en total) satisfacen

$$72^\circ = \frac{360^\circ}{5} = 2\alpha$$

De donde, dividiendo por 2

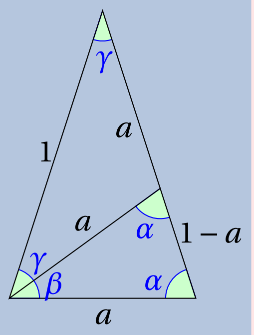
$$\alpha = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

Finalmente,

$$\gamma = 180 - 2\alpha = 180 - 72 = 108^\circ$$
$$\beta = 180 - \gamma = 180 - 108 = 72^\circ$$

[30]Si se divide una circunferencia en 5 partes iguales, los 5 puntos dan lugar a dos polígonos regulares. Uniendo cada uno con su siguiente (pentágono regular) o bien cada uno con el siguiente de su siguiente (pentágono estrellado).

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra



Del triángulo isósceles pequeño (lados a, a y $1-a$), obtenemos que el ángulo β vale $180°-2\alpha$.
Del triángulo isócesceles grande (lados 1, 1 y a), obtenemos que $\beta+\gamma=\alpha$ y que $\gamma=180°-2\alpha$.
O sea, que $\beta=\gamma=180°-2\alpha$. Por tanto,

$$\alpha=\beta+\gamma=2\beta \quad\Longrightarrow\quad \beta=180°-2\alpha=180°-4\beta \quad\Longrightarrow$$

$$5\beta=180° \Longrightarrow \beta=180°/5=36° \Longrightarrow \alpha=2\beta=2*36=72°$$

Así, el triángulo pequeño y el grande tienen el mismo valor de sus tres ángulos 72°, 72° y 36°.
Como son proporcionales, se tiene

$$\frac{1}{a}=\frac{a}{1-a} \quad\Longrightarrow\quad 1-a=a^2 \quad\Longrightarrow\quad a^2+a-1=0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene

$$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.618034$$

Si trazamos la altura h del triángulo isósceles grande, obtenemos un triángulo rectángulo con hipotenusa 1. Así, podemos calcular el coseno de α, como cateto contiguo partido por 1. O sea,

$$\cos 72°=\frac{a/2}{1}=\frac{a}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=0.309017$$

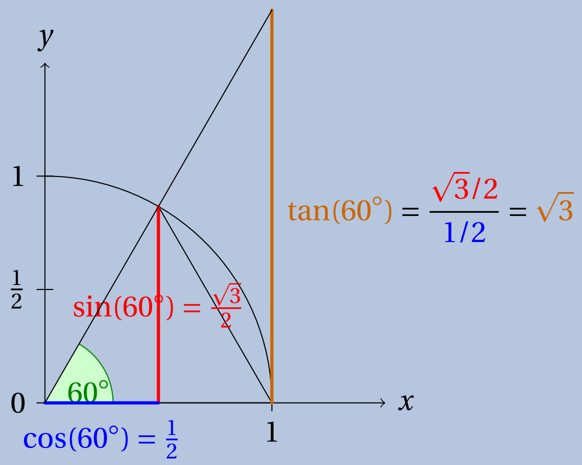
$$\sin 72°=\sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=0.951057$$

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

15. Las razones de 60°

Por 2, sabemos que cualquier triángulo equilátero tiene sus 3 ángulos de 60°. Lo inscribimos en una circunferencia de radio igual al lado y lo bisecamos.

Obtenemos un triángulo rectángulo de hipotenusa 1, base 1/2.
Y por Pitágoras, altura = $\sqrt{1-(1/2)^2} = \sqrt{3}/2$. Entonces sus razones



son[31] $\boxed{\cos(60°) = 1/2, \quad \sin(60°) = \sqrt{3}/2, \quad \tan(60°) = \sqrt{3}}$

[31] Es costumbre, escribir números con su expresión algebraica no decimal.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ahora, podemos usar las fórmulas del ángulo mitad para hallar las razones de 30° y después las de 15°. En efecto, por 7, sabemos que
$\cos(\alpha) = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2) \;=\; 1 - 2\sin^2(\alpha/2) \;=\; 2\cos^2(\alpha/2) - 1$

Despejando $\sin(\alpha/2),\ \cos(\alpha/2)$, obtenemos las **fórmulas del ángulo mitad**

$$\boxed{\sin(\tfrac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos(\alpha)}{2}}, \quad \cos(\tfrac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\tfrac{1+\cos(\alpha)}{2}}, \quad \tan(\tfrac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}}$$

donde los signos se eligen de acuerdo al cuadrante

	1°	2°	3°	4°
sen	+	+	-	-
cos	+	-	-	+

16. Las razones de 30°

Como $30° = 60°/2$, obtenemos $\sin(30°) = \sqrt{\frac{1-1/2}{2}} = \frac{1}{2}$, $\quad\cos(30°) = \sqrt{\frac{1+1/2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y por tanto $\tan(30°) = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

17. Las razones de 15°

Como $15° = 30°/2$, obtenemos $\sin(15°) = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.
Análogamente, $\cos(15°) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ y $\tan(15°) = 2-\sqrt{3}$

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
Página 37 de 48
Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

18. Tabla de razones trigonométricas.

Como $36° = 72°/2$, $18° = 36°/2$ y $45° = 90°/2$ podemos obtener fácilmente las razones de estos ángulos hasta obtener sus expresiones no decimales

grad	rad	Seno	Coseno	Tangente
0	0	0	1	0
15	$\pi/12$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$2-\sqrt{3}$
18	$\pi/10$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{(3\sqrt{5}-5)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{10\sqrt{2}}$
30	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
36	$\pi/5$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$
45	$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
72	$2\pi/5$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
75	$5\pi/12$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$2+\sqrt{3}$
90	$\pi/2$	1	0	∞

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

19. Desarrollos en serie.

Con lo anterior y con ayuda del cálculo, podemos obtener tablas numéricas hasta $\alpha = 3°$. Pero si queremos llegar a $\alpha = 1°$. O hallar las expresiones decimales para un ángulo arbitrario necesitamos métodos más potentes.

Existen series en función del ángulo x en radianes para hallar, de forma todo lo aproximado que queramos, las razones de un ángulo arbitrario.

Teorema 3. [Newton 1669, Leibniz 1691, Jac. Bernoulli 1702]

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots \end{aligned}}$$

La demostración se sale del contexto de estas notas[32]. Pero su utilidad es clara si queremos hallar numéricamente las razones de un ángulo.

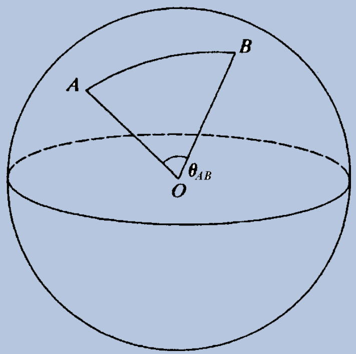
Ejemplo 10. *Como $\alpha = 1°$ es un ángulo pequeño, su seno se puede aproximar con pocos sumandos. Esto es, como $\pi/180 \simeq 0.0174532925$ se tiene $\sin(1°) = \sin(\pi/180) \simeq \sin(0.0174532925)$ y con sólo 3 sumandos de su serie se ve que se hallan más de 10 decimales exactos de $\sin(1°) \simeq$*

$$0.0174532925 - 0.0000008860962 + 0.000000000013496 = 0.0174524064373$$

[32]Una opción es definir así las funciones seno, coseno. Después sus propiedades.

20. Apéndice. La edad del universo

En el modelo estandard del universo[33] se consideran las estrellas y todos los objetos sobre una superficie esférica de radio, $R(t)$, función del tiempo trancurrido desde el BigBang, de forma que la distancia estre dos estrellas A y B se obtiene conociendo el ángulo fijo θ_{AB} desde el centro de dicha esfera.



En 1930, E. P. Hubble descubrió que las galaxias distantes están alejándose de nosotros y su velocidad de recesión es proporcional a la distancia[34]
$v_{AB} = d_{AB} * H$

El valor de la constante cosmológica H de Huble vale actualmente entre 50 y 100 km/s por cada millón de parsec.

La justificación teórica es elemental y se basa en el valor fijo del ángulo θ_{AB} en radianes que da la distancia
$d_{AB} = \theta_{AB} * R(t) \Longleftrightarrow \theta_{AB} = \frac{d_{AB}}{R(t)}$

---

[33] Hoy día, la mayor parte de los físicos aceptan que el universo está en expansión desde un primer momento llamado Big Bang.

[34] Esta regla es aproximada ya que no se mantiene para las galaxias muy cercanas y las muy lejanas ya que tienen un componente de movimiento aleatorio.

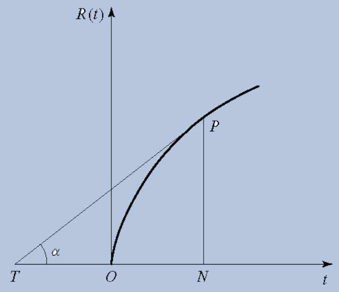
ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Si se deriva esta igualdad respecto al tiempo, se obtiene la velocidad. Así

$$v_{AB} = \theta_{AB} * \frac{dR}{dt} = \theta_{AB} * R'(t) = \frac{d_{AB}}{R(t)} * R'(t) = d_{AB} * \frac{R'(t)}{R(t)}$$

De donde sale el valor teórico de la constante de Hubble $\boxed{H = \frac{R'(t)}{R(t)}}$

Esto permite calcular la edad del universo ya que si se considera la función $y = R(t)$[35] su derivada en un tiempo t es la tangente a la curva $R'(t) = \tan(\alpha)$



Pero del dibujo se tiene que $R'(t) = \tan(\alpha) = \frac{R(t)}{TN}$ donde TN es el tiempo de Hubble. O sea, el tiempo transcurrido desde el Big Bang hasta la actualidad suponiendo que la razón de expansión del universo ha sido invariable.

TN se despeja de la igualdad anterior[36] $\boxed{TN = \frac{R(t)}{R'(t)} = \frac{1}{H}}$ Lo que nos permite a partir de estimaciones experimentales de H calcular una edad del universo.

[35] Radio del universo desde cero en el Big Bang hasta la actualidad.
[36] De esta forma, un valor experimental de H nos da una edad estimada del universo.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ejemplo 11. *¿ Cuanto sale la edad del universo en años si H = 50 o 100?*

Como 1 parsec es la distancia a la que se encuentra un objeto que sustenta un ángulo de 1" cuando el arco sustentado es 150 millones de km ($150 * 10^6 = 1.5 * 10^8$ km), se tiene que 1 parsec es la distancia d tal que

$$\sin(1") = \frac{1.5 * 10^8}{d} \Leftrightarrow d = \frac{1.5 * 10^8}{\sin(1")} = \frac{1.5 * 10^8}{0.00000484814} = 3.09397 * 10^{13} \text{ km}$$

Si H = 50 o 100 respectivamente se tiene

$$H = \frac{50 \text{ km}}{s * 10^6 * 3.09397 * 10^{13} \text{ km}} = 1.61605 * 10^{-18} \frac{1}{s} = 5.09636 * 10^{-11} \frac{1}{\text{año}}$$

$$H = \frac{100 \text{ km}}{s * 10^6 * 3.09397 * 10^{13} \text{ km}} = 3.23209 * 10^{-18} \frac{1}{s} = 1.01927 * 10^{-10} \frac{1}{\text{año}}$$

Entonces, la edad del universo respectivamente sale

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{5.09636 * 10^{-11}} = 1.96218 * 10^{10} \simeq 20 * 10^9 = 20 \text{ Gy}$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{1.01927 * 10^{-10}} = 9.81094 * 10^9 \simeq 10 * 10^9 = 10 \text{ Gy}$$

La determinación más reciente y más precisa de la constante de Hubble es: 71 y sale una edad de 13.8 Gigaaños (13 mil ochocientos millones de años).

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

21. Ejercicios.

Ejercicio 1. *¿ Cuál es distancia máxima que se puede visualizar desde el pico Mulhacén ? ¿ Alcanza a ver África ?*

Ejercicio 2. *Calcula, usando las fórmulas de las razones del ángulo mitad, las razones de* 36°.

Ejercicio 3. *Calcula, usando las fórmulas de las razones del ángulo mitad,, las razones de* 18°.

Ejercicio 4. *Calcula, usando el coseno de la diferencia de dos ángulos, las razones de* 3°.

Ejercicio 5. *Calcula la distancia entre dos laderas opuestas, sabiendo que una persona de 1.75 m de altura sustenta un ángulo de 2 mils.*

Ejercicio 6. *Calcula el ángulo horizontal que sustenta un portaaviones de 318 metros de eslora (el USS Kitty Hawk, de la Séptima Flota de EE.UU.) a 1 km de distancia. ¿Y a 100 km?.*

Ejercicio 7. *Calcula las distancias desde A y B a un punto X, sabiendo que* $|AB| = 200$ *m y los ángulos medidos desde A y B, son respectivamente* 30°*12'15"* y 30°*12'07".*

Ejercicio 8. *Un punto C de cota 150, y otro B de cota -400; o sea, en una depresión a 400 metros bajo el nivel del mar. Distan horizontalmente, 0.5 km. Halla la pendiente en el terreno entre ambos puntos.*

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ejercicio 9. *En un mapa 1:10 000, se localizan dos puntos, el C* (500) *y el B*(400) *que se encuentra a 2.5 cm a la derecha y 3.1 cm hacia abajo del C. Halla la pendiente en el terreno entre ambos puntos.*

Ejercicio 10. *En un mapa 1:10 000, se localizan C* (1300) *y otro punto B que se inclina* 35° *al NE y se encuentra a 3 cm a la derecha y 2.1 cm hacia arriba del C. Halla la distancia vertical entre ambos.*

Ejercicio 11. *Un punto C de cota 500 m, pasa una recta de dirección N225°E y una inclinación de* 30° *hacia el SW. Determina la distancia hasta un punto de dicha recta a cota 250 m. ¿Sobra algún dato?.*

Ejercicio 12. *En un mapa 1:10 000, se localizan tres puntos, el* $A_1(100)$, *el* $A_2(200)$ *y el* $A_3(300)$ *tales que el* A_2 *está 3 cm al este y 1 cm al sur de* A_1, *mientras que el* A_3 *se encuentra 2.5 cm al este y 2.3 cm al norte del* A_1. *Resuelve el triángulo formado por* A_1, A_2 *y* A_3.

22. Test de repaso.

Para comenzar el cuestionario pulsa el botón de inicio.
Cuando termines pulsa el botón de finalizar.
Para marcar una respuesta coloca el ratón en la letra correspondiente y pulsa el botón de la izquierda (del ratón).

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Inicio del Test

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?.

(a) Un ángulo es cualquier pareja de rectas.
(b) Un ángulo es cualquier pareja de semirectas.
(c) Un ángulo es una semirecta con vértice en el origen de coordenadas.
(d) Un ángulo es cualquier pareja de semirectas con un vértice común.

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Un ángulo no puede ser negativo.
(b) Un ángulo no puede ser mayor de $360°$.
(c) Un ángulo siempre tiene un valor equivalente entre $-180°$ y $180°$.
(d) El valor de un ángulo no puede ser mayor de 2π ni menor de 2π.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) $1°$ vale $\frac{180}{\pi}$ radianes.
(b) $1°$ no tiene equivalencia en radianes.
(c) $1°$ es mucho mas pequeño que 1 radian.
(d) $1°$ vale $\frac{9}{160}$ radianes.

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

(a) Un mil es más pequeño que 1° y mucho mas pequeño que un radian.
(b) Un ángulo de 1 mil es aproximadamente una milésima de un grado sexagesimal.
(c) Un ángulo de 1 mil vale 7.7778 grados.
(d) Un mil es una unidad de medida lineal.

5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) El teorema de Tales se demuestra con triángulos semejantes.
(b) Todas las demostraciones trigonométricas son gráficas.
(c) Algunas demostraciones trigonométricas son algebraicas.
(d) El teorema de Tales no tiene demostración.

6. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) El teorema de Pitágoras es equivalente a la relación fundamental de la trigonometría plana.
(b) El teorema de Pitágoras sólo se demuestra gráficamente.
(c) El teorema de Pitágoras sirve para demostrar el de Tales.
(d) La trigonometría plana sirve para demostrar los teoremas clásicos.

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Las razones de un ángulo se definen por el teorema de Pitágoras.

(b) Las razones de un ángulo son tres.
(c) Las razones de un ángulo son argumentos para estudiar un triángulo.
(d) Las razones de un ángulo se definen por el teorema de Tales.

8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) El teorema de los catetos es equivalente al de la altura.
(b) El teorema de los catetos implica el de Pitágoras.
(c) El teorema de los catetos es equivalente al de Pitágoras.
(d) El teorema de la altura implica la relación fundamental de la trigonometría.

9. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) El teorema de los senos es equivalente al del coseno.
(b) El teorema de los senos implica el del coseno.
(c) El teorema del coseno implica el de Pitágoras.
(d) Estos teoremas sólo tienen utilidad gráfica.

10. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) El coseno de la diferencia de dos ángulos sólo se puede calcular en algunos casos.
(b) El coseno de la diferencia de dos ángulos sólo sirve para resolver triángulos.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

(c) El coseno de la suma de dos ángulos equivale al de la diferencia.

(d) El coseno de la diferencia de dos ángulos implica muchas fórmulas trigonométricas.

11. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) El ángulo interior de un pentágono regular convexo vale 72°.

(b) El ángulo interior de un pentágono regular convexo vale 36°.

(c) El ángulo interior de un pentágono regular convexo vale 60°.

(d) El ángulo interior de un pentágono regular convexo vale 108°.

Final del Test | Puntos:

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra