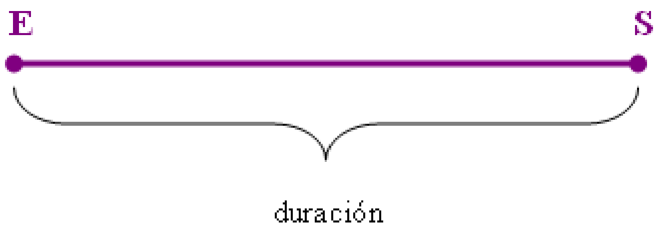
1.1 INTRODUCCIÓN

El tiempo juega un papel fundamental en Demografía, pudiéndose distinguir dos acepciones del tiempo desde el punto de vista analítico:

a) El tiempo de *calendario*, que refiere al tiempo cronológico, permitiendo registrar el momento en el que ocurre un suceso demográfico.

b) El tiempo como *duración*, que refiere al tiempo transcurrido desde un suceso origen o anterior experimentado por un individuo; en el caso de que el suceso origen sea el nacimiento, esta duración coincidirá con la edad del individuo.

Los fenómenos demográficos observados usan simultáneamente las dos acepciones del tiempo y para su representación digital se usa una recta que refleja la vida demográfica de un individuo. Siempre existe un punto de entrada en observación (E) y otro de salida (S); si señalamos en la recta estos puntos tendremos un segmento, de forma que la distancia entre ellos representa la duración.



Por ejemplo, si tomamos como suceso inicial (E), el nacimiento ocurrido el 31/10/1990 (tiempo de calendario) y como suceso final o de salida, la muerte, ocurrida el 30/12/1998, el individuo habrá vivido 8 años y dos meses (duración) y por lo tanto falleció con 8 años y dos meses de edad exacta ó 8 años de edad cumplida.

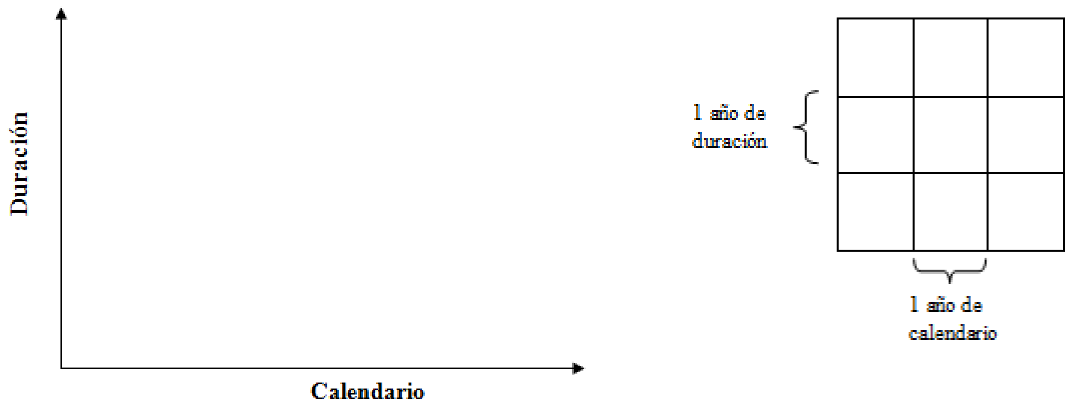
De esta forma, la observación de cualquier acontecimiento demográfico puede representarse como un punto en dicho segmento:

En Demografía se estudian simultáneamente muchos individuos por lo que no es muy aconsejable ni práctica esta representación. Tanto es así que la demografía ha desarrollado un instrumento que permite despejar visualizar los acontecimientos de muchos individuos en el tiempo: *el diagrama de Lexis.*

1.2 DIAGRAMA DE LEXIS

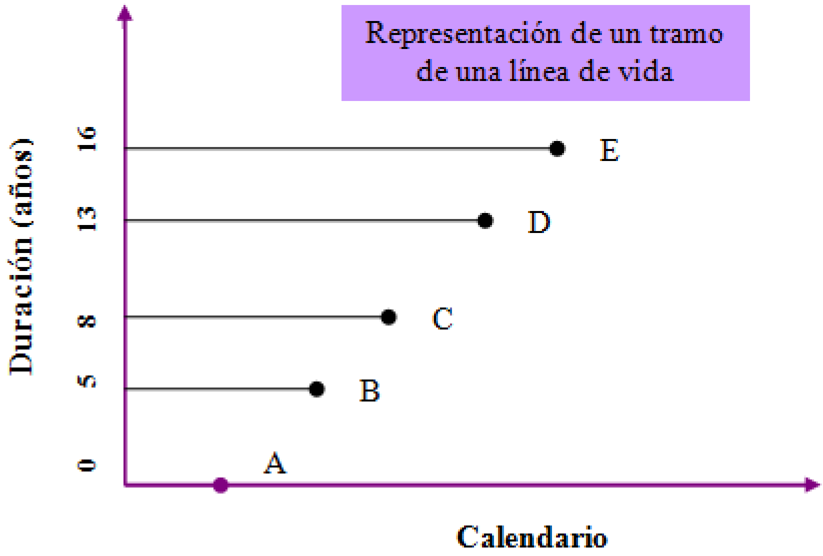
Se debe al estadístico y economista alemán Lexis (1837-1914), aunque se le atribuye a Zeuner y Becker, también estadísticos alemanes del siglo XIX. El diagrama de Lexis permite representar las dos acepciones del tiempo; es un cuadrante cartesiano cuyo eje de abscisas representa el tiempo cronológico y el de ordenadas el tiempo como duración, y que permite la ubicación en sus correctas coordenadas temporales de los acontecimientos demográficos y efectivos de una población.

Existe una condición fundamental que todo diagrama de Lexis debe cumplir para ser operativo: la unidad de medida temporal en ambos ejes. Si las abscisas se representan en el tiempo cronológico con periodicidad anual, la misma amplitud de intervalo debe fijarse en la duración o edad en el eje de ordenadas. La medida de tiempo puede ser cualquiera, siempre que se cumpla ese requisito de igualdad. Las más utilizadas son, sin duda, el año y el quinquenio, pero nada impide el uso de otras.



1.3 LAS LÍNEAS DE VIDA

La correspondencia de medidas entre cronología y duración permite establecer con facilidad la tercera dimensión temporal, las *líneas de vida*. Estas se representan por líneas diagonales, paralelas a la bisectriz del ángulo de 90º formado por los ejes cartesianos del diagrama de Lexis. Una línea de vida completa se inicia en el punto del eje de abscisas correspondiente a la fecha de nacimiento del individuo. A lo largo de ella se pueden marcar aquellos acontecimientos relevantes demográficamente que han jalonado su existencia. Se puede representar un tramo de dicha vida, como en el caso de la formación académica de un individuo. Sin embargo, la edad en cada instante es fácilmente calculable si se conoce la que tenía en el momento inicial de la observación. Las sucesivas referencias B, C y D representas los momentos de finalización de una etapa de formación y el inicio de la siguiente. El punto E marca el final del fenómeno formación académica para este individuo.



De igual forma, se puede realizar la línea de vida completa perteneciente a la persona estudiada, y en la cual se encontrarán otros hitos que marcan su existencia: el nacimiento, la entrada en actividad laboral, el matrimonio, el nacimiento de hijos, la disolución por divorcio del matrimonio, un segundo matrimonio, etc. y la muerte.

1.4 COHORTES Y GENERACIONES

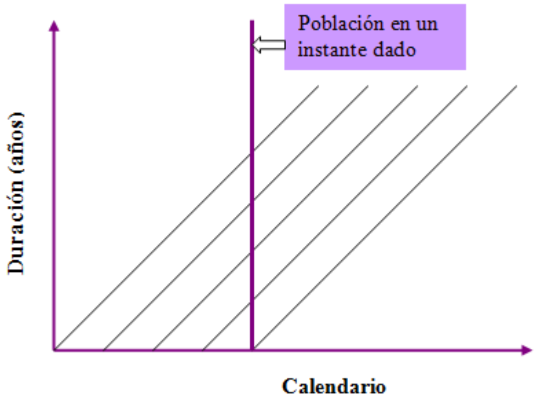
Sobre el diagrama de Lexis, cada individuo perteneciente a una población cuenta con una línea de vida. Por ello, las líneas de vida suelen agruparse, formando cohortes. Una ***cohorte*** es, por tanto, el conjunto de líneas de vida que comparten la experiencia, dentro de un determinado periodo temporal, de un mismo suceso-origen. Se habla por ejemplo, de las cohortes de mujeres que tuvieron su primer hijo en el quinquenio 1970-1974. En este caso el diagrama de Lexis correspondiente cuenta, con el eje de ordenadas, con el tiempo transcurrido desde el momento del acontecimiento que define la cohorte. Es por eso que esta dimensión temporal se define como tiempo-duración.

La ***edad*** es, consecuentemente, el tiempo-duración que tiene como suceso-origen el nacimiento, y las cohortes así definidas toman el nombre de ***generaciones***, por lo que en lugar de hablar de la cohorte de nacidos en 1972 se debe hacer referencia a la generación de 1972.análogamente en la literatura francesa es habitual utilizar la palabra *promoción* para referirse a las cohortes de matrimonio.

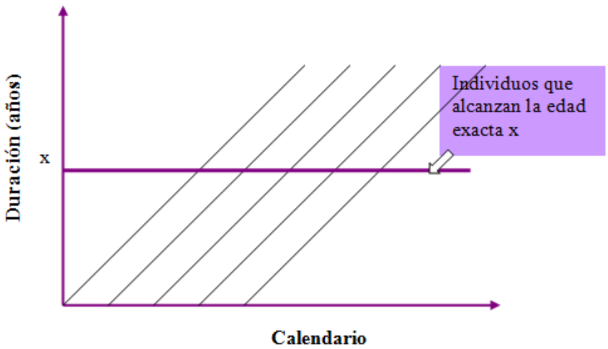
1.5 LÍNEAS Y SUPERFICIES

Además de la línea de vida, definimos:

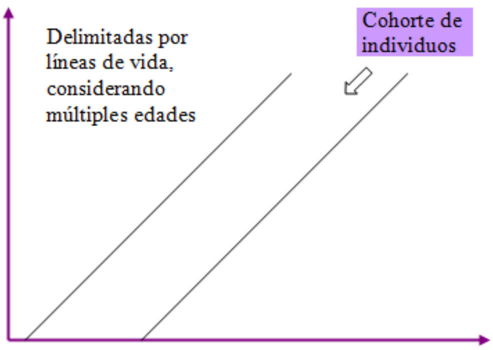
- **Isócrona:** perpendicular al eje de fechas de cualquier punto y es atravesada por líneas de vida que proporcionan el recuento de población en un instante.

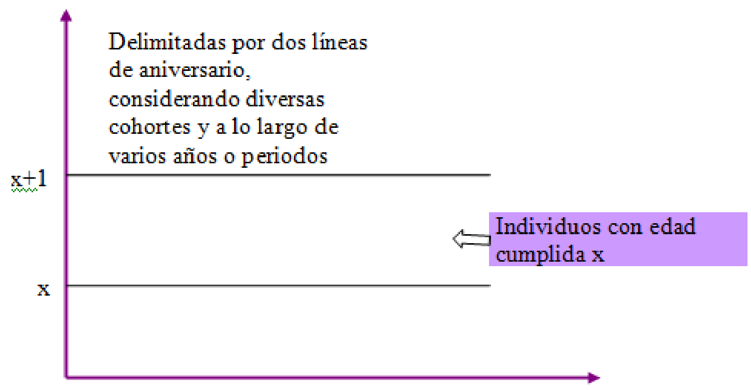


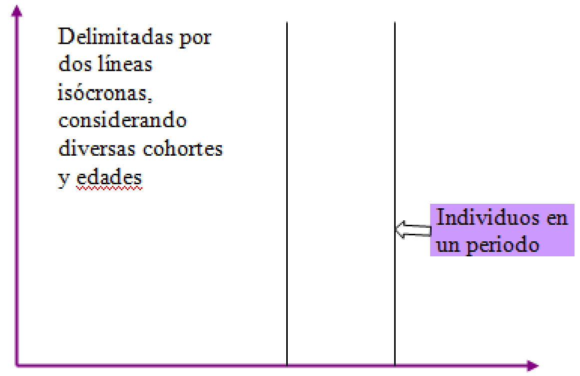
- **De aniversario:** paralelo al eje de fechas por cada edad o duración exacta y es atravesada por líneas de vida.



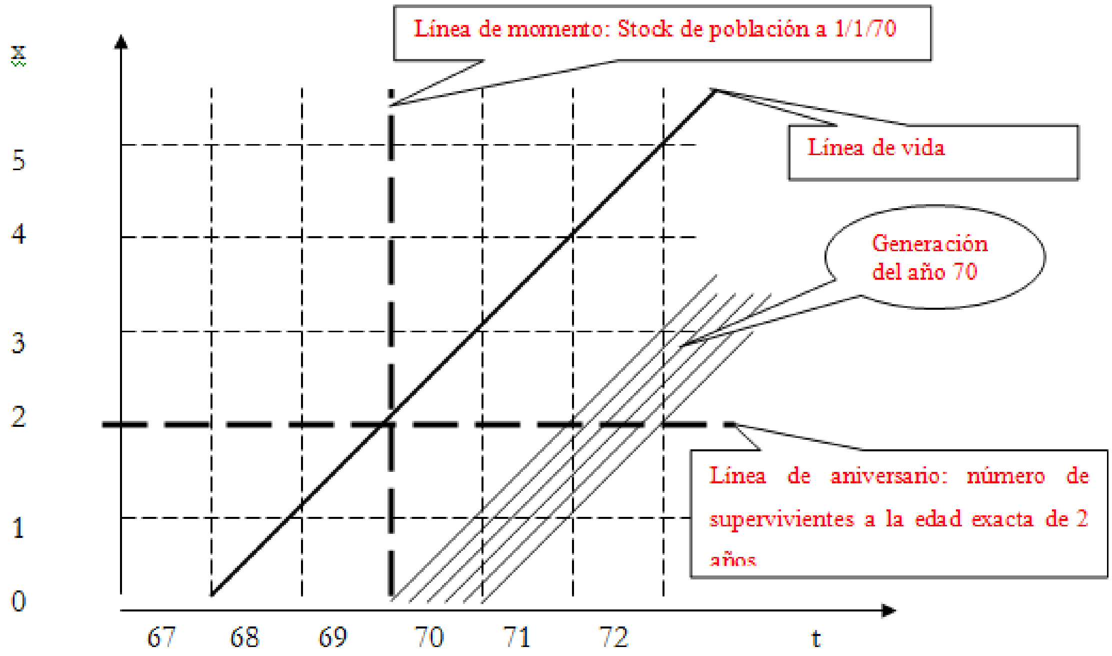
- **Superficies abiertas:**







Como ejemplo, en el diagrama de Lexis podemos encontrar:

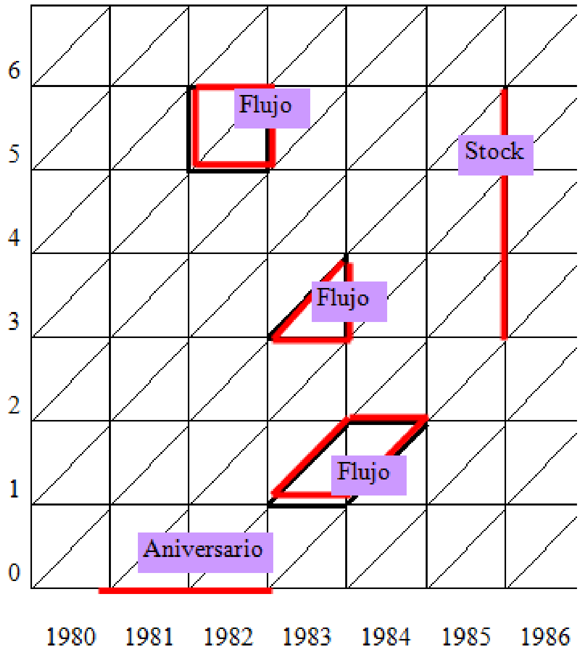


1.6 STOCKS (ESTADOS) Y FLUJOS

Los ***stocks*** son recuentos de efectivos en un momento temporal concreto, un corte transversal en el devenir continuo de la población de una población. Los stocks no registran fenómenos sino estructuras: dan una imagen estática, una fotografía de la población. El mejor ejemplo de stock es el censo.

Los cambios que experimenta una población se hacen evidentes al estudiarla en dos instantes de tiempo distintos. Por ejemplo, entre dos censos consecutivos. Los fenómenos que intervienen modificando el tamaño o la composición de una población son catalogados como *flujos*, y afectan siempre a un periodo de tiempo como los stocks. Algunos autores señalan la existencia de dos tipos de flujos. Aquellos que se expresan en edades exactas carecen de amplitud en la dimensión duración que se denominan *aniversarios*. Los que sí la tienen se denominan *flujos*.

En el diagrama de Lexis ambos tipos de magnitudes son fácilmente diferenciables. Los stocks se representan mediante segmentos situados sobre la isócrona correspondiente. Su carácter lineal y paralelo al eje de ordenadas, expresa la no amplitud cronológica d estas magnitudes.los aniversarios se corresponden con líneas perpendiculares al eje de ordenadas, es decir, con la misma edad exacta. Por el contrario, todo flujo se visualiza como una superficie.



Los acontecimientos demográficos o flujos se clasifican en renovables y no renovables.

- No renovables sólo pueden ser experimentados una vez a lo largo de la vida.
- Renovables son aquellos que pueden darse más de una vez en un individuo: matrimonio, maternidad emigración,…

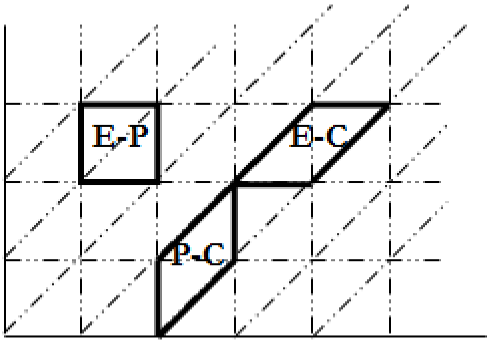
En todo caso un acontecimiento renovable se puede convertir en no renovable.

Otra posible distinción entre fenómenos demográficos es en el caso de la mortalidad, que pueden ser ineludibles o fatales.

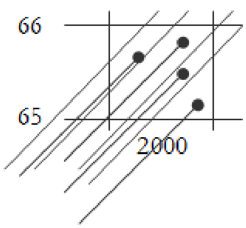
Asimismo, ciertos fenómenos pueden catalogarse como irreversibles si su ocurrencia supone un cambio de estado sin posible vuelta atrás.

1.7 TIPOS DE OBSERVACIONES SEGÚN LAS DIMENSIONES TEMPORALES

Los fenómenos demográficos pueden fijarse en las estadísticas de diversos modos, en función de los límites para cada uno de las tres dimensiones temporales.

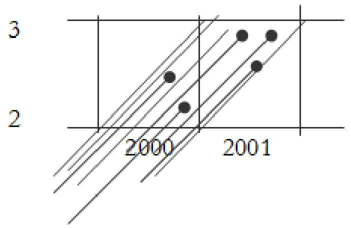


a) La observación por *periodo-edad* es la más frecuente. En ellas se combinan en un mismo calendario y edad las experiencias de dos generaciones o cohortes distintas.



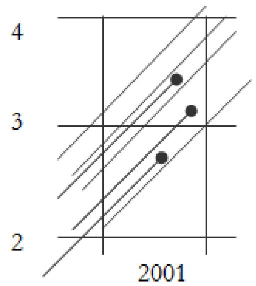
4 individuos han fallecido durante el año 2000 con 65 años de edad cumplida.

b) La observación por *cohorte-edad* clasifica los acontecimientos por año de nacimiento o cohorte y por edad, afectando a dos años del calendario escolar.



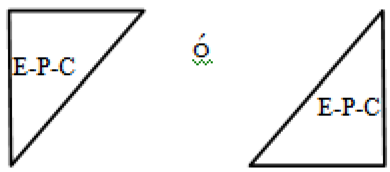
5 niños de la generación de nacidos en 1998 han fallecido con dos años de edad cumplida.

c) La observación por *periodo-cohorte* clasifica los eventos por año de calendario



3 niños de la generación de 1998 han fallecido durante el año 2001.

El registro ideal de los acontecimientos es aquel que tiene en cuenta las tres dimensiones, calendario, duración y cohorte (*Edad-Periodo-Cohorte*). En las estadísticas, este tipo de observación se conoce con el nombre de doble clasificación y su representación gráfica en forma de triangulo. Sin embargo, esto no es posible siempre. Con frecuencia los sucesos se registran o se publican únicamente cruzados con la variable de duración, lo que limita la observación a la primera modalidad de las presentadas aquí.



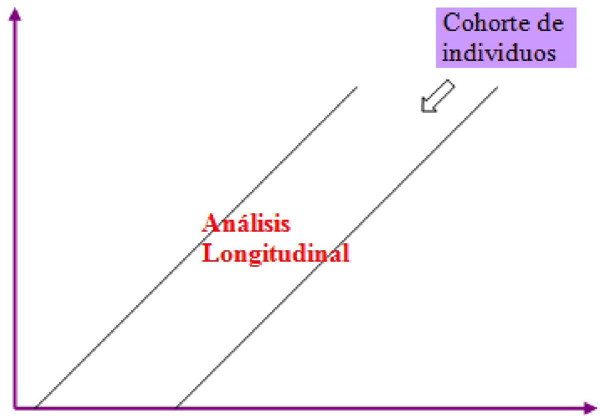
1.8 TIPOS DE ANÁLISIS

No existe un solo modo de afrontar las cuestiones que plantea el conocimiento de los mecanismos del cambio demográfico. En función del tipo de problemas hacia los que se focalices existen dos análisis.

1.8.1 Análisis longitudinal

El análisis longitudinal sigue la evolución en el tiempo de un conjunto de líneas de vida y la incidencia de los diferentes fenómenos que la afectan. Es decir, su interés fundamental es estudiar cómo los sucesos demográficos se relacionan con el transcurso de la vida de los individuos que forma una generación. Su limitación es la necesidad de largas series de datos. Esto supone tener que esperar un siglo para conocer las condiciones de mortalidad de una generación. Las afirmaciones realizadas sobre cohortes que no hayan alcanzado el final de su ciclo serán forzosamente incompletas.

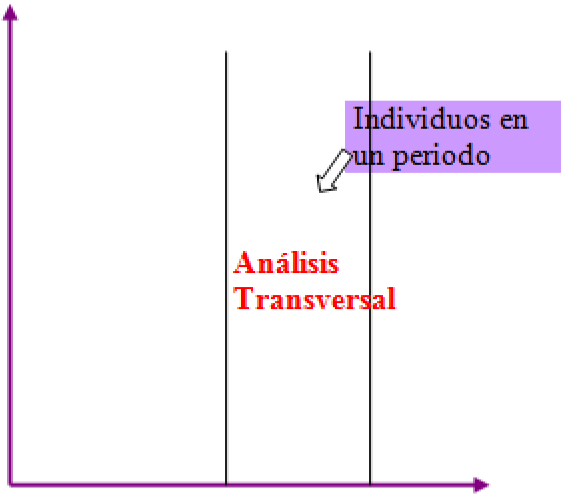
La información precisada para llevar a cavo un análisis longitudinal puede provenir de dos vías. En primer lugar, de una observación retrospectiva, por la cual se inquiere a los individuos de una población por acontecimientos demográficos experimentados a lo largo de sus vidas, la característica fundamental es el efecto de selección que contiene.



El segundo tipo de observación que alimenta el análisis longitudinal, y el más habitual, es la continua. A diferencia de la retrospectiva, sigue los avatares de la cohorte inicial a medida que se registran los acontecimientos que la afectan por lo que el fenómeno analizado no se presenta en estado puro, sino interferido por el efecto de otros.

1.8.2 Análisis transversal

El análisis longitudinal, que presenta una visión diacrónica de los fenómenos demográficos, sigue siendo infrecuente, fundamentalmente por los motivos que se acaban de exponer en el punto anterior. El análisis transversal, en cambio, es una aproximación sincrónica, que prima la contemporaneidad o proximidad del momento de la observación. Su objeto de estudio es el conocimiento de la población entendida como stock, y qué participan en el cambio de su composición a lo largo de un periodo tanto en la estructura inicial como en el comportamiento de las diferentes cohortes que "atraviesan" el periodo estudiado.



1.9 LA MEDICIÓN DE LOS FENÓMENOS Y DE LAS ESTRUCTURAS DEMOGRÁFICAS

Tanto flujos como stocks se reflejan en las estadísticas como valores absolutos, como recuento de efectivos en un instante de tiempo o como registro continuo de acontecimientos en un periodo temporal.

1.9.1 Definición

Una tasa mide la frecuencia con la que, en un periodo de tiempo, aparece un suceso en una población. Tiene siempre un flujo en el numerador y un stock en el denominador, las tasas deben tener amplitud temporal anual. Por su parte en el denominador debe hallarse el tiempo medio vivido por la población en dicho periodo, que se estima como la media aritmética de las poblaciones a inicio y final de periodo. Las tasas son calculables tanto para acontecimientos renovables como no renovables.

1.9.2 Tipos de Tasas

La relativización mas general que se puede hacer de un fenómeno es la que tiene el número total de sucesos o eventos (E) de un fenómeno en un periodo de tiempo en el numerador y la población total media en el denominador. El valor que resulta es la *tasa bruta*.

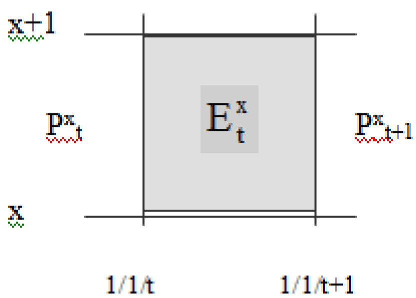
$$T_t = \frac{E_t}{\overline{P}_t} = \frac{E_t}{\left(\dfrac{P_{1/1/t} + P_{1/1/t+1}}{2}\right)} = \frac{E_t}{P_{1/7/t}}$$

A pesar de suponer un primer nivel de relativización de las cifras absolutas, las probabilidades analíticas de las tasas brutas son reducidas. Dado que la degradación básica de una población en la que se hace en función de la edad o el año de nacimiento, parece lógico calcular unas tasas que pongan en relación los sucesos experimentados en una determinada edad o cohorte y el efectivo de población respectivo. Se obtienen así las *tasas específicas*, y se consigue fijar el calendario y la estructura por edades. En función del tipo de observación se pueden calcular tasas específicas:

a) De periodo-edad, o entre aniversarios en el año t.

Si E_t^x es el número de eventos ocurridos a individuos de edad cumplida x durante el año t, la tasa buscada se obtendrá como el cociente de estos eventos y la población media de edad cumplida x durante ese año (semisuma de las poblaciones a 1/1/t y 1/1/t+1):

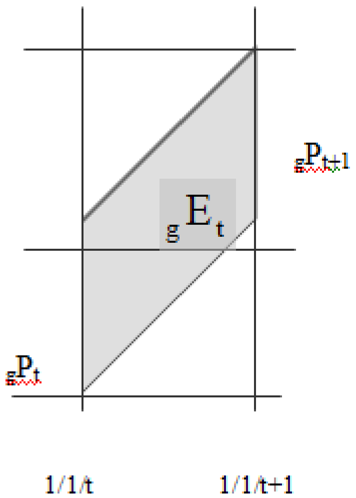
$$T_t^x = \frac{E_t^x}{\left(\dfrac{P_t^x + P_{t+1}^x}{2}\right)}$$



b) De periodo-cohorte o tasa perspectiva o de generación g en el año t.

Si ${}_gE_t$ es el número de eventos ocurridos a individuos de la generación g durante el año t, la tasa buscada se obtendrá como el cociente de estos eventos y la población media de esa generación durante ese año (semisuma de las poblaciones a 1/1/t y 1/1/t+1):

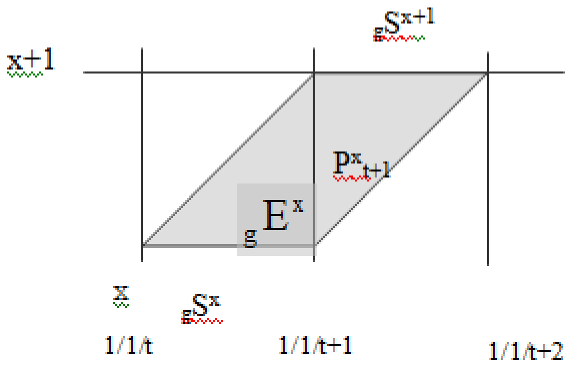
$${}_gT_t = \frac{{}_gE_t}{\left(\dfrac{{}_gP_t + {}_gP_{t+1}}{2}\right)}$$



c) De *cohorte-edad, o entre aniversarios para la generación t.*

Si ${}_{g}E^{x}$ es el número de eventos ocurridos a individuos de la generación g que han llegado a cumplir la edad x y ${}_{g}S^{x}$ es el número de individuos que han sobrevivido al fenómeno, la tasa buscada se obtendrá como el cociente de estos eventos y la población de edad cumplida x a 1/1/t+1:

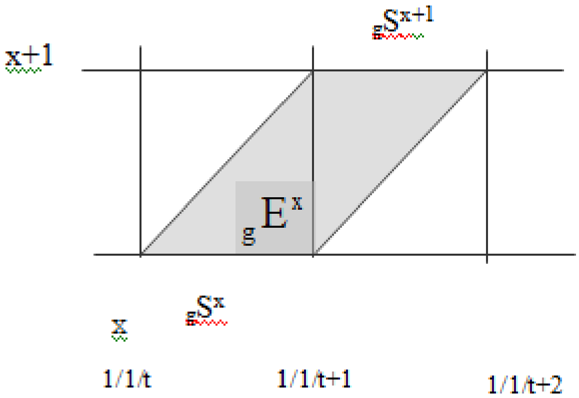
$$ {}_{g}T^{x} = \frac{{}_{g}E^{x}}{P^{x}_{t+1}} $$



No siempre es posible calcular los tres tipos de tasas, dado que con frecuencia los datos disponibles no permiten todas las modalidades de observación. Las tasas son de primera categoría si toda la población del denominador corre el riesgo de ser afectado por los acontecimientos registrados en el numerador, y se denominan de segunda categoría de no cumplirse dicha condición.

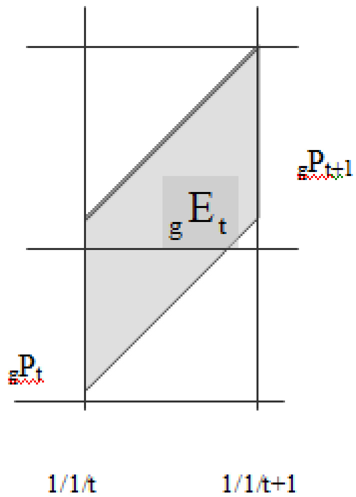
1.9.3 Probabilidades

Miden el *riesgo* de una población de verse afectada por un acontecimiento demográfico. Sólo se puede calcular par acontecimientos no renovables, en los que la ocurrencia del suceso supone el abandono de la cohorte objeto de observación. De acuerdo con la definición de probabilidad el denominador recoge la población expuesta a riesgo y en el caso de estudios por generaciones, esa población es el número de supervivientes iniciales expuestos al fenómeno que se esté analizando (casos posibles).



$$ {}_{g}q^{x} = \frac{{}_{g}E^{x}}{{}_{g}S^{x}} $$

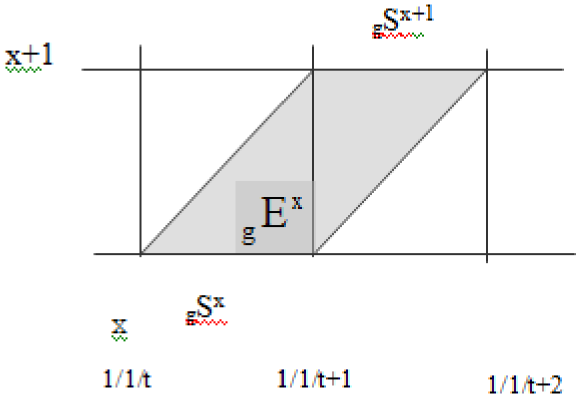
Si, por el contrario, la población inicial está formada por contemporáneos el resultado es una probabilidad o cociente perspectiva.



$$ {}_{g}q_{t} = \frac{{}_{g}E_{t}}{{}_{g}P_{t}} $$

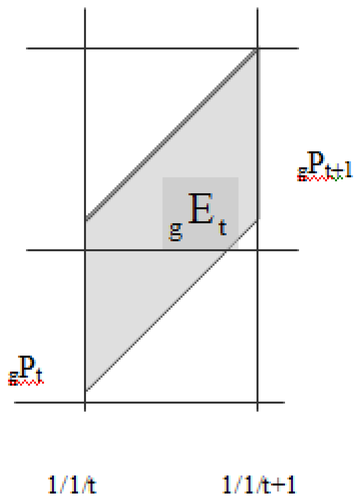
1.9.4 Relaciones

Existe aun otro tipo de indicador que conecta magnitudes de naturaleza distinta. Se trata de la llamada *relación,* índice dinámico donde el numerador es un flujo y el denominador, la población final. Como en el caso de las probabilidades, las relaciones no tienen sentido más que observando cohortes o generaciones de individuos. Para observaciones por edad y cohorte:



$$ _g r^x = \frac{_g E^x}{_g S^{x+1}} $$

En observaciones periodo y cohorte,



$$ _g r_t = \frac{_g E_t}{_g P_{t+1}} $$

1.9.5 Proporciones

Así como tasas y probabilidades ponen en relación magnitudes de naturaleza distinta, las proporciones se caracterizan por tomar en el numerador y denominador magnitudes del mismo tipo, bien flujos, stocks,… el indicador resultante carece de dimensión temporal.

Las dimensiones son de *primera categoría* si el numerador forma parte del denominador, como al calcular el número de personas de más de 65 años sobre el total de la población en un determinado momento.

Las proporciones son de *segunda categoría* cuando no se cumple la premisa anterior. Un ejemplo es el llamado índice de dependencia:

$$ID = \frac{P_{0-14} + P_{65+}}{P_{15-64}} \cdot 100$$

Es importante recordar que algunos indicadores calificados como tasas son en realidad proporciones. Esto ocurre con frecuencia al poner en relación una parte de población con el efectivo total. Los ejemplos mas claros son la tasa de paro, que en realidad son una proporción de activos o porcentaje de parados sobre el total de la población activa de la que forman parte juntos con los ocupados, respectivamente.

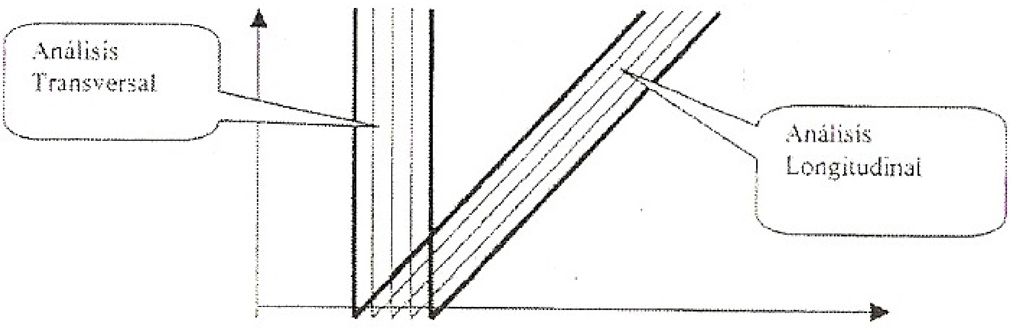
Un tipo especial de proporción lo constituyen las razones en las que el numerado r y denominador tienen la misma naturaleza y son excluyentes y complementarios respecto a la totalidad del conjunto. La razón de masculinidad al nacer puede considerarse un buen ejemplo, puesto que cumple todas estas condiciones.

$$\mathrm{RM}_t^0 = \frac{nacimientos\ masculinos_t}{nacimientos\ \ femeninos_t}$$

1.10 FENÓMENOS DEMOGRÁFICOS EN LA GENERACIÓN

Los fenómenos demográficos que inciden en una generación son la mortalidad, nupcialidad, fecundidad, emigración e inmigración. Por ello estudiaremos tablas que presentan cada uno de estos fenómenos en una determinada generación.

Hay que destacar que en el estudio por generaciones es necesario gran cantidad de datos, ya que utilizaremos la información de individuos a lo largo de toda su vida. Este tipo de análisis es denominado análisis longitudinal. En el caso de no conocer datos por generación, supondremos que el comportamiento de los individuos en una generación es similar al comportamiento de éstos en el año de nacimiento. De este forma estaremos creando una **“generación ficticia”.**



En cualquier estudio longitudinal sobre un fenómeno podremos obtener dos medidas fundamentales que son:

- **Intensidad:** es el número de sucesos que ocurren a una de las personas de la generación
- **Calendario:** es la distribución de frecuencias de la variable edad a la que los individuos son alcanzado s por el fenómeno en estudio.

1.10.1 Tabla de Mortalidad

La descripción de la mortalidad consiste en observar un grupo cerrado de individuos a los que se sigue desde su nacimiento hasta su extinción completa (0, w), siendo w la edad a la que se extingue la cohorte. Consideramos la variable estadística, “edad a la que fallecen los individuos de la cohorte” y obtendremos su distribución representando las columnas:

- x: sucesión de aniversarios que son los extremos inferiores de los intervalos de edad.
- d(x, x+1): defunciones entre x y x+1 o frecuencia de aparición del fenómeno dentro del intervalo.

En un estudio longitudinal de la mortalidad mediante tablas de eliminación suelen aparecer las series:

- S_x: supervivientes a la edad x
- q_x: cociente de mortalidad a la edad x (es el riesgo que sufre un individuo de fallecer antes de cumplir la edad x+1, supuesto que ha sobrevivido a la edad x)

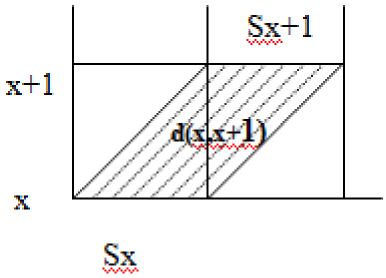
CUADRO 1. *Tabla de mortalidad de la generación femenina francesa 1820*

Edad x	S_x	$d(x, x+1)$	q_x (p. 1 000)	Edad x	S_x	$d(x, x+1)$	q_x (p. 1 000)
0	100 000	15 270	152,7	50	47 016	649	13,80
1	84 730	5 253	62,0	51	46 367	668	41,41
2	79 477	2 941	37,0	52	45 699	684	14,97
3	76 536	1 929	25,2	53	45 015	708	15,73
4	74 605	1 440	19,3	54	44 307	733	16,54
5	73 167	1 096	15,0	55	43 574	762	17,5
6	72 071	908	12,60	56	42 812	801	18,7
7	71 163	748	10,51	57	42 011	840	20,0
8	70 415	618	7,81	58	41 171	951	23,6
9	69 797	545	7,81	59	40 278	951	23,6
10	69 252	509	7,35	60	39 327	1 007	25,6
11	68 743	486	7,07	61	38 320	1 069	27,9
12	68 257	473	6,93	62	37 251	1 117	30,0
13	67 784	473	6,98	63	36 134	1 186	32,8
14	67 311	477	7,09	64	34 948	1 240	35,5
15	66 834	479	7,17	65	33 708	1 301	38,6
16	66 355	505	7,60	66	32 407	1 349	41,6
17	65 851	524	7,96	67	31 058	1 407	45,3
18	65 327	542	8,30	68	29 651	1 447	48,8
19	64 785	555	8,57	69	28 204	1 511	53,6
20	64 230	564	8,78	70	26 693	1 575	59,0
21	63 666	572	8,98	71	25 118	1 623	64,6
22	63 094	571	9,05	72	23 495	1 644	70,0
23	62 523	571	9,13	73	21 851	1 674	76,6
24	61 952	570	9,20	74	20 177	1 699	84,2
25	61 382	568	9,25	75	28 478	1 700	92,0
26	60 814	567	9,32	76	16 778	1 661	99,0
27	60 247	566	9,39	77	15 117	1 648	109
28	59 681	565	9,47	78	13 469	1 603	119
29	59 116	564	9,54	79	11 866	1 530	129
30	58 552	565	9,65	80	10 336	1 447	140
31	57 987	563	9,71	81	8 889	1 334	150
32	57 424	563	9,80	82	7 555	1 239	164
33	56 861	563	9,90	83	6 316	1 118	177
34	56 298	560	9,95	84	5 198	998	192
35	55 738	560	10,05	85	4 200	861	205
36	55 178	562	10,19	86	3 339	721	216
37	54 616	562	10,29	87	2 618	594	227
38	54 054	563	10,42	88	2 024	484	239
39	53 491	565	10,56	89	1 540	390	253
40	52 926	565	10,68	90	1 150	306	266
42	52 361	566	10,81	91	844	237	281
42	51 795	567	10,95	92	607	180	297
43	51 228	572	11,17	93	427	132	309
44	50 656	582	11,49	94	295	95	322
45	50 074	589	11,76	95	200	67	335
46	49 485	599	12,10	96	133	47	353
47	48 886	611	12,50	97	86	31	360
48	48 275	623	12,91	98	55	21	382
49	47 652	636	13,35	99	34	14	412
				100	20		

FUENTE: Delaporte, Pierre, "Evolución de la mortalidad en Europa desde los orígenes del registro civil. Estadística general de Francia". *Études démographiques*, núm. 2. La tabla de mortalidad inicial ha sido elaborada a partir de una evaluación de los cocientes q_x; la tabla que damos aquí deriva de las cifras de sobrevivientes de la tabla inicial divididas entre 10; como resultado, los q_x que encontramos difieren a veces ligeramente de los de la tabla de Delaporte que, con mucha frecuencia, sólo tienen tres cifras significativas: hemos respetado el mismo grado de precisión en nuestros cálculos.

Fuente: Pressat, R. (1993). "El Análisis Demográfico". Madrid

En un diagrama de Lexis, todo está representado como sigue:



Conociendo cualquiera de estas columnas se pueden obtener las demás:

$$d(x,x+1) = S_x - S_{x+1}$$

$$q_x = \frac{d(x,x+1)}{Sx} = 1 - p_x \qquad p_x : probabilidad\ de\ supervivencia$$

$$S_{x+1} = S_x - d(x,x+1) = S_x(1-q_x)$$

Intensidad y calendario

Considerando la variable estadística "edad a la que fallece un individuo", el calendario de este fenómeno es la distribución de frecuencias:

$$\{(x,x+1), d(x,x+1)\} \quad \text{ó} \quad \left\{(x,x+1), \frac{d(x,x+1)}{S_0}\right\}$$

Siendo $S_0 = \sum_{x=0}^{w-1} d(x,x+1)$ el número inicial de individuos de la cohorte. Dicho calendario, se resume mediante medidas de tendencia central como la media o mediana.

La intensidad es el número de sucesos por individuo, es decir, el recuento total de defunciones dividido por el número de individuos considerados; como la mortalidad es un suceso fatal y no renovable su intensidad vale 1:

$$I = \frac{\sum_{x=0}^{w-1} d(x,x+1)}{S_0} = 1$$

Vida media o esperanza de vida al nacer

Es el número medio de años que les queda por vivir a los recién nacidos. Se calcula como el valor medio de la distribución {(x, x+1),d(x, x+1)};

$$e_0 = \frac{\sum \frac{x_i + x_{i+1}}{2} d(x_i, x_{i+1})}{\sum d(x, x+1)} = \frac{1}{S_0}\left[0'5d(0,1) + 1'5d(1,2) + \ldots\right]$$

$$e_0 = \frac{\sum_{x=0}^{w-1}(x+0,5)d(x,x+1)}{\sum_{x=0}^{w-1} d(x,x+1)} = \frac{1}{S_0}\left[0,5d(0,1)+1,5d(1,2)+\ldots(w-0,5)d(w-1,w)\right]$$

desarrollando y simplificando queda la siguiente expresión:

$$\boxed{e_0 = 0.5 + \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_{w-1}}{So} \qquad (tabla\ completa)}$$

Para el caso de la tabla de mortalidad abreviada la esperanza de vida es el valor medio de la distribución {(x, x+n),d(x, x+n)} siendo “n” la amplitud de los intervalos de edad considerados. En el caso de que la amplitud sea:

a=1 para x=0; a=4 para x=1; a=5 para x >= 5

es decir, considerando las edades: 0, 1, 5, 10, … w-5 queda:

$$\boxed{e_0 = 0.5 + \frac{2.5S_1 + 4.5S_5 + 5S_{10} + \ldots + 5S_{w-5}}{So} \qquad (tabla\ abreviada)}$$

<u>**Vida media o esperanza de vida a la edad x**</u>

Es el número medio de años que les queda por vivir a los individuos que han alcanzado la edad x.

$$\boxed{e_x = 0.5 + \frac{S_{x+1} + S_{x+2} + \ldots + S_{w-1}}{S_x} \qquad (tabla\ completa)}$$

$$\boxed{e_x = 2.5 + \frac{5S_{x+5} + 5S_{x+10} + \ldots + 5S_{w-5}}{S_x} \qquad x \geq 5 \quad (tabla\ abreviada)}$$

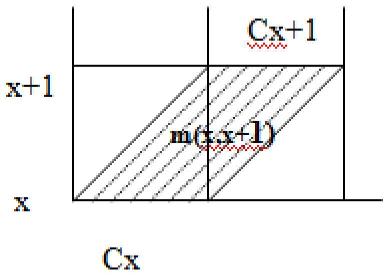
1.10.2 Tabla de Nupcialidad

El estudio de la nupcialidad incluye de primeras nupcias y el de nuevas nupcias. La tabla se puede construir para ambos sexos, aunque se suelen construir para mujeres. La metodología consiste en preguntar a un grupo de mujeres que han alcanzado la edad de contraer primeras nupcias.

Dentro de la generación, analizamos la variable "edad de una mujer al contraer primeras nupcias" y supondremos que el rango es [15,50]. Consideremos la distribución de esta variable {(x, x+1), m(x, x+1)} representada en las series:

- x: sucesión de aniversarios [15,50].
- m(x, x+1): matrimonios de solteras en la edad x y x+1
- C_x: solteras a la edad x
- n_x: cociente de nupcialidad

En el diagrama de Lexis, todo se representaría de la siguiente forma:



Conociendo cualquiera de estas series se pueden obtener las demás:

$$m(x,x+1) = C_x - C_{x+1}$$

$$n_x = \frac{m(x,x+1)}{C_x}$$

$$C_{15} - C_{50} = \sum_{x=1}^{49} m(x,x+1)$$

Intensidad y calendario

El calendario es la distribución de frecuencias

$\{(x,x+1),\ d(x,\ x+1)\}$ ´ó $\left\{(x,x+1), \left(\frac{m(x,x+1)}{\sum_{x=15}^{49} m(x,x+1)}\right)\right\}$ donde x = 15,…49 y se resume mediante medidas de tendencia central como la media o la moda, etc.

La intensidad es el número de primeras nupcias por mujer de 15 años

$$\text{INTENSIDAD} = \frac{N^{o}\ de\ matrimonios}{N^{o}\ individuos} = \frac{\sum_{x=15}^{49} m(x,x+1)}{C_{15}} = \frac{C_{15} - C_{50}}{C_{15}} \quad (\leq 1)$$

<u>Edad media (primeras nupcias)</u>

En el caso de tabla completa, es el valor medio de la distribución {(x, x+1), m(x,x+1)} x= 15,..49 y desarrollando queda:

$$\bar{m} = 15.5 + \frac{C_{16} + C_{17} + \ldots.. + C_{49} - 34C_{50}}{C_{15} - C_{50}}$$

Para el caso de la tabla de mortalidad abreviada, la edad media es el valor medio de la distribución {(x, x+a),m(x, x+a)} sien do “a” la amplitud de los intervalos de edad considerados.

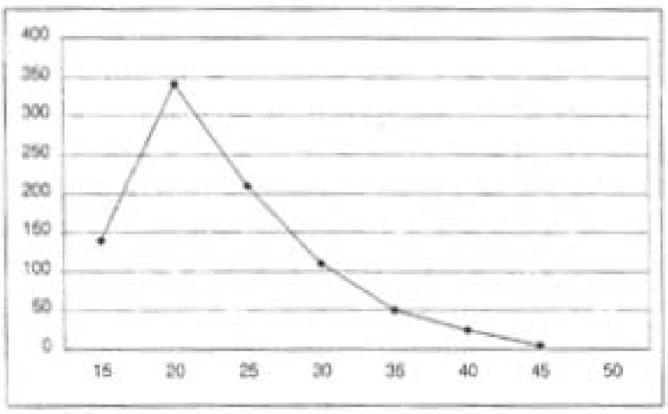
Para el caso de a=5 para todo x entre 15 y 45 obtenemos:

$$\bar{m} = 17.5 + \frac{5C_{20} + 5C_{25} + \ldots.. + 5C_{45} - 30C_{50}}{C_{15} - C_{50}}$$

Ejemplo: Consideremos los matrimonios de solteras de una generación:

Edad	Cx	m(x,x+5)
15	1000	140
20	860	340
25	520	210
30	310	110
35	200	50
40	150	25
45	125	5
50	120	

La intensidad o número de matrimonios por mujer es el total de matrimonios dividido por el número de solteras inicial, es decir, 0.88. La representación del calendario es:



Y la edad media al primer matrimonio de estas mujeres es de 25.71 años.

CUADRO 5. *Tabla de nupcialidad femenina (sensiblemente aplicable a las generaciones francesas nacidas poco después de 1900)*

Edad x	C_x	$m(x, x+1)$	n_x (p. 1 000)	Edad x	C_x	$m(x, x+1)$	n_x (p. 1 000)
15	10 000	57	5.7	35	1 374	54	39
16	9 943	176	17.7	36	1 320	47	36
17	9 767	396	40.5	37	1 273	40	31
18	9 371	722	77.0	38	1 233	35	28
19	8 649	928	107.3	39	1 198	29	24
20	7 721	1 061	137.4	40	1 169	25	21
21	6 660	1 062	159.5	41	1 144	22	19
22	5 598	937	167.4	42	1 122	20	18
23	4 661	753	161.6	43	1 102	18	16
24	3 908	594	152.0	44	1 084	16	15
25	3 314	462	139	45	1 068	14	13
26	2 852	355	124	46	1 054	12	11
27	2 497	275	110	47	1 042	11	11
28	2 222	214	96	48	1 031	10	10
29	2 008	169	84	49	1 021	9	9
30	1 839	134	73	50	1 012		
31	1 705	107	63				
32	1 598	87	54				
33	1 511	74	49				
34	1 437	63	44				

FUENTE: "La familia normal", *Population*, núm. 2, abril-junio de 1950.

Fuente: Pressat, R. (1993). "El Análisis Demográfico". Madrid

1.10.3 Cuadro de Fecundidad General

Este fenómeno demográfico se comporta de forma muy distinta, a los anteriores, ya que el alumbramiento de una mujer fecunda pueda darse más de una vez (fenómeno renovable). Por eso cuando la mujer tiene un hijo no sale del cuadro. Para construir este cuadro necesitamos realizar una encuesta retrospectiva a mujeres de 50 años contabilizando el número de hijos que ha tenido cada una de ellas.

Consideremos la distribución de frecuencias de la variable "edad de la madre al nacimiento de los hijos". En el cuadro de fecundidad aparecen:

- x: sucesión de aniversarios [15, 50]
- n(x, x+1): nº de nacimientos vivos entre la edad x y x+1 de la madre
- D_x: nº descendientes hasta la edad x de la madre.

$$D_x = n(15,16) + n(16,17) + \ldots\ldots + n(x-1, x)$$

$$D_{50} = \sum_{x=15}^{49} n(x, x+1) \qquad \text{(descendencia final).}$$

<u>Intensidad y calendario</u>

El calendario es la distribución de frecuencias {(x, x+1), n(x, x+1)}con x = 15,…49 y se resume mediante medidas de tendencia central como la media o la moda, etc.

La intensidad es el número de hijos por mujer.

$$\text{INTENSIDAD} = \frac{N^{o}\ de\ nacimientos}{N^{o}\ mujeres} = \frac{\sum_{x=15}^{49} n(x, x+1)}{F_0} = \frac{D_{49}}{F_0}$$

Edad media a la maternidad

Es el valor medio de la distribución {x, x+1), n(x, x+1)} x= 15,..49 y desarrollando queda:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{x=15}^{49}(x+0.5)\cdot n(x, x+1)}{\sum_{x=15}^{49} n(x, x+1)} = \frac{\sum_{x=15}^{49}(x+0.5)\cdot n(x, x+1)}{D_{50}}$$

Tabla completa

También conviene calcular la varianza de la distribución lo que puede ser un buen indicador de la representatividad de la edad media.

Tasa bruta de reproducción

El nº medio de hijas vivas por mujer fecunda.

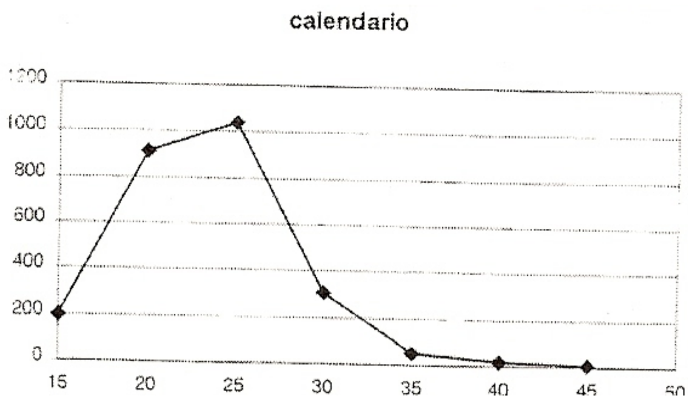
$$R = \frac{n^{o}\ \text{niñas}}{n^{o}\ \text{mujeres}} = \text{Intensidad}\cdot\text{Tasa de feminidad} = \frac{D_{50}}{F_0}\,\frac{\text{niñas}}{\text{niños}+\text{niñas}} = \frac{D_{50}}{F_0}\cdot\frac{100}{106+100} = 0.485\cdot\frac{D_{50}}{F_0}$$

Esta tasa es un indicador del crecimiento; si R se aproxima a 1, el crecimiento de la población se mantendrá; si R es menor a 1 nacerán menos niñas con la consiguiente disminución de la población.

Ejemplo: Consideremos el nº de hijos de una generación de 1000 mujeres:

Edad	n(x.x+5)
15	201
20	912
25	1042
30	305
35	52
40	16
45	8

Si sumamos todos los nacimientos obtenemos la descendencia final (2536 hijos). Esto representa una intensidad de 2.536 hijos por mujer. Representemos el calendario:



Si obtenemos la edad media de estas mujeres resulta de 23.37 años. La tasa bruta de reproducción es la intensidad por la tasa de feminidad (2.536 x 0.485 = 1.23), por lo que podemos afirmar que la población de reemplaza.

Cuadro de fecundad de las generaciones femeninas francesas nacidas poco después de 1900 (Para 1000 mujeres)

Edad x	$n(x, x+1)$	D_x	Edad x	$n(x, x+1)$	D_x
15	4	0	35	54	1 821
16	10	4	36	47	1 875
17	23	14	37	40	1 922
18	43	37	38	33	1 962
19	66	80	39	37	1 995
20	92	146	40	21	2 022
21	116	238	41	17	2 043
22	136	354	42	12	2 060
23	146	490	43	9	2 072
24	148	636	44	6	2 081
25	146	784	45	4	2 087
26	140	930	46	2	2 091
27	130	1 070	47	1	2 093
28	113	1 200	48		2 094
29	107	1 318			
30	97	1 425			
31	88	1 522			
32	79	1 610			
33	70	1 689			
34	62	1 759			

Fuente: Pressat, R. (1993). "El Análisis Demográfico". Madrid

1.10.4 Tabla de Emigración

Consideramos la variable estadística "edad del individuo al realizar la emigración". La tabla de emigración consta de las siguientes columnas:

- x: sucesión de aniversarios [0,40]
- e(x, x+1): número de salidas del territorio de nacimiento entre la edad x y x+1.
- R_x: número de supervivientes al fenómeno a la edad x (no han emigrado).

Intensidad y calendario

El calendario es la distribución de frecuencias {(x, x+1), e(x, x+1)} con x=0,1,..,w-1 y la intensidad es el número de salidas por individuo.

$$I = \frac{n^{\circ}\ emigraciones}{n^{\circ}\ individuos} = \frac{\sum_{x=0}^{w-1} e(x,x+1)}{R_0} = \frac{R_0 - R_w}{R_0} \quad (\leq 1)$$

Edad media a la emigración

$$\bar{e} = \frac{\sum_{x=0}^{w-1} (x+0.5)\cdot e(x,x+1)}{\sum_{x=0}^{w-1} e(x,x+1)} = \frac{\sum_{x=0}^{w-1} (x+0.5)\cdot e(x,x+1)}{R_0 - R_w}$$

1.11 INTERFERENCIAS ENTRE LOS FENÓMENOS DEMOGRÁFICOS DE UNA GENERACIÓN

En una misma generación los fenómenos no se presentan aisladamente por lo que no es posible considerarlos independientes. Las tablas que hemos visto hasta ahora estaban en estado puro, es decir, no existían interferencias entre los distintos fenómenos (simplemente por razones metodológicas).

En la práctica éstos se presentan juntos, si bien el análisis demográfico deberá ir encaminado a aislarlos como si se presentaran en estado puro.

Por lo tanto es posible:

- Partir de las tablas reales y construidas en estado puro para eliminar los posibles efectos perturbadores.
- Reconstruir la realidad, partiendo de tablas que se encuentran en estado puro.

1.11.1 Nupcialidad y Mortalidad

El objetivo es determinar el número efectivo de primeras nupcias de solteras y el número de defunciones de solteras. Para ello, vamos a considerar una generación de la que conocemos la tabla de nupcialidad de solteras y la de mortalidad de solteras, ambas en estado puro (en el caso de no conocer esta última se suele tomar la tabla de mortalidad general):

$$\{C_x, m(x,x+1), n_x\} \text{ y } \{S_x, d(x,x+1), q_x\}$$

Siendo

$$n_x = \frac{m(x, x+1)}{C_x} \text{ y } q_x = \frac{d(x, x+1)}{S_x}$$

Antes de comenzar debemos establecer la hipótesis de que la nupcialidad y la mortalidad de solteras son independientes; esta hipótesis es una simplificación irreal ya que lo ideal sería buscar las correlaciones entre ellas.

Crucemos entonces ambas leyes. Comenzamos con el primer intervalo de edad. Supongamos una generación femenina de 15 años (suponiendo que antes no es posible el matrimonio), por lo que tendremos C_{15} solteras. De estas:

- $C_{15}(1 - q_{15})$ → número de solteras que sobrevivirán a los 16 años:
    - $C_{15}(1 - q_{15})(1 - n_{15})$ → número de solteras que sobrevivirán a los 16 años y seguirán solteras a esa edad.
    - $C_{15}(1 - q_{15})(n_{15})$ → número de solteras que sobrevivirán a los 16 años, pero se casarán antes de esa edad.
- C_{15} (q_{15}) → número de solteras que fallecerán antes de los 16 años:
    - C_{15} $(q_{15})(1 - n_{15})$ → número de solteras que fallecerán solteras antes de los 16 años.
    - $C_{15}(q_{15})(n_{15})$ → de estas últimas hay que distinguir:
        - $C_{15}/2$ $(q_{15})(n_{15})$ → número de solteras que se casarían y a continuación fallecerían antes de los 16 años.
        - $C_{15}/2$ $(q_{15})(n_{15})$ → número de solteras que frustrarían su matrimonio por la muerte antes de los 16 años.

Entonces, si cruzamos las leyes de nupcialidad y mortalidad para cualquier intervalo de edad [x, x + 1), tendremos:

Mort-Nupc	$1 - n_x$	n_x
$1 - q_x$	$(1 - q_x)(1 - n_x)$ p. escapar a los dos fenómenos	$(1 - q_x)n_x$ p. contraer matrimonio
q_x	$q_x(1 - n_x)$ p. morir soltera	$\frac{q_x n_x}{2}$ p. casarse y morir $\frac{q_x n_x}{2}$ p. frustar matrimonio por muerte

El número **real de primeras nupcias de solteras** en el intervalo [x, x + 1) será (desde la hipótesis de independencia):

$$m'(x,x+1) = C'_x n'_x = \left[C_{15}\cdot\frac{C_x}{C_{15}}\cdot\frac{S_x}{S_{15}}\right]\cdot\left[(1-q_x)n_x + \frac{q_x n_x}{2}\right] =$$
$$\left[C_x\cdot\frac{S_x}{S_{15}}\right]\cdot\left[n_x\left(1-\frac{q_x}{2}\right)\right] = C_x n_x\left[\frac{S_x}{S_{15}}\left(1-\frac{q_x}{2}\right)\right] =$$

$$= m(x,x+1)\left[\frac{S_x}{S_{15}}\left(1-\frac{S_x - S_{x+1}}{2S_x}\right)\right] \Rightarrow m'(x,x+1) = m(x,x+1)\frac{S_x + S_{x+1}}{2S_{15}}$$

Por lo tanto, el número real de matrimonios de solteras queda reducido a:

$$m'(x,x+1) = m(x,x+1)\frac{\frac{S_x + S_{x+1}}{2}}{S_{15}} = m(x,x+1)\frac{S_{x+0,5}}{S_{15}}$$

Como se aprecia, el número de matrimonios reales de solteras es igual al número de matrimonios en estado puro por la probabilidad de supervivencia desde los 15 años a la mitad del intervalo (x, x + 1).

Nota: En el caso de considerar tablas abreviadas, por ejemplo de amplitud 5, la expresión que se ha demostrado queda:

$$m'(x,x+5) = m(x,x+5)\frac{S_x + S_{x+5}}{2S_{15}}$$

Respecto al **número de defunciones de solteras:**

$$d'(x,x+1) = S'_x q'_x = \left[S_{15}\cdot\frac{C_x}{C_{15}}\cdot\frac{S_x}{S_{15}}\right]\cdot\left[(1-n_x)q_x + \frac{q_x n_x}{2}\right] =$$
$$\left[S_x\cdot\frac{C_x}{C_{15}}\right]\cdot\left[q_x\left(1-\frac{n_x}{2}\right)\right] = S_x q_x\left[\frac{C_x}{C_{15}}\left(1-\frac{n_x}{2}\right)\right] =$$
$$d(x,x+1)\left[\frac{C_x}{C_{15}}\left(1-\frac{C_x - C_{x+1}}{2C_x}\right)\right] \Rightarrow d'(x,x+1) = d(x,x+1)\frac{C_x + C_{x+1}}{2C_{15}}$$

Por lo tanto, el número de defunciones de solteras queda reducido al número de defunciones totales por la probabilidad de seguir soltera en la mitad del intervalo (x,x+1):

$$d'(x,x+1) = d(x,x+1)\frac{\frac{C_x + C_{x+1}}{2}}{C_{15}} = d(x,x+1)\frac{C_{x+0,5}}{C_{15}}$$

Vamos a suponer ahora que disponemos de la tabla observada (real) y queremos construir la tabla teórica (en estado puro), es decir, exenta de perturbaciones. Denotemos:

- C_x → Solteras observadas a la edad x.

- $\mathcal{M}(x, x+1)$ → Primeras nupcias observadas a la edad cumplida x.
- $\mathcal{D}(x, x+1)$ → Fallecidas observadas a la edad cumplida x.

y queremos obtener las series $\{C_x, m(x, x+1), n_x\}$ y $\{S_x, d(x, x+1), q_x\}$ de las tablas en estado puro.

Respecto a la **tabla de nupcialidad en estado puro**, es necesario encontrar en primer lugar la serie de n_x y a partir de ella, obtener el resto de series. Si partimos de lo observado, conocemos la probabilidad de contraer primeras nupcias reales o efectivas que hemos llamado n'_x:

$$n'_x = \frac{\mathcal{M}(x,x+1)}{\mathcal{C}_x} \quad \left(= \frac{m'(x,x+1)}{C'_x} \right) \Rightarrow$$
$$\frac{\mathcal{M}(x,x+1)}{\mathcal{C}_x} = n'_x = n_x \left(1 - \frac{q_x}{2}\right) \Rightarrow$$
$$n_x = \frac{\mathcal{M}(x,x+1)}{\mathcal{C}_x\left(1 - \frac{q_x}{2}\right)} = \frac{\mathcal{M}(x,x+1)}{\mathcal{C}_x - \mathcal{C}_x\frac{q_x}{2}} = \frac{\mathcal{M}(x,x+1)}{\mathcal{C}_x - \frac{1}{2}\mathcal{D}(x,x+1)}$$

siempre que aceptemos que la ley de mortalidad dada por q_x es igual para solteras y casados, que los acontecimientos ocurren uniformemente y que la nupcialidad y la mortalidad son independientes.

Con la serie de n_x y en particular n_{15}, tomamos como raíz de la tabla una potencia de 10, es decir, C_{15} = 10k. Con C_{15} calculamos m(15, 16) = $C_{15} n_{15}$ y C_{16} = C_{15} - m(15, 16) que podemos volver a multiplicar por n_{16} para obtener m(16, 17). Siguiendo estos pasos sucesivamente, aparece la tabla de nupcialidad en estado puro.

En cuanto a la tabla de mortalidad en estado puro, necesitamos hallar q_x. Si partimos de lo observado y bajo las mimas hipótesis que hemos establecido en la tabla de nupcialidad, conocemos la probabilidad de fallecer soltera que hemos llamado q'_x:

$$q'_x = \frac{\mathcal{D}(x,x+1)}{\mathcal{C}_x} \Rightarrow \frac{\mathcal{D}(x,x+1)}{\mathcal{C}_x} = q'_x = q_x\left(1 - \frac{n_x}{2}\right) \Rightarrow$$
$$q_x = \frac{\mathcal{D}(x,x+1)}{\mathcal{C}_x\left(1 - \frac{n_x}{2}\right)} = \frac{\mathcal{D}(x,x+1)}{\mathcal{C}_x - \frac{1}{2}\mathcal{M}(x,x+1)}$$

Con la serie de q_x y en particular q_{15}, tomamos $S_{15} = 10^k$ de forma que d(15, 16) = $S_{15}\, q_{15}$ y S_{16} = S_{15} - d(15, 16) que podemos volver a multiplicar por q_{16} ...

1.11.2 Fecundidad y Mortalidad

El objetivo en este caso es conocer el número de hijos reales, ya que en el cuadro de fecundidad que hemos visto, no se tiene en cuenta a las madres que fallecen en el intervalo de estudio. Sea f_x la probabilidad de tener hijos a la edad cumplida x y F_x el número de madres de edad x (que en el caso de la tabla en estado puro era siempre constante):

$$f_x = \frac{n(x, x+1)}{F_x}$$

Si cruzamos las leyes de fecundidad y mortalidad, el número de hijos reales tenidos por esta generación de mujeres en el intervalo [x, x + 1) será (desde la hipótesis de independencia):

$$n'(x, x+1) = F'_x f'_x = \left[F_x \cdot \frac{S_x}{S_0}\right] \cdot \left[(1-q_x)f_x + \frac{q_x f_x}{2}\right] =$$
$$\left[F_x \cdot \frac{S_x}{S_0}\right] \cdot \left[f_x\left(1 - \frac{q_x}{2}\right)\right] = F_x f_x \left[\frac{S_x}{S_0}\left(1 - \frac{q_x}{2}\right)\right] =$$
$$n(x, x+1)\left[\frac{S_x}{S_0}\left(1 - \frac{S_x - S_{x+1}}{2S_x}\right)\right] \Rightarrow n'(x, x+1) = n(x, x+1)\frac{S_x + S_{x+1}}{2S_0}$$

Mort-Fec	$1 - f_x$	f_x
$1 - q_x$	$(1-q_x)(1-f_x)$ p. escapar a los dos fenómenos	$(1-q_x)f_x$ p. tener hijos
q_x	$q_x(1-f_x)$ p. morir sin nacimientos	$\frac{q_x f_x}{2}$ p. tener un hijo y morir $\frac{q_x f_x}{2}$ p. frustar el nacimiento por muerte

Por lo tanto, el número de nacimientos reales queda reducido al número de nacimientos de la tabla en estado puro por la probabilidad de sobrevivir a la mitad del intervalo (x,x+1):

$$n'(x, x+1) = n(x, x+1)\frac{\frac{S_x + S_{x+1}}{2}}{S_{15}} = n(x, x+1)\frac{S_{x+0,5}}{S_{15}}$$

siendo la descendencia final de estas mujeres:

$$D'_{50} = \sum_{x=15}^{49} n'(x, x+1)$$

y que por supuesto será menor que la descendencia final (D_{50}) de la tabla en estado puro.

Supongamos ahora que disponemos de la tabla observada (real) y queremos construir la tabla teórica (en estado puro). Sean:

- $\mathcal{F}_x$ → Mujeres observadas a la edad x.
- $\mathcal{N}(x, x+1)$ → Hijos tenidos por estas mujeres a la edad cumplida x.
- $\mathcal{D}(x, x+1)$ → Fallecidas observadas a la edad cumplida x.

y queremos obtener las series { F_x , n(x, x + 1), f_x } del cuadro de fecundidad en estado puro. Si partimos de lo observado, conocemos la probabilidad real de tener hijos ($f_x{}'$):

$$f'_x = \frac{\mathcal{N}(x,x+1)}{\mathcal{F}_x} \Rightarrow \frac{\mathcal{N}(x,x+1)}{\mathcal{F}_x} = f'_x = f_x\left(1-\frac{q_x}{2}\right) \Rightarrow$$
$$f_x = \frac{\mathcal{N}(x,x+1)}{\mathcal{F}_x\left(1-\frac{q_x}{2}\right)} = \frac{\mathcal{N}(x,x+1)}{\mathcal{F}_x - \frac{1}{2}\mathcal{D}(x,x+1)}$$

Con la serie anterior, es posible obtener de forma análoga las demás, escogiendo una raíz de la tabla.

<u>Tasa neta de reproducción</u>

En el cuadro de fecundidad, se ha visto la tasa bruta de reproducción, que ofrecía una medida del reemplazo generacional, pero que no tenía en cuenta la mortalidad de las madres. Ahora, vamos a obtener la tasa neta de reproducción en la que sí se tiene en cuenta este factor. Dicha tasa se calcula como el cociente del número de nacimientos de hijas y el número de mujeres en edad fecunda, en presencia de mortalidad y nos proporciona el número de hijas vivas por mujer teniendo en cuenta la mortalidad de sus madres:

$$R_0 \approx \frac{100}{206} \cdot \frac{\sum_{x=15}^{49} n'(x,x+1)}{F_{15}} = 0{,}485 \cdot \frac{D'_{50}}{F_{15}}$$

En este caso, si Ro es igual a la unidad, el reemplazamiento poblacional estaría asegurado y si es mayor, se esperaría un crecimiento potencial.

La **edad media de las madres** al tener hijos en el caso que nos ocupa es:

$$\overline{x}' = \frac{\sum_{x=15}^{49}(x+0{,}5)n'(x,x+1)}{\sum_{x=15}^{49} n'(x,x+1)} = \frac{\sum_{x=15}^{49}(x+0{,}5)n'(x,x+1)}{D'_{50}}$$

Propiedad:

$$\frac{D'_{50}}{D_{50}} = \frac{S_{\bar{x}}}{S_0}$$

siendo $S_{\bar{x}}$; el número de supervivientes a la edad media de las madres.

Demostración:

$$D'_{50} = \sum_{x=15}^{49} n'(x,x+1) = \sum_{x=15}^{49} n(x,x+1)\frac{S_x + S_{x+1}}{2S_0} \Rightarrow$$

$$\frac{D'_{50}}{D_{50}} = \frac{\sum_{x=15}^{49} n'(x,x+1)}{\sum_{x=15}^{49} n(x,x+1)} = \frac{\sum_{x=15}^{49} n(x,x+1)\frac{S_x+S_{x+1}}{2S_0}}{\sum_{x=15}^{49} n(x,x+1)} = \frac{\sum_{x=15}^{49} \frac{S_{x+0,5}}{S_0} n(x,x+1)}{\sum_{x=15}^{49} n(x,x+1)}$$

que es precisamente la media de la distribución $\left\{\left(\frac{S_x}{S_0},\frac{S_{x+1}}{S_0}\right); n(x,x+1)\right\}$, por lo que $\frac{D'_{50}}{D_{50}} = \frac{S_{\bar{x}}}{S_0}$ y en consecuencia:

$$R_0 \approx 0{,}485 \cdot \frac{D'_{50}}{F_{15}} = 0{,}485 \cdot \frac{D_{50}\frac{S_{\bar{x}}}{S_0}}{F_{15}} = R \cdot \frac{S_{\bar{x}}}{S_0}$$

1.11.3 Emigración y Mortalidad

Nuestro objetivo ahora es conocer el número de fallecidos reales teniendo en cuenta la emigración y el número de emigrantes reales (no fallecidos). En este caso tenemos la tabla de emigración y la de mortalidad:

$$\{R_x, e(x,x+1), e_x\} \quad y \quad \{S_x, d(x,x+1), q_x\}$$

siendo:

$$e_x = \frac{e(x,x+1)}{R_x} \quad y \quad q_x = \frac{d(x,x+1)}{S_x}$$

Si cruzamos ambas leyes para el intervalo (x, x+1):

Mort-Emig	$1-e_x$	e_x
$1-q_x$	$(1-q_x)(1-e_x)$ p. escapar a los dos fenómenos	$(1-q_x)e_x$ p. emigrar
q_x	$q_x(1-e_x)$ p. morir sin emigrar	$\frac{q_x e_x}{2}$ p. emigrar y morir $\frac{q_x e_x}{2}$ p. frustar la emigración por muerte

El número de fallecidos reales en presencia de emigración serán:

$$d'(x,x+1) = S'_x q'_x = \left[S_0 \cdot \frac{R_x}{R_0} \cdot \frac{S_x}{S_0}\right] \cdot \left[(1-e_x)q_x + \frac{q_x e_x}{2}\right] =$$
$$\left[S_x \cdot \frac{R_x}{R_0}\right] \cdot \left[q_x\left(1-\frac{e_x}{2}\right)\right] = S_x q_x \left[\frac{R_x}{R_0}\left(1-\frac{e_x}{2}\right)\right] =$$
$$d(x,x+1)\left[\frac{R_x}{R_0}\left(1-\frac{R_x-R_{x+1}}{2R_x}\right)\right] \Rightarrow d'(x,x+1) = d(x,x+1)\frac{R_x+R_{x+1}}{2R_0}$$

Así, el número de fallecidos reales queda reducido al número de defunciones de la tabla en estado puro por la probabilidad de sobrevivir a la emigración a la mitad del intervalo (x,x+1):

$$d'(x,x+1) = d(x,x+1)\frac{\frac{R_x+R_{x+1}}{2}}{R_0} = d(x,x+1)\frac{R_{x+0,5}}{R_0}$$

y el número real de emigrantes no fallecidos quedará:

$$e'(x,x+1) = R'_x e'_x = \left[R_0 \cdot \frac{R_x}{R_0} \cdot \frac{S_x}{S_0}\right] \cdot \left[(1-q_x)e_x + \frac{q_x e_x}{2}\right] =$$
$$\left[R_x \cdot \frac{S_x}{S_0}\right] \cdot \left[e_x\left(1-\frac{q_x}{2}\right)\right] = R_x e_x \left[\frac{S_x}{S_0}\left(1-\frac{q_x}{2}\right)\right] =$$
$$e(x,x+1)\left[\frac{S_x}{S_0}\left(1-\frac{S_x-S_{x+1}}{2S_x}\right)\right] \Rightarrow e'(x,x+1) = e(x,x+1)\frac{S_x+S_{x+1}}{2S_0}$$

Por lo tanto, el número de emigrantes reales queda reducido al número de emigrantes de la tabla en estado puro por la probabilidad de sobrevivir a la mitad del intervalo (x,x+1):

$$e'(x,x+1) = e(x,x+1)\frac{\frac{S_x+S_{x+1}}{2}}{S_0} = e(x,x+1)\frac{S_{x+0,5}}{S_0}$$

Supongamos como anteriormente, que disponemos de la tabla de mortalidad observada (real) y queremos construir la tabla teórica (en estado puro). Sean:

- $\mathcal{S}_x$ → Supervivientes observados a la edad x.
- $\mathcal{E}(x, x+1)$ → Emigrantes observados a la edad cumplida x.
- $\mathcal{D}(x, x+1)$ → Fallecidos observados a la edad cumplida x.
- $\mathcal{I}(x, x+1)$ → Inmigrantes observados a la edad cumplida x.

Y queremos obtener las series $\{S_x, d(x, x+1), q_x\}$ de la tabla de mortalidad en estado puro. Si partimos de lo observado, conocemos la probabilidad real de fallecer (q'_x):

$$q'_x = \frac{\mathcal{D}(x, x+1)}{\mathcal{S}_x} \Rightarrow \frac{\mathcal{D}(x, x+1)}{\mathcal{S}_x} = q'_x = q_x \left(1 - \frac{e_x}{2}\right) \Rightarrow$$
$$q_x = \frac{\mathcal{D}(x, x+1)}{\mathcal{S}_x \left(1 - \frac{e_x}{2}\right)} = \frac{\mathcal{D}(x, x+1)}{\mathcal{S}_x - \frac{1}{2}\mathcal{E}(x, x+1)}$$

A partir de estos nuevos cocientes, es posible la obtención, al igual que en los anteriores desarrollos, las demás series escogiendo un $S_0 = 10^k$.