LAS PRÁCTICAS DOCENTES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS[1]

Marianna Bosch y Josep Gascón

(Versión provisional del 13/09/01)[2]

1. De las *prácticas docentes* a la *organización didáctica escolar*

1.1. La *praxeología didáctica espontánea* del profesor

Partiremos de un tipo de *tareas* que abarca el núcleo de lo que suele considerarse la *problemática* con la que se enfrenta el profesor de matemáticas en el ejercicio de su práctica profesional. Se trata de tareas cooperativas que conciernen a diferentes actores de la institución escolar, pero que tradicionalmente se las sitúa bajo la responsabilidad del profesor de matemáticas y que, por tanto, delimitan lo que culturalmente es considerado como las *prácticas docentes del profesor de matemáticas*.

Entre dichas tareas encontramos desde las más *genéricas* hasta las más *específicas*. Algunas parecen provenir de un problema docente presuntamente formulable de manera homogénea para todas las disciplinas escolares como, por ejemplo, el problema del tratamiento de la *diversidad en el aula*, el problema de la *evaluación*, o el problema que plantean los *alumnos que no quieren estudiar*. Otras aparecen, de una manera más específica, en la enseñanza de un área matemática concreta como la *aritmética*, la *geometría*, el *álgebra* o el *cálculo diferencial*. Entre éstas podemos citar las relacionadas con la construcción de los *decimales*, la clasificación de los *cuadriláteros*, la introducción del *álgebra* o el problema de dar sentido al concepto "*límite de función*". Otras tareas docentes, por fin, se sitúan en niveles progresivamente más específicos como, por ejemplo, las relacionadas con los errores recurrentes en el desarrollo del *cuadrado del binomio* o con la falsa unicidad de la *base y la altura de un triángulo*. (Gascón, 1999a).

Muchas de dichas tareas son *rutinarias*, bien definidas y no plantean, en principio, grandes problemas: elegir un manual, preparar un curso, organizar el programa, realizar las clases, elegir los ejercicios que deberán realizar los alumnos, proponer un examen parcial, corregir los deberes, participar en las reuniones de departamento, etc. Pero también podemos pensar algunas tareas como problemas o tareas *problemáticas* que el profesor resuelve o intenta resolver en el ejercicio de su profesión. A título de ejemplo describiremos algunas de estas tareas en forma de preguntas para remarcar su carácter *problemático*, no *rutinario*. Utilizaremos el lenguaje habitual propio de las instituciones docentes.

- ¿Qué hacer con los alumnos que no quieren estudiar?
- ¿Cómo se pueden corregir les deberes hechos en clase?

[1] Algunas de las ideas que aquí aparecen fueron presentadas por Marianna Bosch en el marco de la *XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques* que se celebró en Agosto de 2001.

[2] Este texto debe ser considerado como un **documento de trabajo en periodo de elaboración**. Los autores agradecemos de antemano todos los comentarios, sugerencias y críticas que puedan ser útiles para enriquecer la discusión.

- ¿Con qué criterios se han de clasificar los cuadriláteros para que los alumnos entiendan, por ejemplo, que los cuadrados son una clase especial de rectángulos y de rombos?
- ¿Cómo tratar la creciente diversidad de alumnos en el aula?
- ¿Qué actividades proponer a los alumnos de la E.S.O. a propósito de la medida de una magnitud continua (longitud, área, volumen, peso)?
- ¿Qué dispositivos de evaluación son los más adecuados en la Universidad?
- ¿Cómo hacer vivir a los alumnos de la E.S.O. la necesidad de ampliar los números naturales y la pertinencia de construir los decimales?
- ¿Cómo iniciar el estudio del álgebra en la E.S.O.?
- ¿Cómo evitar que los alumnos escriban "$(a + b)^2 = a^2 + b^2$"?
- ¿Cómo conseguir que los alumnos de Bachillerato (y de primer curso universitario) den sentido a los límites de funciones?
- ¿Cómo evitar que los alumnos de la E.S.O. consideren que un triángulo tiene siempre una base y altura privilegiadas?

Cada profesor aborda, diariamente, multitud de tareas que constituyen aspectos de algunos de estos problemas (así, por ejemplo, puede empezar a enseñar a resolver ecuaciones de primer grado para introducir el álgebra en la E.S.O. o plantear el problema de la medida de una magnitud continua para mostrar la necesidad de construir los números decimales). Para realizar dicha tareas el profesor utiliza *técnicas didácticas* –de ayuda al estudio– que están a su alcance (como, por ejemplo, el *modelo de la balanza* para enseñar a resolver ecuaciones de primer grado o la situación del *grosor de una hoja de papel* para introducir los decimales). El profesor no elige arbitrariamente las técnicas didácticas que utiliza sino que, por el contrario, esta elección está ligada a una manera más o menos explícita a ciertos argumentos justificativos e interpretativos de dichas técnicas. Estos argumentos abarcan también los presuntos beneficios didácticos de la utilización de una u otra técnica y dependen de la institución donde tiene lugar la enseñanza, de la formación que ha recibido el profesor, de sus conocimientos y creencias y, en definitiva, de sus múltiples sujeciones a diferentes instituciones (escolares, científicas, culturales, ...).

Tenemos, en resumen, que las prácticas docentes del profesor de matemáticas constituyen una actividad humana institucionalizada que, como todas, tiene dos caras: la técnico-práctica propiamente dicha ("*praxis*") y la cara teórica que se materializa en un *discurso* ("*logos*") que justifica, interpreta, reorienta y hasta modifica dicha práctica y que, en este caso, se expresa en forma de discurso didáctico-matemático. Tenemos, en resumen, una *praxeología* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) que podemos denominar provisionalmente ***praxeología didáctica del profesor***[3]. Esta praxeología tiene tres características muy importantes:

---

[3] Es importante señalar que esta descripción de la *praxeología didáctica del profesor* se sitúa a un nivel de genericidad que se corresponde con la matemática como un todo. En este nivel se diluye, por su amplitud, el objetivo principal de ese inmenso conjunto de tareas que aparecen dispersas y, por tanto, con múltiples objetivos. Si nos centramos en una OM concreta, podemos decir que el *problema* π *del profesor* consiste en reconstruir OM de manera que pueda ser estudiada en una institución docente I. Con este objetivo unitario el *sistema de tareas didácticas* destinadas a este fin adquiere unidad y hasta cierta estructura. Podemos hablar, entonces, de *praxeología didáctica del profesor relativa a una organización matemática* OM *concreta*. Es la respuesta $R_\pi = [T_\pi/\tau_\pi/\theta_\pi/\Theta_\pi]$ que da cada profesor al problema de reconstruir una OM concreta en una institución

(a) Se trata, en primer lugar de una praxeología "***empírica***" esto es, de una praxeología que vive en una institución concreta, en un momento histórico concreto con unas características y restricciones específicas. Este carácter contingente traerá consigo que contenga elementos accidentales y que presente lagunas, redundancias y hasta contradicciones entre sus componentes, lo que comportará que éstos no sean completamente coherentes entre sí. Así, por ejemplo, es fácil encontrar elementos de la práctica docente que llevan a cabo los profesores de una institución escolar que se contradicen frontalmente con algunos de los elementos tecnológico-teóricos que forman parte de la praxeología didáctica espontánea de dichos profesores.

(b) Decimos que esta praxeología es "***espontánea***" porque las tareas didácticas que la generan no están organizadas de antemano en todos sus detalles sino que, por el contrario, muchas de ellas se improvisan dependiendo del curso que tomen los acontecimientos. El discurso tecnológico-teórico, por su parte, está poco sistematizado, queda esencialmente implícito, aparece de forma atomizada y estereotipada, y su incidencia sobre la práctica didáctica es relativamente pequeña y esporádica. En particular, muchas de las técnicas didácticas que utiliza "espontáneamente" el profesor tienen un carácter *autotecnológico* y dependen fuertemente de *eslóganes pedagógicos* indiscutidos e indiscutibles.

Así, por ejemplo, es habitual que en la E.S.O. el profesor introduzca los números racionales positivos dividiendo la "unidad" (representada por un objeto "concreto" como puede ser un pastel) en partes iguales y tomando unas cuantas de ellas. El discurso justificativo que suele utilizar, y que es una parte importante de la tecnología didáctica de su praxeología didáctica espontánea, se reduce al "eslogan pedagógico" que contrapone lo "concreto" (presuntamente comprensible y motivador) a lo "abstracto" (presuntamente incomprensible y desmotivador).

(c) Tal como ha sido descrita hasta aquí, la *praxeología didáctica espontánea* ***del profesor*** depende de un sujeto concreto de dicha institución que es el "protagonista principal" de dicha praxeología. Esto hace que los elementos accidentales, las carencias y las contradicciones entre sus componentes, que aparecen en toda praxeología empírica, están en este caso mucho más acentuadas al depender de las peculiaridades de un sujeto concreto de la institución. En particular la praxeología didáctica espontánea de un profesor concreto dependerá de las sujeciones de éste a otras instituciones. Así, por ejemplo, un profesor que no domine los medios materiales (por ejemplo, informáticos) necesarios para poner en práctica una determinada técnica didáctica, no la utilizará normalmente, independientemente de como interprete y valore dicha técnica.

Postulamos que para avanzar en la investigación didáctica relativa a las *prácticas docentes del profesor de matemáticas*, es imprescindible llegar a modelizar la *praxeología didáctica espontánea del profesor* como un todo[4] puesto

---

docente I dada. Se trata, en otros términos, de la respuesta al "*problema* (*praxeológico*) *del profesor*" (Chevallard, 2001b).

[4] Esta tesis se sustenta en un principio antropológico fundamental que puede enunciarse como sigue: «[...] *tout* activité humaine régulièrement accomplie peut être subsume sous un modèle *unique*, que résume ici le mot de *praxéologie* » (Chevallard, 1999, p. 223). Aplicando este principio a las prácticas docentes del profesor de matemáticas, resulta que la unidad mínima de análisis tiene estructura de praxeología (didáctica, en este caso), lo que no impide que se

que las prácticas docentes, descritas habitualmente como "tareas", sólo pueden entenderse si se consideran al lado de las técnicas didácticas asociadas que suelen quedar implícitas en las descripciones habituales de las prácticas docentes. Además, el bloque técnico-práctico no puede desligarse del tecnológico-teórico puesto que muchas de las tareas y de las técnicas didácticas asociadas están generadas por la insuficiencia de las justificaciones de las prácticas didácticas clásicas.

1.2. De la *praxeología didáctica del profesor* a la *organización didáctica escolar*

Podemos aislar diversos aspectos, más o menos parciales, de la *praxeología didáctica espontánea del profesor* y reformularlos o modelizarlos de muchas maneras diferentes como problemas de *investigación en didáctica de las matemáticas*, dependiendo de la teoría didáctica que se utilice y de lo que esta teoría considere como objeto de estudio. Cada una de dichas reformulaciones comporta no tanto una nueva manera de formular los *mismos* problemas, sino una forma de esquematizarlos y simplificarlos *eliminando determinados aspectos* –aquellos que son difícilmente tratables con los instrumentos teóricos y metodológicos de que se dispone–. Obtendremos de esta manera muchos tipos diferentes de problemas de investigación didáctica que pueden llegar a perder toda relación con la praxeología didáctica espontánea del profesor (considerada como un todo) y que pueden tratar sobre cuestiones que, aparentemente, no tienen nada que ver entre si. Podemos construir problemas de investigación didáctica que traten aspectos tan parciales y simplificados de las prácticas docentes que acaben siendo difícilmente utilizables, e incluso irreconocibles, por los profesores.

En descargo de la comunidad didáctica hay que decir que en las primeras etapas del desarrollo histórico de una disciplina científica, las simplificaciones –y hasta las simplificaciones abusivas– de los *problemas empíricos*[5] son inevitables. Pero también hay que señalar que la consolidación de una disciplina depende, en gran parte, del progreso de las investigaciones en la dirección de integrar los problemas que tratan aspectos parciales y muy simplificados de los fenómenos, en problemas cada vez más amplios y comprensivos.

En el caso de las *prácticas docentes del profesor de matemáticas* hemos visto la necesidad de integrarlas en el ámbito más comprensivo de la *praxeología didáctica espontánea del profesor*, considerada como un todo. Pero también hemos puesto de manifiesto que los elementos que componen dicha praxeología, esto es, las tareas didácticas que aborda cada profesor, las técnicas didácticas que utiliza y las nociones y principios que le sirven para interpretar y justificar su práctica docente, *no los crea el profesor de la nada*, sino que forman parte del conjunto de tareas, técnicas, nociones y principios disponibles en la institución escolar. Lo que hace o puede hacer un profesor particular en una situación de enseñanza concreta proviene de una amalgama de préstamos institucionales diversos, que aparecen en estratos históricos diferentes y que se apoyan en

---

consideren aspectos parciales o tareas más o menos puntuales de dichas prácticas docentes, siempre que dichas tareas puedan integrarse en una praxeología que debe ser considerada explícitamente.

[5] En el caso de la didáctica de las matemáticas, lo que aquí hemos denominado "praxeología didáctica espontánea del profesor" constituye uno de los objetos "empíricos" clásicos de estudio.

dispositivos de estructuras diversas, cuyas funciones permanecen desconocidas y van cambiando a lo largo del tiempo.

Así, las *tareas didácticas* que puede plantearse un profesor son (algunas de) las describibles con las nociones que tienen sentido en dicha institución en un momento histórico dado[6]. Análogamente, las *técnicas didácticas* que utilizan los profesores para realizar dichas tareas así como los *discursos didáctico-matemáticos justificativos e interpretativos* de dichas técnicas (que cada profesor puede utilizar de una manera más o menos implícita) no son creaciones "personales" de cada profesor particular sino, a lo sumo, adaptaciones de técnicas y de discursos tecnológicos disponibles en la institución escolar[7].

Tenemos, en resumen, que los diversos componentes de las praxeologías didácticas espontáneas de los profesores que son sujetos de una determinada institución escolar I, son fragmentos de una organización institucional que denominaremos ***praxeología*** (u ***organización***) ***didáctica de la institución*** **I**. Ésta sigue siendo una praxeología "*empírica*" y, en cierta forma, "*espontánea*" (en el sentido descrito anteriormente), pero al ser relativamente más "completa" y mantener una mayor coherencia global, podrá ser descrita de una forma más sistemática y, lo que es más importante, permitirá distinguir en las praxeologías didácticas espontáneas de cada profesor aquellas características que provienen de la praxeología institucional (con las adaptaciones idiosincrásicas peculiares de cada caso) de aquellas otras que son aparentemente independientes de la institución escolar.

Postulamos que la modelización que tome en consideración la *organización didáctica de la institución* (como sistema a modelizar) será más pertinente, eficaz y fecunda que la que pretenda modelizar directamente la *praxeología didáctica espontánea del profesor* prescindiendo de su relación con la *praxeología didáctica de la institución*. Sólo mediante esta ampliación del sistema "empírico" a modelizar estaremos en condiciones de superar los enfoques esencialmente cognitivos y situarnos en lo que Michèle Artigue denomina "approche systémique globale du dudactique".[8]

---

[6] Así, por ejemplo, la tarea de "*motivar a los alumnos* con tareas matemáticas relacionadas con sus intereses vitales" no podía enunciarse ni, por tanto, plantearse, en las instituciones didácticas occidentales de principios del siglo XX, ni puede plantearse actualmente en las escuelas musulmanas.

[7] Así, por ejemplo, muchos profesores para justificar la técnica didáctica del *trabajo en grupo* utilizarán la noción de "*obstáculo socio-cognitivo*" y para justificar el aumento de la frecuencia de pruebas escritas como dispositivo de evaluación emplearán la noción de "*evaluación formativa*". Ambas nociones, así como los principios psico-pedagógicos que suelen acompañarlas, constituyen fragmentos del discurso tecnológico disponible en la institución.

[8] Artigue, 1998, p. 243.

2. La problemática del profesor en las investigaciones didácticas

2.1. El papel del profesor en las investigaciones del enfoque cognitivo

Lo que llamamos *enfoque cognitivo*[9] en didáctica de las matemáticas engloba una gran variedad de trabajos que toman como objeto primario de investigación el *conocimiento matemático del alumno y su evolución* a lo largo del proceso de aprendizaje. En un primer momento los problemas de investigación de este enfoque, protagonizados por las perspectivas *conceptualistas*[10], estaban muy centrados en el aprendizaje del alumno:

- ¿Cuáles son las concepciones espontáneas de los alumnos respecto de los conceptos "magnitud", "número decimal", "variable", "ecuación" o "límite de función"?
- ¿De qué manera influyen dichas concepciones sobre las dificultades y errores que cometen los alumnos cuando realizan tareas en las que intervienen dichos conceptos?
- ¿Cómo podrían utilizarse las semejanzas y diferencias entre las estructuras conceptuales de los alumnos y las correspondientes estructuras de los sistemas de conceptos matemáticos, a fin de potenciar el aprendizaje significativo?
- ¿Cómo deben ser modificadas las prácticas tradicionales de enseñanza para ayudar a los estudiantes a construir (o adquirir) los conceptos matemáticos?

Después de esta primera etapa centrada en el *aprendizaje del alumno* el enfoque cognitivo amplió la problemática didáctica introduciendo cuestiones relativas al profesor y a su formación profesional. Este enfoque es más comprensivo porque, aunque desvía su atención hacia la *actividad docente* y toma el *pensamiento del profesor* como nuevo objeto primario de investigación, comparte el interés básico por el aprendizaje del alumno y lo sigue tomando como lo que, en última instancia, debe ser explicado por la investigación. (Gascón, 1998).

Podría decirse que mientras que en la primera etapa se buscaban las variables explicativas del aprendizaje de los alumnos en el propio alumno (además de las *concepciones* de los alumnos se consideraron otras variables cognitivas del

[9] Utilizaremos un esquema propuesto con anterioridad (Gascón, 1998) que permite llevar a cabo una *reconstrucción racional* (Lakatos, 1971) de la evolución de una de las líneas de desarrollo de la didáctica de las matemáticas que parte de la *problemática docente del profesor de matemáticas*. Esta reconstrucción, que no pretende ser una descripción neutral y objetiva de los hechos históricos, contempla esencialmente dos ampliaciones sucesivas del objeto de estudio de esta disciplina que dan origen, respectivamente, al *enfoque cognitivo* y al *enfoque epistemológico* (Gascón, 1999b). Marie-Jeanne Perrin retoma esta misma nomenclatura y describe el enfoque cognitivo como aquel que se caractriza por « l'entrée par l'étude de l'élève, de son développement, de ses conceptions, avec une référence de pshychologie cognitive, une méthode d'entretiens ou de tests. » (Perrin, 1999, p. 283).

[10] Las perspectivas *conceptualistas* utilizan una teoría cognitiva del aprendizaje, más o menos implícita, que es coherente con un modelo epistemológico de las matemáticas considerada globalmente como un *sistema de conceptos*. Las perspectivas que se agrupan actualmente bajo las siglas de "APOS Theory" (Dubinsky, 1991; Asiala y otros, 1996) comparten algunas de estas características pero incluyen un modelo epistemológico de las matemáticas mucho más detallado, por lo que también podrían denominarse "*perspectivas conceptualistas sofisticadas*" (Gascón, 1999b).

alumno relativas a sus *conocimientos previos*, a sus *habilidades intelectuales* y a sus *actitudes*), en la segunda etapa, que es la que aquí nos interesa, se amplía el rango de variables explicativas poniendo el énfasis en las variables del profesor (conocimientos, creencias y actitudes del profesor).

En este ámbito, los trabajos sobre "*prácticas docentes del profesor de matemáticas*" ("*mathematics teaching practices*") tienen una larga historia. Schatz y Grouws (1992) hacen una revisión de este tipo de investigaciones clasificándolos según su nivel de complejidad y encuentran que después de una primera fase en la que se enfatizaban las características del profesor más que las de la enseñanza, todos los estudios asumen que el comportamiento del profesor y el de los alumnos se influyen mutuamente en el aula, aunque adjudican funciones asimétricas a las variables cognitivas según que provengan del uno o de los otros. Así, mientras las variables relativas a las características del profesor se toman como *variables independientes*, las del alumno (especialmente su *aprendizaje* en términos de rendimiento) se toma como *variable dependiente*.

Este esquema fue creciendo progresivamente en complejidad y culminó a finales de los años 80 y principios de los años 90 con la elaboración de un modelo de investigación ("Research Model") en el que se toman como variables independientes o explicativas, esto es, aquellas que supuestamente determinan el comportamiento del profesor en el aula, las siguientes:

(a) El *conocimiento del profesor* (que tiene tres componentes: el conocimiento del *contenido matemático*; el conocimiento *pedagógico* de los métodos de enseñanza; y el conocimiento de los mecanismos mediante los cuales los alumnos *entienden* y *aprenden* un contenido particular).

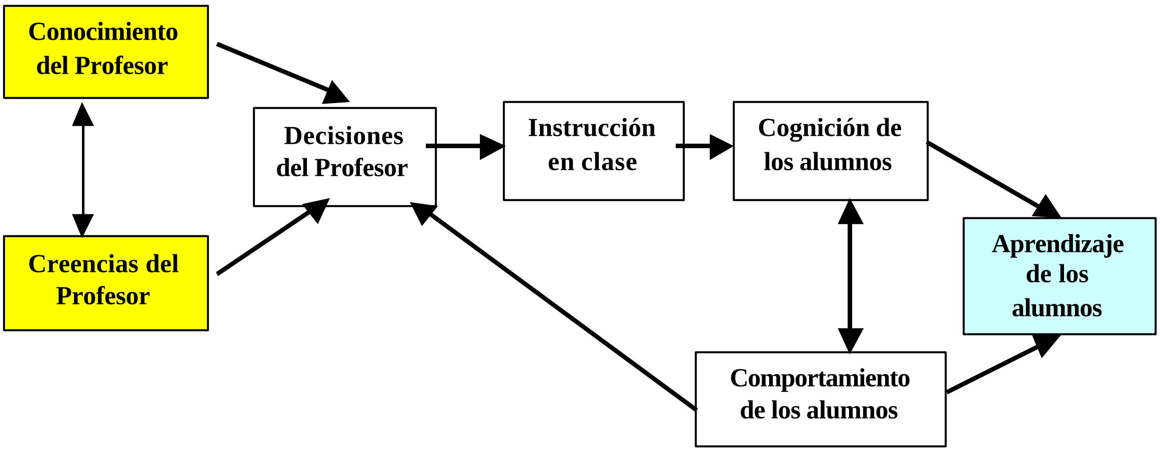
(b) Las *creencias del profesor* (que tiene dos componentes: las creencias respecto a qué son las *matemáticas*; y las creencias respecto al proceso de *enseñanza-aprendizaje de las matemáticas*).

(c) Las *actitudes del profesor*.

En este modelo de investigación la variable a explicar sigue siendo el *rendimiento* (o el *aprendizaje*) *de los alumnos* que, se supone, está directamente determinada por el *comportamiento del alumno en el aula*. Sobre éste actúan (además del *comportamiento del profesor en el aula* determinado, a su vez, por las tres variables citadas) las características personales del propio alumno y sus *actitudes* hacia las matemáticas y hacia sí mismo.

A título de ilustración mostraremos una variante, entre otras, de este modelo genérico de investigación, el que fue utilizada en el proyecto "*Cognitively Guided Instruction*", y que puede esquematizarse como sigue[11]:

[11] Fennema, Carpenter y Peterson, 1989, p. 204.



Este modelo de investigación pretende modelizar, a lo sumo, lo que hemos denominado *praxeología didáctica espontánea del profesor*. El hecho de estar excesivamente centrado en el profesor impide alcanzar el nivel institucional, quedando por tanto la *praxeología didáctica de la institución* fuera de su alcance.

Es interesante observar que este modelo de investigación ha evolucionado, en algunos casos, hacia modelos centrados esencialmente en caracterizar y predecir las decisiones y las acciones que lleva a cabo el profesor de matemáticas en el aula (en lugar de intentar explicar el aprendizaje de los alumnos) hasta el punto que se observa un cierto deslizamiento desde el intento de elaborar modelos del proceso de enseñanza ("*Models of the Teaching Process*"), hacia una elaboración efectiva de un modelo del profesor ("*model of the teacher*"):

> "When the modeling process is done, the model of a particular teacher will contain representations of the goals, beliefs, and knowledge attributed to the teacher, and decision-making mechanism that suggests how, in any set of circumstances, those goals, beliefs, and knowledge will shape the teacher's decision regarding what to do "next.""(Schoenfeld, 2000, p. 249).

2.2. El papel del profesor en las investigaciones del enfoque epistemológico

En el ámbito del *enfoque epistemológico* en didáctica de las matemáticas las "*prácticas docentes*" del profesor de matemáticas han aparecido mucho más tardíamente, al menos de una manera explícita. Puede considerarse que fue a principios de la década de los 90[12] cuando, por primera vez, el desarrollo de algunas teorías que se sitúan inequívocamente en dicho enfoque –singularmente la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)– permitió empezar a integrar el estudio de la *modelización del papel del profesor*:

> Les cherchers vont s'intéresser davantage aux raisons pour lesquelles l'enseignant résiste à la reproduction des ingénieries didactiques mises au point dans les recherches expérimentals, et tenter de théoriser les cointrantes qui pèsent sur les enseignants et de modéliser le rôle de l'enseignant, en classe d'abord, plus largement ensuite. (Margolinas et Perrin-Glorian, 1997, p. 10).

[12] Fue precisamente en l'École d'Été de 1991 en la que, por primera vez, se trató explícitamente el tema "*La place de l'enseignant dans le système didactique*".

En coherencia con el nuevo punto de vista inaugurado por Guy Brousseau[13], el objeto primario de investigación de la didáctica de las matemáticas (esto es, de la *epistemología experimental*) pasa del *conocimiento matemático del alumno* y su ampliación posterior al *pensamiento del profesor*, a la *actividad matemática escolar*. Esto comporta que los conocimientos del alumno, sus actividades de aprendizaje, la actividad docente del profesor, los procesos cognitivos que acompañan a estas actividades y, en general, los procesos de enseñanza-aprendizaje, pasen a ser considerados como objetos "secundarios" (lo que no quiere decir que sean menos importantes) porque deberán ser construidos o definidos a partir de los términos primitivos del modelo epistemológico de las matemáticas que se adopte como núcleo firme y puerta de entrada al análisis de los fenómenos didácticos[14].

Esta es la razón, en nuestra opinión, por la que la problemática didáctica que propuso inicialmente la TSD no incluía, al menos explícitamente, ni el comportamiento del alumno ni el comportamiento del profesor. La extensión posterior del enfoque epistemológico propuesta por la TAD no hizo más que profundizar esta discontinuidad con el enfoque cognitivo. En efecto, una de las primeras aportaciones de la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1985) consistió en poner de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la actividad matemática escolar sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la *reconstrucción escolar de las matemáticas* que tienen su origen en la propia institución de producción del saber matemático. El desarrollo posterior de esta teoría mostró que las diferentes formas de manipulación social de las matemáticas no pueden ser estudiadas separadamente.[15] La actividad matemática escolar se integra así en la problemática, mucho más amplia, de las *actividades matemáticas institucionales* las cuales pasan a constituir el nuevo y más extenso *objeto primario* investigación de la didáctica.

Surge así una definición de didáctica de las matemáticas como "*ciencia de las condiciones específicas de difusión* (*impuesta*) *de los saberes matemáticos útiles a las personas y a las instituciones humanas*"[16] que generaliza la que proponía inicialmente la TSD.

¿Hasta qué punto la nueva problemática didáctica incluye a la problemática clásica? Y, en particular, ¿hasta qué punto y en qué forma el enfoque epistemológico incluye entre sus objetos de estudio lo que hemos denominado "*prácticas docentes del profesor de matemáticas*"? ¿Es posible, con las herramientas que proporciona el enfoque epistemológico, modelizar íntegramente, de una manera sistémica, la *praxeología didáctica espontánea del profesor* y su relación con la *praxeología didáctica de la institución*? Pretendemos empezar a mostrar que, aunque pueda parecer paradójico, el enfoque epistemológico en didáctica de las matemáticas proporciona instrumentos para modelizar la

---

[13] Brousseau (1986 y 1998).

[14] Con este postulado el enfoque epistemológico no pretende, en absoluto, "reducir" los fenómenos *cognitivos* (ni, mucho menos, los fenómenos *didácticos*) a fenómenos *matemáticos* entendidos en el sentido de la epistemología tradicional. Lo que se postula es que el estudio integrado o sistémico de los fenómenos didácticos puede llevarse a cabo, con ventaja, cuestionando y modelizando el componente matemático de éstos (lo que modificará la noción misma de "***matemático***") y que, en ningún caso, los fenómenos didácticos son reductibles a fenómenos cognitivos. En realidad lo que cambia en el enfoque epistemológico, en relación al enfoque cognitivo, es la noción misma de "*fenómeno didáctico*" y, por tanto, el objeto de estudio de la didáctica.

[15] Chevallard, 1991.

[16] Brousseau, 1994

praxeología u *organización didáctica de la institución* que permite dar cuenta de la praxeología didáctica espontánea del profesor. Para ello intentaremos poner de manifiesto, con ejemplos concretos, que el modelo epistemológico de las matemáticas que constituye necesariamente el núcleo firme de cualquier teoría didáctica que se sitúe en el ámbito del enfoque epistemológico, sustenta -aunque no sea de manera unívoca- un *modelo de la construcción, la evolución y la difusión institucional de las matemáticas y, en particular, de la enseñanza de las matemáticas en las instituciones escolares*. Se trata de una hipótesis fuerte que puede expresarse diciendo que todo modelo epistemológico de las matemáticas (en el sentido de la epistemología clásica de las matemáticas) es, en realidad, el germen de un *modelo epistemológico-didáctico*.

Si nos situamos en una institución escolar I, la hipótesis anterior puede materializarse postulando que la *organización didáctica escolar* (esto es, el conjunto de prácticas de enseñanza y aprendizaje sistemáticas y compartidas en I) dependerá fuertemente de la *organización matemática* objeto de estudio en I. Y, recíprocamente, que la *organización matemática* (o conjunto de prácticas matemáticas sistemáticas y compartidas en I) estará determinada, a su vez, por la citada *organización didáctica escolar*. Esta determinación recíproca, o *codeterminación*, entre lo que se considera "matemático" y lo que se considera "didáctico" en una institución I constituye, « *le principe fondateur des didactiques, au moins au sens brousseaunien du terme* »[17].

Pero, volviendo al tema que nos ocupa, ¿cómo incidirá esta codeterminación matemático-didáctica en la modelización de la *organización didáctica escolar* como un todo? En esta sección mostraremos el papel que han jugado las diferentes maneras de interpretar las relaciones entre lo "matemático" y lo "didáctico" (identificado tradicionalmente con lo "pedagógico") tanto desde el enfoque cognitivo como desde el enfoque epistemológico.

Mientras que la pedagogía se ha construido sobre una ficción histórica fundada en la disociación entre lo matemático y lo didáctico[18], la didáctica de las matemáticas se constituyó desde el principio sobre el postulado de la necesidad de hacerse cargo, de forma integrada, de lo "***pedagógico***" (considerado clásicamente como la *forma* de enseñar, independiente del contenido que se enseña y ajeno al objeto de estudio de una nueva disciplina que se denominase "didáctica de las matemáticas") y lo "***matemático***" (considerado clásicamente como el *contenido* de la enseñanza de las matemáticas, transparente, incuestionable e independiente de la forma de enseñar). Una de las diferencias básicas entre los enfoques cognitivo y epistemológico en didáctica de las matemáticas consiste, precisamente, en la forma particular en que cada uno de ellos intenta llevar a cabo esta *didactificación*[19] conjunta de lo pedagógico y lo matemático.

[17] Chevallard (2001a). En la siguiente sección desarrollaremos esta idea que, en nuestra opinión, es clave para entender la génesis y el desarrollo de la didáctica de las matemáticas.

[18] « Lever le blocus qui pèse aujourd'hui encore sur l'enseignant comme sur le chercheur suppose donc tout un travail visant à déconstruire le *leurre pédagogique*, c'est-à-dire l'illusion qu'il existerait *a priori*, en matière scolaire, un domaine de décision affranchi de toute contrainte émanant des contenus de l'étude, et n'entraînant en retour aucune contrainte sur ces contenus et leur traitement "didactique". » Chevallard, (1999, p. ?)

[19] Esto es, incluir lo matemático y lo pedagógico entre los objetos de estudio de la didáctica de las matemáticas. Esto significa que muchas de las nociones consideradas como pedagógicas o como matemáticas pasarán de jugar un papel *paradidáctico*, esto es, únicamente de instrumentos del análisis didáctico, a jugar un papel *didáctico* de pleno derecho, esto es, no sólo de instrumentos sino también de objetos del análisis didáctico (Gascón, 1998, pp. 14-17).

3. Dos formas diferentes de integrar lo "pedagógico" y lo "matemático"

3.1. Concepciones de los profesores y conocimiento pedagógico del contenido

En el ámbito del enfoque cognitivo la forma de integrar lo "pedagógico" y lo "matemático" se ha producido históricamente a través del estudio de las "*concepciones*" de los sujetos de la institución escolar. En una primera etapa, como ya hemos indicado, las investigaciones se centraron en el estudio de las *concepciones de los alumnos* y, más recientemente, en las *concepciones de los profesores*. La problemática que se planteaban las perspectivas conceptualistas iniciales, a la que ya nos hemos referido anteriormente, mostraba muy claramente la estrategia inicial del enfoque cognitivo para integrar lo pedagógico y lo matemático a través del análisis de las concepciones de los alumnos o, en términos más generales, a través del *aprendizaje matemático de los alumnos*.

En una segunda etapa, que es la que nos interesa aquí, la estrategia del enfoque cognitivo para integrar lo pedagógico y lo matemático está basada en la *enseñanza de las matemáticas* y centrada en los *conocimientos* y las *concepciones del profesor*. Veremos que, con diferentes variantes, es una estrategia paralela a la que se llevó a cabo con las concepciones de los alumnos. Según Ernest (1988)[20]:

> The research literature on mathematics teachers beliefs, although scant, indicates that teachers' approaches to mathematics teaching depend fundamentally on their systems of beliefs, in particular on their conceptions of the nature and meaning of mathematics, and on their mental models of teaching and learning mathematics.

La nueva problemática didáctica girará, por tanto, en torno a las *concepciones de los profesores*: se preguntará cuáles son las concepciones (espontáneas) de los profesores[21] sobre la "demostración", la "geometría" o las "matemáticas" globalmente consideradas. Esta nueva problemática también contendrá cuestiones relativas a las concepciones de los profesores respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se postula, en efecto, que:

> What a teacher considers to be desirable goals of the mathematics program, his o her own role in teaching, the students' role, appropriate classroom activities, desirable instructional approaches and emphases, legitimate mathematical procedures, and acceptable outcomes of instruction are all part of the teacher's conception of mathematics teaching" (Thompson, 1992, p. 135).

Y todo ello para relacionar los diversos tipos de concepciones de los profesores con determinados "modelos de enseñanza de las matemáticas" o "puntos de vista respecto a cómo se deben enseñar las matemáticas" y en última instancia, para ver hasta qué punto las prácticas docentes de un profesor son coherentes con sus concepciones[22]. Por fin, se plantean cuestiones relativas a cómo utilizar la dependencia entre determinadas *concepciones filosóficas de la naturaleza de las matemáticas* (elaboradas por la epistemología clásica de las matemáticas) y ciertos *modelos de enseñanza de las matemáticas*, para promover

[20] Citado por Thompson (1992, p. 131).
[21] En lugar de preguntarse, por ejemplo, por las concepciones espontáneas de los alumnos respecto del concepto "límite de función".
[22] En el caso de los alumnos se intentaban relacionar sus concepciones con las dificultades y errores que éstos cometían cuando realizaban tareas en las que aparecían los conceptos en cuestión.

cambios en las prácticas docentes de los profesores mediante cambios potenciales en sus concepciones[23]. Haciendo una simplificación inevitable, podemos resumir esta problemática en los siguientes términos:

Caracterizar los *conocimientos* y las *concepciones de un profesor* concreto y determinar cómo se relacionan con las prácticas docentes que éste lleva a cabo. ¿En qué medida los "puntos de vista respecto a lo que son las matemáticas y a cómo se deben enseñar" determinan las *prácticas docentes* que el profesor realiza efectivamente en el aula? ¿Cómo inciden los conocimientos y las concepciones del profesor sobre el *aprendizaje matemático de los alumnos*?

Simplificando mucho las cosas, podríamos decir que la estrategia del enfoque cognitivo para integrar lo pedagógico y lo matemático, consiste en considerar inicialmente los fenómenos didácticos como fenómenos esencialmente "cognitivos" en el sentido de la psicología cognitiva. Esta identificación, que queda más o menos implícita, se refleja en el interés por modelizar la estructura de los *conocimientos* (Fennema y Loef , 1992) y de las *concepciones de un profesor* concreto (Thompson, 1992). A continuación se intenta relacionar esa estructura con las *prácticas docentes* que el profesor realiza efectivamente en el aula, lo que añade una dimensión "social" a los fenómenos didácticos y, por último, aparece la necesidad de considerar la especificidad del *aprendizaje matemático* lo que proporciona una nueva dimensión a dichos fenómenos.

Tenemos, en resumen, que la integración de lo pedagógico y lo matemático se produce aquí cuestionando la naturaleza clásica de lo pedagógico, añadiéndole dimensiones y modelizándolo de tal manera que comporta, de hecho, una ***ampliación de lo** "**cognitivo**"* [24]**.**

Una línea de investigación especialmente interesante en lo que respecta a la integración de lo pedagógico y lo matemático en el ámbito del enfoque cognitivo lo constituye la inaugurada por Lee Shulman como respuesta a la pregunta: "*¿Qué conocimiento es esencial para el profesor*?" Su noción de "*conocimiento pedagógico del contenido*" ("*pedagogical content knowledge*") es clave para responder a dicha pregunta y para interpretar adecuadamente el cuestionamiento cognitivo de lo pedagógico y su consiguiente ampliación para abarcar lo matemático[25].

Que el conocimiento del *contenido matemático* no es una garantía suficiente para que el profesor enseñe dicho contenido de una manera eficaz era evidente desde hacía muchos años. Lo que provocó el cuestionamiento de lo

---

[23] En el caso de las concepciones de los alumnos se planteaba, paralelamente, la cuestión de cómo podrían utilizarse las semejanzas y diferencias entre las estructuras conceptuales de los alumnos y las correspondientes estructuras de los sistemas de conceptos matemáticos, con el objetivo de potenciar un mejor aprendizaje.

[24] Por ejemplo, Salvador Llinares propone "buscar una complementariedad entre puntos de vista cognitivos y puntos de vista socioculturales relativos a la práctica del profesor como una manera de dar cuenta de ciertos aspectos de lo que sucede en las aulas de matemáticas" (Llinares, 1999, p. 109). Con dicho propósito propone integrar en un marco unitario, entre otras, las nociones de "comunidad de práctica profesional" y "comunidad de prácticas matemáticas" (op. cit. p. 113).

[25] Shulman, 1986 y 1987. Según González (2000) este conocimiento "se refiere al grado de experticia que el docente tiene en el manejo de las diferentes maneras de representar la asignatura a fin de hacerla comprensible a otros; esto implica poseer una buena cantidad de analogías, ilustraciones, ejemplos y contraejemplos, explicaciones, demostraciones y formas de representación de las ideas claves pertenecientes a los diferentes temas a ser enseñados y, además, el conocimiento de los obstáculos que le dificultan al aprendiz la apropiación de tales temas".

pedagógico, en el ámbito del enfoque cognitivo, fue la evidencia de que el *conocimiento pedagógico* que pueda tener el profesor de los métodos de enseñanza (independientes de la disciplina a enseñar) no mejoraba las cosas significativamente. El *conocimiento pedagógico del contenido* incluye aquellos conocimientos del profesor relativos al aprendizaje de los estudiantes de un contenido específico y, en particular, el conocimiento que tienen los profesores de las dificultades típicas de los estudiantes en cada tópico (matemático) concreto y de la manera de preverlas y remediarlas. De esta manera se amplía la noción de *conocimiento pedagógico* incluyendo componentes "*matemáticos*".

Según Alan H. Schoenfeld esta idea constituye el origen de un nuevo programa de investigación en el que ya se ha llevado a cabo un importante volumen de trabajo y que, sobre todo, plantea cuestiones muy interesantes para futuras investigaciones:

> "The idea of he *pedagógical content knowledge* has been elaborated in numerous studies (e. g., Carpenter, Fennema, Peterson & Carey, 1988; Grossman, 1990; Ma, 1999; Sherin, 1996; Stein, Baxter & Leinhart, 1990). Such studies indicate ways in which teachers' knowledge shapes what the teachers are a to do in the classroom at times constraining their options, at times providing the support-structure for a wide range of activities. But there are many open questions as one considers the nature of teachers' knowledge. What forms does such knowledge take? How is it organized? How is it accesset? A comprehensive model of teaching needs to address such issues". (Schoenfeld, 2000, p. 247).

3.2. Organizaciones matemáticas y didácticas de una institución escolar

El enfoque epistemológico parte del cuestionamiento y la modelización explícita de la actividad matemática institucionalizada. Este cuestionamiento de la transparencia de lo "matemático" puso de manifiesto, desde el principio, que las condiciones que rigen la génesis y el desarrollo escolar de los conocimientos matemáticos así como las condiciones de su utilización, en situación escolar, *forman parte de dichos conocimientos*. Se produjo así una *primera ampliación de lo* "*matemático*" que se materializó históricamente en la TSD. La siguiente ampliación es obra de la TAD al proponer que las diferentes formas de manipulación social de las matemáticas, entre las que se cuentan la producción, la enseñanza, la utilización y la transposición institucional, deben ser objeto estudio de la nueva epistemología de las matemáticas y, correlativamente, que la problemática didáctica se sitúe en el marco de esta epistemología ampliada entendida como una *antropología de las matemáticas* que, a su vez, se integra en una *antropología de los saberes* o *antropología cognitiva* (Chevallard, 1991a).

Tenemos, en resumen, que la integración de lo "pedagógico" (en el sentido de relativo a la "enseñanza-aprendizaje escolar") y lo "matemático" (en el sentido restringido de la epistemología clásica) se produce aquí cuestionando, modelizando y ***ampliando radicalmente lo*** "***matemático***".

En la cuestión que nos ocupa, el enfoque epistemológico se interesa primariamente, como ya hemos dicho, por la *organización* o *praxeología didáctica de la institución escolar*. Postula que éste es el sistema "empírico" que interesa modelizar para describir y abordar los problemas de investigación didáctica relativos a las "*prácticas docentes del profesor de matemáticas*". Simultáneamente postula que dicha organización didáctica está determinada o sustentada (y, a su vez, determina) por la *organización* o *praxeología matemática* *escolar* y que, por tanto, ambos objetos empíricos deberán ser modelizados conjuntamente.

> "Le principe fondateur des didactiques, au moins au sens brousseaunien du terme, est que non seulement ce qui est transmis dépend de l'outil avec lequel on prétend réussir sa transmission, mais encore que les organisations de transmission, c'est-à-dire didactiques, se configurent de façon très étroitement liée à la structure de ce qu'il faut transmettre. En d'autres termes, les organisations didactiques dépendent fortement des organisations à enseigner : des organisations mathématiques, dans notre cas. Cet isomorphisme didactico-mathématique est ce que j'exprime à travers une hierarchie de niveaux de codétermination des OD et des OM". (Chevallard, 2001a).

Tenemos, en resumen, que el enfoque epistemológico cambia el problema de caracterizar los conocimientos y las concepciones del profesor y la incidencia de éstos sobre las prácticas docentes y sobre el aprendizaje matemático de los alumnos, por el problema de:

> Caracterizar las *organizaciones matemáticas y didácticas* de las instituciones escolares y analizar las condiciones de existencia, de evolución y de *codeterminación* recíproca. Se trata de analizar cómo se *determinan mutuamente* ambos tipos de organizaciones y, en particular, cuáles son las restricciones que se imponen sobre la emergencia y la evolución de las OM por parte de las diferentes OD posibles.

Ninguno de los componentes de las organizaciones escolares, matemática y didáctica, tienen porqué aparecer oficial y explícitamente como "la manera de considerar las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje" en la institución en cuestión. De hecho, dichos componentes distan mucho de estar completamente elaborados en todos sus detalles ni tienen porqué ser necesariamente coherentes. En general están fuertemente "*naturalizados*" hasta el extremo de ser transparentes para los sujetos de la institución que los asumen y los transmiten a través de sus prácticas institucionalizadas. Su descripción y confrontación empírica deberán sustentarse, por tanto, en una metodología que tenga más en cuenta las prácticas efectivamente realizables y los discursos objetivamente existentes (o, cuanto menos, posibles) en la institución escolar, que las "opiniones" explícitas de los sujetos de la misma.

3.3. Primera descripción de las organizaciones didácticas

Para empezar a caracterizar la *organización didáctica* de una institución escolar concreta, relativa a una OM, necesitamos un punto de vista previo, una manera de mirar que nos proporcione criterios sobre qué debemos mirar y con qué objetivos debemos mirarlo. Esto es imprescindible para poner un poco de orden en las complejas prácticas docentes del profesor de matemáticas. En un trabajo anterior (Gascón, 2001) y basándonos en la *teoría de los momentos didácticos* (Chevallard, 1999) hemos elaborado una primera versión de un "sistema de referencia" que debería tener esta función metodológica y que describiremos brevemente a continuación mediante una metáfora geométrica.

Se trata de un hipotético espacio tridimensional cada uno de cuyos puntos representa una ***organización didáctica ideal posible***. Los ejes del sistema de referencia que hemos seleccionado vienen representados por tres de los momentos o dimensiones de la actividad matemática: el momento *tecnológico-teórico*, el momento del *trabajo de la técnica* y el momento *exploratorio*. En cada uno de estos ejes se sitúan organizaciones didácticas ideales que llamamos *unidimensionales* porque se caracterizan por centrar el proceso de estudio en una única dimensión del proceso de estudio (la que corresponde al eje en cuestión) dándole a ésta una prioridad absoluta y olvidando, o asignando un papel muy secundario, a las restantes dimensiones. Aparecen así, respectivamente, las organizaciones didácticas ideales ***teoricistas***, ***tecnicistas*** y ***modernistas***. Cada uno de estos tipos de organizaciones didácticas ideales puede caracterizarse, complementariamente, por el tipo de contrato didáctico institucional que define y que puede resumirse bastante bien haciendo referencia a la manera cómo se distribuyen las responsabilidades didácticas.[26]

Entre las organizaciones didácticas ideales que toman en consideración y empiezan a integrar dos momentos o dimensiones de la actividad matemática citaremos otros tres tipos. Tenemos, en primer lugar, las organizaciones didácticas ***clásicas***[27], que combinan los momentos *tecnológico-teórico* y del *trabajo de la técnica* y se caracterizan, entre otras cosas, por la trivialización de la actividad de resolución de problemas y por considerar que la enseñanza de las matemáticas es un proceso mecánico totalmente controlable por el profesor. En segundo lugar tenemos las organizaciones didácticas ***empiristas*** que pretenden integrar los momentos *exploratorio* y del *trabajo de la técnica*[28]. Se caracterizan por la preeminencia que otorgan a la actividad de resolución de problemas dentro del proceso didáctico global y por considerar que el aprender matemáticas (al igual que aprender a nadar o a tocar el piano) es un proceso inductivo basado en la imitación y en la práctica. Tenemos, por último, las organizaciones didácticas ***constructivistas***[29] que toman simultáneamente en consideración los momentos *tecnológico-teórico* y *exploratorio*. Se caracterizan por contextualizar la actividad de resolución de problemas situándola en una actividad más amplia y por considerar que el aprendizaje es un proceso activo de construcción de conocimientos que se lleva a cabo siguiendo unas fases determinadas y que depende esencialmente de los conocimientos adquiridos con anterioridad.

Cada uno de estos tres tipos de organizaciones didácticas ideales bidimensionales: clásicas, empiristas y constructivistas, se sitúan en uno de los planos coordenados del sistema de referencia que hemos elegido en nuestro espacio de organizaciones didácticas ideales posibles; el determinado por los dos ejes correspondientes a las dimensiones del proceso didáctico que cada uno de ellos toma en consideración. Tal como hemos mostrado en el trabajo citado, cada uno de esos tipos de organizaciones didácticas se sustenta en un *modelo epistemológico general* de las matemáticas, esto es, en una forma particular y

[26] La caracterización de los *contratos didácticos* determinados por cada uno de los *tipos de organizaciones didácticas ideales*, constituye un trabajo de investigación pendiente que deberemos abordar en futuras investigaciones.

[27] Las organizaciones didácticas *teoricistas* y *tecnicistas* son organizaciones clásicas *extremas*, puesto que ambas son unidimensionales (Gascón, 2001, pp. 5-8).

[28] Entre las organizaciones didácticas *empiristas* hemos analizado el *modernismo* (que es unidimensional) y el *procedimentalismo* que toma en consideración las dos dimensiones citadas (op. cit. pp. 11-15).

[29] En el trabajo citado hemos analizado dos tipos particulares de organizaciones didácticas constructivistas que hemos denominado, respectivamente, *constructivismo psicológico* y *constructivismo matemático* (op. cit. pp. 18-22).

relativamente precisa de interpretar y describir la organización matemática escolar considerada como un todo. En concreto, las organizaciones didácticas clásicas se sustentan en el ***euclideanismo***; las organizaciones didácticas empiristas en los modelos epistemológicos ***casi-empíricos*** y las organizaciones didácticas constructivistas en los modelos epistemológicos ***constructivistas***[30] (Gascón, 2001).

Si, como hemos dicho, OD(I) y OM(I) representan, respectivamente, la organización didáctica y la organización matemática de una institución escolar I, vigentes en un momento histórico dado, postulamos que en futuros trabajos empíricos nuestro ***espacio de organizaciones didácticas ideales posibles*** constituirá un instrumento metodológico útil para caracterizar OD(I), en términos de combinación de organizaciones didácticas ideales –esto es, para situar OD(I) en dicho espacio– y para describir algunos aspectos de la codeterminación entre OD(I) y OM(I). Así, por ejemplo, si el *modelo epistemológico general dominante* en I, esto es la forma predominante de describir la OM(I), es el *euclideanismo*, entonces aparecerán restricciones sobre la OD(I) como, por ejemplo, la imposibilidad de dar cabida a un dispositivo didáctico en el que el momento del *trabajo de la técnica* pueda vivir y desarrollarse con normalidad. Recíprocamente, si la OD(I) está, por ejemplo, muy próxima al *constructivismo psicológico*, entonces los "conceptos" ocuparán un papel central en el *modelo epistemológico general dominante* en I.

Está claro que al intentar describir y analizar OD(I) nos encontraremos con restricciones provenientes de un nivel más específico que las que tienen su origen en la estructura de OM(I) considerada como un todo y la forma como es descrita ésta por el modelo epistemológico general dominante en I. Así, por ejemplo, siguiendo con el caso en que el *modelo epistemológico general dominante* en I sea el *euclideanismo*, y suponiendo además que OD(I) esté muy próximo al *teoricismo*, es evidente que utilizando únicamente las determinaciones debidas a los rasgos generales del euclideanismo no podremos predecir ni explicar aquellos aspectos de la OD(I) que, sin duda, diferenciarán el diseño y la gestión del proceso de estudio teoricista de la *geometría métrica*, del *cálculo diferencial*, de la *topología algebraica* y de la *estadística inferencial*.

Es evidente que existen restricciones más específicas que las que provienen de OM(I) considerada como un todo (descrita por el modelo epistemológico general). Se trata de restricciones que tienen su origen en las organizaciones matemáticas de orden inferior (que se describen mediante los que hemos denominado *modelos epistemológicos específicos*). Algunos trabajos[31]

---

[30] Queremos volver a subrayar que los tipos de organizaciones didácticas que hemos esquematizado muy brevemente son *tipos ideales* que ***no han existido ni existirán nunca en estado puro*** en ninguna institución escolar. Las organizaciones didácticas efectivamente existentes en las instituciones escolares participan en mayor o menor medida de cada uno de estos tipos ideales, por lo que siempre tienen un carácter mixto y mucho más complejo.

[31] El trabajo de tesis de Pilar Bolea, que estamos finalizando, podría considerarse como una de dichas investigaciones. Pretende mostrar la incidencia del *modelo epistemológico específico del álgebra escolar*, dominante en la ESO, sobre la organización didáctica de la enseñanza del álgebra escolar imperante en dicha institución. Interpretamos el *modelo epistemológico específico del álgebra escolar* como una parte esencial de la tecnología didáctica, esto es, del discurso justificativo-interpretativo-generador de las técnicas didácticas correspondientes, esto es, como un componente de $OD^{\mathbf{Alg.}}(I)$. Se abre así el camino para analizar la influencia del modelo epistemológico de las matemáticas (general y específico) dominante en I sobre la tecnología didáctica y de ésta sobre el conjunto de la praxeología (u organización) didáctica escolar (general y específica). (Bolea, Bosch y Gascón, 1998 y 2001).

empiezan a proporcionar cierta evidencia empírica de esta tesis y, lo que es más importante, empiezan a sugerir el tipo de dependencia mutua entre el modelo epistemológico específico, $OM^{A}(I)$, de un ámbito A de la organización matemática escolar y las organizaciones didácticas posibles, $OD^{A}(I)$, para estudiar dicho ámbito en I. En la sección 4 daremos algunos ejemplos de esta codeterminación entre lo matemático y lo didáctico que tiene lugar en niveles más específicos que el de la OM(I).

Es también evidente que existen restricciones más genéricas que las citadas como, por ejemplo, las que se sitúan a nivel "*pedagógico*", esto es, independientes de la disciplina de estudio[32]. Así, por ejemplo, la OD(I) estará fuertemente condicionada por la estructura y las funciones de los *dispositivos didácticos existentes* en cada institución los cuales se sitúan, al menos, en el nivel pedagógico citado.

4. El análisis de las organizaciones didácticas en el marco de la TAD

En esta sección esquematizaremos muy brevemente uno de los trabajos que hemos llevado a cabo en el marco de TAD con objeto de mostrar, de manera paradigmática, en qué forma y hasta qué punto las restricciones que tienen su origen en las organizaciones matemáticas de ordenes superiores al uno (que se describen mediante los que hemos denominado *modelos epistemológicos específicos*) determinan las correspondientes organizaciones didácticas posibles. Nos centraremos, en concreto, en el trabajo sobre el álgebra escolar que hemos citado anteriormente y que, entre otras cosas, pone de manifiesto las funciones de la *modelización algebraica* como *técnica didáctica*.

4.1. La problemática de partida

4.1.1. Mostrar la influencia del *modelo epistemológico específico del álgebra escolar* dominante en la E.S.O. sobre las organizaciones didácticas que existen en esta institución escolar.

4.1.2. Interpretamos que el modelo epistemológico específico del álgebra escolar es una parte esencial del bloque tecnológico-teórico de la praxeología didáctica escolar asociada, esto es, del discurso que pretende justificar, interpretar y engendrar las técnicas didácticas de la enseñanza del álgebra en la E.S.O.

4.1.3. Dado que el álgebra es un contenido presente "casi por todo" en la Enseñanza Secundaria de las matemáticas, su estudio abre la vía para estudiar la influencia del modelo epistemológico dominante en una institución escolar I sobre las organizaciones didácticas (general y específica) que pueden vivir en I.

[32] Como ya hemos dicho, Yves Chevallard ha propuesto recientemente una jerarquía de codeterminaciones matemático-didácticas que sitúa, precisamente, el nivel cero en el nivel pedagógico (Chevallard, 2201a).

4.2. Metodología general de análisis

4.2.1. Construcción de una “OM de referencia” (nuestro modelo).
4.2.2. Descripción, completación y análisis de las OM empíricas (mediante la utilización del modelo).
4.2.3. Revisión y validación de la OM de referencia a partir de los datos empíricos.
4.2.4. Construcción de la “OD de referencia” asociada a la OM. Este proceso se inicia enriqueciendo el modelo de la OM mediante la incorporación de la “dinámica de su construcción en I”.
4.2.5. Descripción, completación y análisis de las OD empíricas.
4.2.6. Revisión y validación de la OD de referencia a partir de los datos empíricos.

Si una OD consiste, esencialmente, en una respuesta a la cuestión: “¿Cómo reconstruir una determinada OM en una institución escolar I?”, entonces debe incluir, en su base, una secuencia de OM en la evolución de las cuales se sitúa la OM considerada: aquellas a partir de las cuales OM se construye y aquellas en las que OM acaba por incluirse. Generalmente, las “razones de ser” de una OM se encuentran en las OM que la preceden o en las que OM se integrará. Éstas tiende a desaparecer a medida que la construcción avanza, pero puede ser importante, desde el punto de vista de la eficacia de la OD correspondiente, saber mantener en vida estas OM “intermedias” al menos durante la construcción de la OM considerada.

4.3. El álgebra en la E.S.O. : nuestro modelo de referencia[33]

4.3.1. En nuestro modelo, el álgebra no aparece inicialmente como una OM al mismo nivel que las otras organizaciones que se estudian en la E.S.O. La describiremos inicialmente como un *instrumento de modelización de otras* OM que, por tanto, deben preexistir.
4.3.2. Los desarrollos posteriores de este instrumento producen cambios importantes en la naturaleza y en las relaciones entre las diferentes OM modelizadas. Esta dinámica lleva a la constitución del “álgebra” como una OM en sí misma (estructuras algebraicas).
4.3.3. Consideramos, por tanto, el álgebra escolar como un proceso de modelización que, a partir de una OM inicial (el sistema) construye una

[33] Cuando se habla de una OM concreta se suele hacer abstracción del proceso de construcción de la misma. Postulamos que dicho proceso, como toda actividad matemática, puede ser descrito en términos de un *proceso de modelización* de un sistema matemático o extramatemático (Bolea, Bosch y Gascón, 2001). En este contexto, nuestro modelo de referencia del álgebra elemental pone el énfasis en ciertos procesos de modelización que, una vez caracterizados, denominaremos *modelización algebraica*, y que se aplican a sistemas matemáticos. Cuando nos referimos a la “aritmética” o a la “geometría” elementales (o a cualquiera de sus suborganizaciones matemáticas que se estudian en la E.S.O.) se suele hacer abstracción del proceso de modelización matemática que ha permitido construirla y, en particular, se suele olvidar el sistema que ha sido modelizado para dar origen a dicha organización matemática. Por el contrario, cuando nos referimos al “álgebra elemental” nos fijamos inicialmente en el proceso de modelización en sí mismo y hacemos abstracción de la OM que se construye mediante dicho proceso y que denominaremos (relativamente) algebrizada. Más allá de la E.S.O. se tomarán como objeto de estudio en sí mismas las OM algebrizadas.

nueva OM (modelo) que permitirá, entre otras cosas, estudiar (describir, estructurar, relacionar con otras OM, entender, etc.) la OM de partida.

4.3.4. El álgebra escolar es, en resumen, un *instrumento matemático de estudio de* OM, esto es, un ***instrumento didáctico*** o, en términos de la TAD, una ***técnica didáctica***.

4.3.5. Este modelo epistemológico del álgebra escolar concuerda muy bien con la interpretación que hace el historiador francés Bernard Vitrac del papel que jugó el álgebra en las matemáticas antiguas (Bolea, Bosch y Gascón, 2001, pp. 6-8).

A la cuestión "¿qué es el álgebra escolar?" no responderemos inicialmente en términos de una OM, sino en términos de un proceso de modelización de una OM por otra OM. Hablaremos entonces de OM más o menos algebrizadas y daremos indicadores del "grado de algebrización" de una OM (op. cit. pp. 8-20).

4.4. Relación del álgebra elemental con las OD posibles

4.4.1. El álgebra elemental es un ejemplo paradigmático de la inseparabilidad de lo « matemático" y lo "didáctico. El álgebra permite estudiar OM: es, por tanto, una *técnica didáctica* (o *técnica de estudio*) que se integra en las OD. Al mismo tiempo el álgebra, inicialmente como instrumento de modelización y posteriormente las OM que se construyen con este instrumento, es un "contenido" matemático que debe ser objeto de estudio en sí mismo.

4.4.2. En coherencia con nuestro modelo de referencia del álgebra escolar postulamos que la *reconstrucción escolar de lo algebraico* debe responder a necesidades de estudio de OM previamente establecidas y que no pueden estudiarse sin recurrir a una modelización algebraica explícita.

4.4.3. Este postulado nos conduce a imponer ciertas condiciones y restricciones para la construcción escolar de lo algebraico (transposición didáctica) :

4.4.3.1. Se requiere partir de una OM previamente establecida (que jugará el papel de sistema a modelizar).

4.4.3.2. Es preciso producir un cuestionamiento tecnológico a propósito de la OM de partida.

4.4.3.3. Necesidad de ir más allá de la OM de partida (destransposición didáctica).

4.4.3.4. Llegar a modelizar todos los componentes de la OM inicial para obtener una nueva OM que la contiene, la extiende y la completa.

4.4.4. Podemos distinguir diferentes *niveles de algebrización* de las OM que pueden objetivarse en términos de las características de sus componentes y de la naturaleza de las relaciones que se establecen entre dichos componentes. Utilizando estos criterios, los trabajos empíricos que hemos llevado a cabo nos han confirmado que las OM de la E.S.O. están muy débilmente algebrizadas.

4.5. ¿Qué uso hacemos de nuestro modelo de referencia?

4.5.1. Nuestro modelo epistemológico de referencia del álgebra escolar corresponde a un elemento teórico central de una OD hipotética (no-empírica) *de nivel regional*.

4.5.1.1. La OD considerada responde a la cuestión: "¿Cómo reconstruir el álgebra elemental en la E.S.O.?"

4.5.1.2. Uno de los principales ingredientes teóricos de dicha OD es una respuesta a la cuestión "¿Qué es el álgebra?"

4.5.1.3. Postulamos que este ingrediente condiciona toda la OD hasta el punto que según cual sea la respuesta (explícita o en acto) a esta cuestión obtendremos diferentes tipos de OD posibles.

4.5.2. La consideración de nuestra OD permite enunciar dos grandes problemas:

4.5.2.1. ¿Cuáles son los restantes componentes de la OD? ¿Qué técnicas didácticas de ayuda al estudio del álgebra elemental y qué tecnologías de dichas técnicas van a poder ser engendradas y fundamentadas por esta teoría?

4.5.2.2. ¿Hasta qué punto podemos considerar que esta OD hipotética (y el modelo epistemológico del álgebra que la sustenta) tiene cabida en las instituciones escolares actuales? ¿Qué otros modelos epistemológicos del álgebra existen efectivamente en la E.S.O.? ¿Cuáles son entonces las OD asociadas (sustentadas) por esta "teoría" de lo que es el álgebra escolar? ¿Cómo describirlas? ¿Cómo caracterizarlas?

4.5.3. Hemos considerado dos tipos de OD empíricas que designamos mediante etiquetas que hacen referencia, precisamente, al modelo epistemológico del álgebra que las sustenta:

4.5.3.1. Una OD dominante que hemos denominado "*aritmética generalizada*".

4.5.3.2. Una OD alternativa que hemos designado por "*modelización algebraica*" y que, como su nombre indica, está más próxima a nuestra OD de referencia.

4.5.3.3. Hemos obtenido datos empíricos que apoyan la existencia en la E.S.O. de rasgos de estas dos OD. Estos datos muestran la dominancia de la primera de las OD descritas y han sido obtenidos a través de un cuestionario a los profesores y mediante el análisis de documentos escritos (discursos noosferianos, libros de texto y producciones de los profesores y de los alumnos).

4.6. A modo de síntesis

4.6.1. El análisis de la enseñanza del álgebra, en el ámbito de la T.A.D., la elaboración de una OM y de una OD de referencia.

4.6.1.1. La respuesta a la cuestión "¿En qué consiste la OM que se pretende reconstruir en una institución escolar?" es un ingrediente fundamental de la OD asociada (en el nivel teórico, principalmente).

4.6.1.2. Dicha respuesta no puede ser concebida de manera aislada: afecta forzosamente tanto a las OM de nivel inferior como a las de nivel superior.

4.6.2. Nuestro modelo de referencia (que es, en principio, un modelo del proceso de algebrización de las OM) nos ha permitido poner en evidencia y analizar fenómenos didácticos ligados a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra elemental tales como: la "desalgebrización del currículo de la

E.S.O."; la "algebrización abrupta" en el Bachillerato y primer curso universitario; ausencia del trabajo de modelización; etc.

4.6.3. El hecho de considerar una OM de nivel "regional" obliga a considerar una estructura pluripraxeológica de OM de los niveles inferiores: en efecto, por definición, una OM *regional* es el resultado de la articulación de OM *locales* que, a su vez, están constituidas por integración de diversas OM *puntuales*.

4.6.4. Los fenómenos didácticos ligados a la enseñanza y aprendizaje del álgebra estarán afectados por los que emergen en los niveles inferiores de e, inversamente, afectarán a los que emergen en el estudio de OM de nivel superior.

4.6.5. Ejemplo de la OM en torno a la *proporcionalidad* (nivel inferior) y del análisis matemático (nivel superior).

4.6.6. El caso del álgebra elemental es, en definitiva, un buen ejemplo de *codeterminación matemático-didáctica* a un nivel poco estudiado en didáctica de las matemáticas.

5. Algunos problemas abiertos

5.1. *¿Cómo describir la estructura fina de las organizaciones didácticas*?

Además de los elementos estructurales mínimos y comunes a todo tipo de praxeologías (tareas, técnicas, tecnologías y teorías), la descripción de las OM se hace tomando prestadas nociones matemáticas y utilizando la capacidad autodescriptiva de ésta: la matemática se describe a sí misma aunque sea de una manera incompleta desde el punto de vista praxeológico, pero suficiente para proporcionarnos un léxico y unos elementos descriptores bastante potentes (mediante el lenguaje algebraico, especialmente).

¿Cómo hacerlo en el caso de las OD? A partir de qué nociones podemos describir los tipos de tareas, las técnicas, las tecnologías y las teorías didácticas? Hemos propuesto un espacio de organizaciones didácticas posibles (que debe completarse) a partir de los momentos o dimensiones del proceso de estudio. Pero dicho instrumento metodológico se centra especialmente en la caracterización del bloque práctico (tareas y técnicas didácticas) de las OD. ¿Cómo podríamos caracterizar las tecnologías y las teorías didácticas (ideales o empíricas)?

5.2. *¿Cómo describir la dinámica de las organizaciones didácticas*?

Los elementos de la TAD desarrollados hasta el presente nos permiten describir ciertos aspectos de la dinámica de las OM: evolución de las praxeologías a partir de variaciones técnicas o de desarrollos tecnológicos; aparición de nuevas cuestiones y de nuevas tareas problemáticas; modelización/algebrización de una OM para producir una OM nueva; aparición de nuevas necesidades teóricas debido al desarrollo de las técnicas; incidencia de los elementos tecnológicos sobre la utilización efectiva de las técnicas; etc. El conocimiento de estos elementos de la dinámica de las OM nos permite decir, por ejemplo, que determinada OM, que vive en una institución determinada, carece de elementos técnicos adecuados; que tal técnica no está suficientemente justificada para poder dar lugar a determinados desarrollos interesantes; o que tal elemento tecnológico es puramente decorativo porque no produce las modificaciones técnicas que

podría producir. Pero este tipo de afirmaciones deben basarse, inevitablemente, en el conocimiento de la dinámica de las OM existentes en otras instituciones, en particular en las que viven en la institución productora del conocimiento matemático.
¿En base a qué criterios y con qué patrones podemos analizar la génesis y la evolución (la dinámica) de las OD en las instituciones docentes? ¿En qué consiste la dinámica didáctica? ¿Las OD de las instituciones sabias deben servirnos también como elementos de referencia privilegiados?

5.3. *¿Cómo evaluar y comparar las organizaciones didácticas*?

¿Cómo establecer equivalencias entre ellas? ¿Cómo definir dichas equivalencias? Dos OD puestas en juego por dos profesores diferentes, ¿son forzosamente diferentes? ¿Cuáles son las variables sensibles? ¿Cómo determinarlas empíricamente? ¿Cómo distinguir lo "esencial" de lo "circunstancial"? Estas mismas cuestiones pueden plantearse respecto de las OM correspondientes a las OD consideradas. Podría considerarse que una OD es "mejor" que otra si permite reconstruir, en una institución escolar dada, "mejores" OM en condiciones "más duras" y de la forma "más económica". ¿Cómo desarrollar una teoría de la "producción de OM" análoga a la teoría de la "producción industrial"?

5.4. *¿Responde la* TSD *al problema de la producción de* OM?

Podemos considerar que la TSD pretende dar una respuesta a la cuestión precedente. En efecto, la TSD propone una técnica de análisis para determinar cuál es la OM que es efectivamente construida por una OD determinada: qué juego se propone; contra qué medio; cuál es la estrategia de base; cómo puede evolucionar dicha estrategia; cuáles son las variables que pueden dirigir esta evolución; etc.
¿Cuáles son los tipos de OM que pueden ser descritas de esta forma? ¿Incluyen las OM locales? ¿Se pueden describir con estos instrumentos las OM regionales? ¿Y las OM que se construyen a "largo plazo"?

Barcelona, Septiembre de 2001

Références bibliographiques

ARTIGUE, M. (1998): L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 18/2, 231-262.

ASIALA, A., BROWN, A., DE VRIES, D., DUBINSKY, E., MATHEWS, D. y THOMAS, K. (1996): *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education,* en Kaput J., Shoenfeld, A. y Dubinsky, E. (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education II, pp. 1-32.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1998): Le caractère problématique du processus d'algébrisation: Proportionnalité et grandeurs en l'einsegnement obligatoire, *Actes de la IXème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, pp. 153-159, Editeur: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM).

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2001): La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (pendiente de publicación).

BOSCH, M. (1994): *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

BROUSSEAU G. (1986): Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7.2, 33-115.

BROUSSEAU, G. (1994): Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques, *ICMI Study 94*: Washington.

BROUSSEAU, G. (1998): *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970–1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, Eds.). Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions.

CHEVALLARD, Y. (1985): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir eneigné*, La pensée Sauvage: Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1991): *Didactique, anthropologie, mathématiques*, Postfacio a la 2ª edición de *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée Sauvage: Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-266.

CHEVALLARD, Y. (2001a): Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Huesca.
Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

CHEVALLARD, Y. (2001b): Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions, *Cours à la XI École d'été de Didactique des Mathématique*s, pendiente de publicación.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori: Barcelona.

DUBINSKY, (1991): Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en David Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, pp. 95-126.

ERNEST, P. (1988): *The impact of beliefs on the teaching of mathematics*, ICME VI, Budapest, Hungary.

FENNEMA, E. CARPENTER, T.P., y PETERSON, P.L. (1989): Teachers' decision making and cognitively guided instruction: A new paradigm for curriculum development, en K. Clements y N.F. Ellerton (Eds.), *Facilitating change in mathematics education*, Geelong, Victoria, Australia: Deakin University Press.

GASCÓN, J. (1998): Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7-34.

GASCÓN, J. (1999a): Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas, en Ortega, T. (Editor): *Actas del III Simposio de la SEIEM*, Valladolid, 129-150.

GASCÓN, J. (1999b): "Didactique fondamentale" versus "Advanced Mathematical Thinking": ¿Dos Programas de Investigación inconmensurables? *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Tome II, pp. 152-170. Editeur: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM).

GASCÓN, J. (2001): Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*: *RELIME* (pendiente de publicación).

GONZÁLEZ, F. E., (2000): Los nuevos roles del profesor de matemáticas. Retos de la Formación de Docentes para el siglo XXI, *Paradigma*, vol. XXI, julio de 2000.

LAKATOS, I. (1971): *History of Science and its Rational Reconstructions*, en R. C. Buck y R. S. Cohen (eds.): *P.S.A..*, 1970, Boston Studies in the Philosophy of Science, 8, pp. 91-135. Dordrecht: Reidel [Trad. española: *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales*, Tecnos: Madrid, 1974].

LLINARES, S. (1999): Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas, en: *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália*, Actas da Escola de Verão de 1999, Ed. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciêncas de Educação, pp.109-132.

MARGOLINAS, C. et PERRIN-GLORIAN, M. J. (1997): Des recherches visant à modéliser le rôle de l'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 7-16.

PERRIN-GLORIAN, M. J. (1999): . .. . …..……………………… . *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Tome II, pp. …. - .... Editeur: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM).

SCHATZ , M.S. y GROUWS, D.A. (1992): Mathematics teaching practices and their effects, in *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 115-126). Mac. Millan: New York.

SCHOENFELD, A. H. (2000): Models of the Teaching Process, *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261.

SHULMAN, L. S. (1986): Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

SHULMAN, L. S. (1987): Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform, *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

THOMPSON, A. G. (1992): Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research, in D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127—146). Mac. Millan: New York.