SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y PERSONALES DE LA DERIVADA. CONFLICTOS SEMIÓTICOS RELACIONADOS CON LA NOTACIÓN INCREMENTAL

Neus Inglada y Vicenç Font

Universitat de Barcelona.

INTRODUCCIÓN

Nuestra investigación, inscrita dentro de la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino y Batanero, 1994, 1998; Font, 2000a; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2001; Godino, 2002), tiene como objetivo general identificar, describir y explicar los significados institucionales y personales del objeto "derivada" (derivada de una función en un punto y función derivada) implicados en un proceso de estudio en una institución escolar de Secundaria de Catalunya. Desde este marco teórico nos proponemos:

1) Determinar el significado institucional de referencia del objeto derivada.
2) Determinar, a través del análisis de los libros de texto más habituales, el significado institucional que se quiere enseñar en las instituciones de Bachillerato de Catalunya (análisis macroscópico).
3) Constatar algunos de los conflictos semióticos más relevantes que un análisis a priori (análisis microscópico) permite detectar en los libros de texto.
4) Analizar (de manera macroscópica y microscópica) el libro de texto que se va a utilizar en el proceso de estudio que se quiere investigar.
5) Estudiar el significado del objeto derivada realmente implementado en un grupo de segundo de Bachillerato.
6) Describir el significado personal declarado de los alumnos del grupo estudiado.
7) Dar ideas para confeccionar una secuencia didáctica que permita mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del objeto derivada en una institución de Secundaria.

En la comunicación que presentamos nos centraremos fundamentalmente en el punto 3 y analizaremos los posibles conflictos semióticos relacionados con determinados usos de la notación $\Delta y/\Delta x$

1) MARCO TEÓRICO

En la investigación que presentamos pretendemos contemplar tanto la perspectiva epistemológica como la cognitiva. Un marco teórico que contempla de manera armónica ambas, es el enfoque de la cognición matemática de Godino y Batanero. Estos investigadores, en sus trabajos sobre significado y comprensión de los objetos matemáticos, han desarrollado la teoría de los objetos institucionales y personales y la teoría de las funciones semióticas — evolución de la anterior— (Godino y Batanero 1994 y 1998; Godino 2002). De esta forma, se ofrece un punto de vista pragmático, semiótico y antropológico que puede explicar muchos de los fenómenos que se producen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

En la teoría TFS se considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas en un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994) y, por tanto, son derivados de dichas prácticas. Al objeto matemático se le asigna un estatuto derivado, mientras que a la práctica se le dota de un lugar privilegiado, a diferencia de otras teorías en las que dicho objeto es quien tiene ese lugar privilegiado.

La relación que hay entre las prácticas y los problemas que las suscitan lleva a considerar que lo que hay entre el estímulo —campo de problemas— y la respuesta —sistema de prácticas— no es una caja negra; al contrario, en este lapso es donde tiene lugar el proceso nada mecánico de simbolización por el que las experiencias se codifican significativamente, se procesan como signos, y éstos se manipulan y combinan siguiendo reglas y métodos elaborados al efecto para dar lugar a objetos matemáticos personales que, según Godino y Batanero (1994), son: *"emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas"* (p. 335). Estos objetos personales van cobrando forma —van emergiendo— en un aprendizaje motivado por la propia práctica.

Una característica que presentan los significados y los objetos personales es que son fenómenos individuales y a la vez colectivos, por tanto cualquier análisis que los aborde desde uno solo de estos aspectos resulta reduccionista. Por este motivo en la teoría TFS (Godino y Batanero 1994) se introducen las instituciones, los objetos institucionales y los significados institucionales.

Para explicar la dialéctica institucional-personal, en Godino y Batanero (1994, p. 342) se propone el constructo "significado de un objeto para un sujeto desde la perspectiva de la institución" de la manera siguiente: " Significado de un objeto O_I para un sujeto p desde el punto de vista de la institución I: Es el subsistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas que son consideradas en I como adecuadas y características para resolver dichos problemas.".

En el desarrollo anterior hemos tenido en cuenta tanto los objetos matemáticos personales como los institucionales, pero con ello no hemos agotado, ni mucho menos, todos los posibles usos del término objeto en matemáticas. En la TFS se considera que los objetos matemáticos según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales:

- personal - institucional (individual – social)
- ostensiva - no ostensiva (perceptible – mental)
- intensiva – extensiva (ejemplar – tipo, concreta – abstracta)
- elemental – sistémica (unitaria – compuesta)
- expresión – contenido (significante – significado).

En la TFS se considera que las prácticas que constituyen la actividad matemática se pueden considerar como una manipulación de ostensivos acompañada de pensamiento en el que se manipulan símbolos mentales. Entender las prácticas de esta forma nos conduce a la necesidad de realizar un análisis más fino por medio de las funciones semióticas. Se postula la hipótesis de trabajo siguiente: las funciones semióticas son un instrumento relacional que facilita el estudio conjunto de las representaciones ostensivas (dominio de lo público) y de las mentales (dominio de lo privado) activadas en las prácticas matemáticas. En nuestra opinión, las funciones semióticas tienen un papel muy importante en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza dentro de un determinado juego de lenguaje.

Hjelmslev en su teoría del lenguaje usa las nociones de signo, expresión y contenido. La palabra signo la aplica a la entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido, que son los funtivos entre los que la función de signo establece una dependencia. También establece la semiótica connotativa como aquella en la que el plano de la expresión está constituido por otra semiótica.

<table>
<tr><td>Expresión</td><td>Contenido</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">E x p r e s i ó n</td><td>Contenido</td></tr>
</table>

Eco denomina a la función de signo función semiótica, al señalar que existe función semiótica cuando una expresión y un contenido están en correlación, y ambos elementos se convierten en funtivos de la correlación. Godino y Batanero (1998), conciben una función semiótica, al menos metafóricamente, como una correspondencia entre conjuntos que pone en juego tres componentes: un plano de expresión (objeto inicial); un plano de contenido (objeto final); un criterio o regla de correspondencia.

En la teoría TFS (Contreras y Font 2002) las funciones semióticas relacionan dos objetos que pueden ser materiales o mentales. Esta manera de entender las funciones semióticas se inspira en una larga tradición que va de Peirce a Schütz pasando por Husserl. La noción de signo, tal como la describe Peirce, es un aparejamiento individual entre dos fenómenos asociados que pueden ser físicos o mentales. En cambio, el signo de Saussure apareja dos fenómenos mentales. La interpretación de las funciones semióticas que propone la TFS generaliza de manera radical la noción de representación usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática.

La TFS ha sido asumida por diferentes investigadores y recientemente se ha aplicado a la Didáctica del Análisis Matemático (Contreras, Font, Luque y Ordóñez 2001; Contreras y Font 2002; Font 2000a, 2000b y 2000c; Inglada y Font 2002; Luque y Contreras 2001; Luque, Sánchez y Contreras, 2002; Ordóñez y Contreras 2001; Ordóñez, Contreras, García y Luque, 2002)

La TFS permite dos tipos de análisis: uno, más amplio, ligado a la organización de contenidos, y otro, más pormenorizado, en el que el sujeto pasa a primer plano. El primer tipo de análisis consiste en determinar los procedimientos que ha de dominar el alumno, como resultado del proceso de instrucción, los contenidos que se han de introducir para justificarlos, las representaciones ostensivas que implican, los problemas dónde se aplican, etc. A pesar de su potencia explicativa, este tipo de análisis que podemos denominar "gruesos" o "macroscópicos" presenta limitaciones importantes y son insuficientes cuando se considera también el pensamiento de las personas. La TFS ha elaborado un instrumento teórico: las funciones semióticas, que permiten realizar un análisis más "fino" en el que se contempla el pensamiento de los individuos.

2 ANÁLISIS MACROSCÓPICO DE LIBROS DE TEXTO

Para determinar, a través del análisis de los libros de texto más habituales, el significado institucional de la derivada que se quiere enseñar en las instituciones de Bachillerato de Catalunya hemos tenido en cuenta primero los siguientes aspectos generales: el número de páginas y el número de unidades, la modulación de los contenidos y su distribución por cursos, trimestres y unidades, la estructura de la unidad, la ubicación de las actividades, el uso de recursos informáticos y su mayor o menor aproximación al modelo constructivista.

Para analizar las prácticas contempladas en las unidades de derivadas con más detalle (análisis macroscópico) hemos utilizado los esquemas que se proponen en Font (2000a y 2000b)[1].

En concreto hemos estudiado primero cuáles de las siguientes técnicas de cálculo de la función derivada se usan en los diferentes libros de texto

¿Cómo se calcula f'(x)?

- Directamente
  1) Utilizando límites. Calcular $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
  2) Gráficamente
     - 2.1) Hallar una condición que cumplan todas las rectas tangentes
     - 2.2) Hallar f'(x) a partir de la condición anterior
  3) Por aproximación
     - 3.1) Dibujar la gráfica de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para un valor de h muy pequeño.
     - 3.2) Considerar que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\approx\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$
     - 3.3) Hallar la expresión de f'(x) a partir la gráfica de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Indirectamente: 4) Utilizando las reglas de derivación

Figura 1

Para que estas prácticas resulten comprensibles a los alumnos, es necesario relacionarlas con otro sistema de prácticas que permita calcular la derivada de una función en un punto, así como con un sistema de objetos institucionales que las justifiquen. De todo esto, se desprende la necesidad de estudiar también cuáles son las técnicas de cálculo de la derivada en un punto contempladas en los libros de texto analizados. En concreto hemos estudiado si los libros de texto consideran algunas de las siguientes técnicas de cálculo de la derivada en un punto:

¿Cómo se calcula f'(a)?

- Directamente
  1) Utilizando límites Calcular $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
  2) Gráficamente
     Calcular la pendiente de la recta tangente
  3) Por aproximación
     - 3.1) Calcular $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ para un valor de h muy pequeño.
     - 3.2) Considerar que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\approx\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

.

- Indirectamente: 4) Utilizando la función derivada
     - 4.1) Calcular f'(x)
     - 4.2) Sustituir x por a

Figura 2

Para que estas prácticas sean comprensibles, los alumnos necesitan un conjunto complejo de objetos institucionales no ostensivos (pendiente, tasa de variación media, recta tangente, derivada en un punto, función derivada, etc.), así como de un conjunto de ostensivos asociados. Este conjunto de no-ostensivos y de ostensivos asociado ha de estar disponible para ser activado durante la realización de dichas prácticas.

El análisis de los libros de texto más habituales en la Comunidad Autónoma de Catalunya nos permite afirmar que la mayoría utiliza sólo dos técnicas para el cálculo de la función derivada: el cálculo directo por límites y el cálculo indirecto por reglas de derivación y dos para el cálculo de la derivada en un punto: el cálculo directo por límites y el cálculo indirecto por substitución en la función derivada. De manera marginal pueden aparecer técnicas gráficas o técnicas de aproximación utilizando recursos tecnológicos.

3 ANÁLISIS MICROSCÓPICO DE LOS LIBROS DE TEXTO

Para constatar algunos de los conflictos semióticos más relevantes que un análisis a priori permite detectar en los libros de texto hemos utilizado el análisis microscópico que permite las funciones semióticas. En concreto hemos utilizado la técnica y la notación que se propone en Font (2000a) y en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2002). Para el proceso de análisis, y dado que nos ha resultado operativo, se considerará como expresión o contenido solamente la faceta extensiva-intensiva del lenguaje matemático y, además, se destacará el carácter notacional que, en ocasiones, tiene dicho lenguaje. Según lo anterior, se considerarán las siguientes funciones semióticas:

	Extensional	Intensional	Notacional
Extensional	FS1	FS2	FS3
Intensional	FS4	FS5	FS6
Notacional	FS7	FS8	FS9

Tabla 1

FS1 Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con otra entidad extensional

FS1.1 Relaciona un objeto con otro de la misma clase.

FS1.2 Relaciona un objeto con otro que no es de la misma clase.

FS2 Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con una entidad intensional

FS2.1 Relaciona un objeto con la clase a la que pertenece.

FS2.2 Relaciona un objeto con una clase a la cual no pertenece.

FS3 Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con otra notacional.

- FS3.1 Esta función semiótica relaciona un objeto con una entidad notacional.
- FS3.2 Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con un símbolo que no la representa.

FS4 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con una entidad extensional.

- FS4.1 Esta función semiótica relaciona una clase con un ejemplo de la clase.
- FS4.2 Esta función semiótica relaciona una clase con un objeto que no es de la clase.

FS5 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional.

- FS5.1 Esta función semiótica define una clase de objetos de manera diferente.
- FS5.2 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional diferente.

FS6 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con un símbolo.

- FS6.1 Esta función semiótica relaciona una clase con la notación que la representa.
- FS6.2 Esta función semiótica relaciona una clase con un símbolo que no la representa.

FS7 Esta función semiótica relaciona el símbolo con una entidad extensional.

- FS7.1 Esta función semiótica relaciona el notacional con el objeto que representa.
- FS7.2 Esta función semiótica relaciona el símbolo con un objeto que no representa.

FS8 Esta función semiótica relaciona el símbolo con una entidad intensional.

- FS8.1 Esta función semiótica relaciona el notacional con la clase que representa
- FS8.2 Esta función semiótica relaciona el símbolo con una clase que no representa.

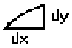
FS9 Esta función semiótica relaciona una notación con otra notación.

- FS9.1 Esta función semiótica cambia la notación de un objeto/clase por otra equivalente.
- FS9.2 Esta función semiótica relaciona una notación con otra que no es equivalente.

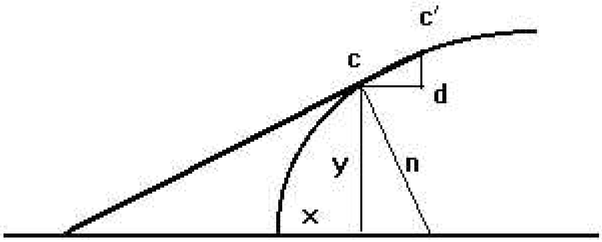
Los análisis semióticos pormenorizados que se proponen en la TFS permiten poner de manifiesto posibles conflictos semióticos (Contreras, 2002), esto es, la posible disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos —persona o institución— en interacción comunicativa. Entre estos conflictos semióticos destacan, por su relevancia, aquellos que origina un libro de texto al dejar a cargo del alumno la realización de determinadas funciones semióticas que son básicas para la correcta interpretación del texto.

4 CONFLICTOS SEMIÓTICOS RELACIONADOS CON LA NOTACIÓN $\Delta y/\Delta x$

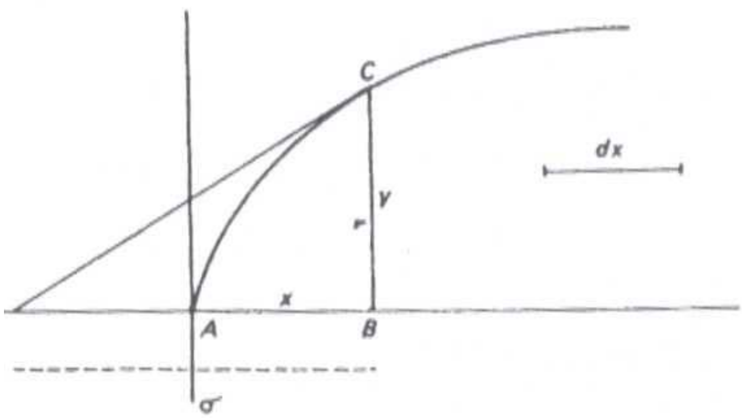
4.1 Origen de la notación

En la génesis histórica del cálculo diferencial se observa que en el periodo anterior al uso del triángulo 

, es decir el periodo anterior a Barrow, se utilizaba el triángulo determinado por la ordenada, la tangente y la subtangente, y el triángulo determinado por la ordenada, la normal y la subnormal. Leibniz, estudiando la obra de Pascal, observó la importancia del pequeño triángulo *cc′d* de la figura porque se podía considerar semejante al triángulo formado por la ordenada, la tangente y la subtangente, y al triángulo formado por la ordenada, la normal y la subnormal.



Según Bos (1984), para Leibniz, el diferencial de una variable *y* era la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de *y*. Es decir: Leibniz consideraba sucesiones correspondientes de valores de las variables *x* e *y* en las que los términos estaban infinitamente próximos y que *dy* era la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas sucesivas, mientras que *dx* era la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores consecutivos de la abscisa *x*. Este historiador considera que Leibniz era bastante reticente a presentar su nuevo cálculo al público matemático porque utilizaba cantidades infinitamente pequeñas que no estaban definidas rigurosamente y que, por tanto, no eran del todo aceptables en matemáticas. Por este motivo tomó la decisión de presentar al público un concepto de diferencial completamente diferente, que ya no era infinitamente pequeño, pero que cumplía las mismas reglas. En su primera publicación sobre el cálculo diferencial "Un nuevo método para hallar máximos y mínimos, así como tangentes" del año 1684 introduce un segmento finito llamado *dx*, y define a partir de él *dy* en el punto *C* como el segmento que satisface la siguiente igualad: $\frac{y}{\sigma} = \frac{dy}{dx}$ donde F es la longitud de la subtangente. Definida de esta manera *dy* también es un segmento finito.



Esta manera de presentar el cálculo diferencial, para algunos historiadores como Bos (1984) es un claro retroceso solamente explicable por el miedo que tenía Leibniz de las reacciones a su método.

El concepto de diferencial, considerado como un incremento infinitesimal, fue de gran ayuda en la resolución de muchos problemas tanto matemáticos como físicos. Con respecto a la notación, uno de los motivos por los que la de Leibniz acabó imponiéndose fue su facilidad de uso, tal como se puede observar al calcular, por ejemplo, la derivada de la función compuesta o la derivada de la función inversa. Sin embargo la noción de diferencial siguió siendo ambigua, resultando incluso en algunos casos contradictoria

Lagrange, consciente de las imprecisiones y ambigüedades del uso de los infinitesimales propuso organizar el cálculo diferencial a partir del concepto de derivada, en lugar de hacerlo a partir del concepto de diferencial. De todas maneras no fue hasta los trabajos de Cauchy en la primera mitad del siglo XIX en los que la diferencial dejó de considerarse como un incremento infinitesimal y pasó a ocupar un lugar secundario en la organización del cálculo. Cauchy definió la derivada como el límite de un cociente de incrementos $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ y la diferencial como una expresión construida a partir de la derivada: $dy = f'(x)dx$, siendo dx un incremento arbitrario (grande o pequeño) de la variable independiente. De esta manera $f'(x)$ se podía representar por dy/dx y la notación diferencial podía seguir siendo un instrumento útil para ciertas demostraciones o cálculos.

Las propuestas didácticas sobre derivadas en Bachillerato, cuando contemplan el concepto de diferencial, reflejan este papel secundario con respecto a la noción de derivada que ya le adjudicó Cauchy.

4.2 La complejidad semiótica del paso de la derivada en un punto a la función derivada

En Font (2000a) se pone de manifiesto la gran complejidad semiótica que conlleva el paso de la derivada en un punto a la función derivada. Los análisis de los textos que hemos realizado nos permiten afirmar que, en general, sus autores no son conscientes de la dificultad de este paso o bien no le prestan la atención que se merece. Por otra parte, determinados usos de la notación $\Delta y/\Delta x$ pueden presentar más inconvenientes que ventajas cuando se toma en consideración la complejidad semiótica asociada al paso de la derivada en un punto a la función derivada, como a continuación argumentamos.

Consideramos que la trayectoria didáctica seguida para introducir la derivada en el Bachillerato debe permitir a los alumnos distinguir claramente entre la derivada en un punto y la función derivada. Si bien es posible considerar una secuencia didáctica que primero define la función derivada y después la derivada en un punto -por ejemplo, la propuesta de Azcárate, Casadevall, Casellas y Bosch (1996)- en el estado español la mayoría de libros de texto primero introducen la derivada en un punto y después la función derivada.

Si se opta por introducir la derivada en un punto antes que la función derivada, en nuestra opinión la siguiente secuencia es la más adecuada:

1) Definir la derivada en un punto como $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

2) Introducir la notación siguiente argumentando que con ella podremos calcular más fácilmente la indeterminación 0/0 que aparece al buscar la derivada de las

funciones polinómicas en x=a ya que bastará simplificar y no será necesario utilizar la división por Ruffini para factorizar el numerador:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

3) Definir la función derivada como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Llegados a este punto hay razones importantes para introducir la notación $\frac{dy}{dx}$ en una unidad didáctica que tenga por objetivo la enseñanza de la derivada, ya que al utilizarla, tal como hemos comentado el apartado 4.1, resulta más cómodo el manejo de la regla de la cadena o el cálculo de la derivada de la función inversa. Incluso es más fácil "justificarlas" con esta notación.

Para poder llegar a representar la derivada como $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ se suele introducir previamente la notación incremental $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$. La secuencia temporal queda de la siguiente manera: primero se introduce la notación incremental para después introducir la notación diferencial y así poder utilizarla, por ejemplo, para enunciar e incluso "justificar" la regla de la cadena o bien para utilizar el diferencial dy como una aproximación lineal a Δy.

Hasta el curso 2002-2003 en la comunidad autónoma de Catalunya las derivadas se contemplaban tanto en el primer curso como en el segundo, por lo que se podía dar el caso de introducir el cociente incremental en el primer curso de Bachillerato, para después en el 2º curso introducir la notación diferencial y así poderla utilizar, por ejemplo, para "justificar" la regla de la cadena. A partir del curso 2002-2003, esta posibilidad ya no se puede dar ya que las derivadas se tienen que impartir en el segundo curso de Bachillerato

En nuestra opinión, en el caso de optar por introducir en la unidad didáctica tanto la notación incremental como la diferencial hay dos posibilidades coherentes

Posibilidad A

Después de los tres pasos anteriores

4) Introducir la notación incremental y la diferencial primero para la función derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

5) Introducir después la notación diferencial para la derivada en un punto

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} = f'(a)$$

Posibilidad B

Si se quiere introducir desde el principio la notación incremental, se pueden modificar los 3 primeros pasos descritos anteriormente y seguir la siguiente secuencia:

1. Definir la derivada en un punto como $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

2. Introducir la notación siguiente argumentando que con ella podremos calcular más fácilmente la indeterminación 0/0 que aparece al buscar la derivada de las funciones polinómicas en $x= x_0$ ya que bastará simplificar y no será necesario utilizar la división por Ruffini para factorizar el numerador:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

3) Introducir la notación incremental

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0}=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

4) Definir la función derivada como $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

5) Introducir la notación incremental y diferencial para la función derivada

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

En la comunidad autónoma de Catalunya los libros de texto del Bachillerato utilizan la notación incremental y la diferencial de manera secundaria. En pocos casos se hace una propuesta de unidad didáctica que contemple estas notaciones, aunque hay algunas excepciones ya que, por ejemplo, el libro de texto de la editorial Santillana[2] utiliza tanto la notación incremental como la diferencial, mientras que, por ejemplo, el libro de texto de la editorial MacGraw-Hill sólo utiliza de manera muy marginal la notación incremental. En otros textos no se introduce ninguna de las dos notaciones como, por ejemplo, en el libro de texto de la editorial Castellnou.

Ahora bien, aunque los libros de texto no contemplen la notación incremental y la diferencial, el significado personal declarado de los alumnos de Bachillerato de la modalidad de ciencias y tecnología suele incorporar prácticas en las que dicha notación se utiliza. Este hecho se produce aún en el caso de que no se haya utilizado esta notación en la clase de matemáticas ya que el cociente incremental y el concepto de diferencial se utiliza habitualmente en la clase de física.

Éste es el resultado que hemos observado en nuestra investigación al indagar sobre el significado global que los alumnos de 2º de Bachillerato tenían sobre la derivada antes de comenzar a explicar las derivadas. Estos alumnos en sus respuestas a un cuestionario inicial utilizan la notación incremental y la diferencial, aunque en la mayoría de los casos no responden correctamente a la pregunta formulada. La presencia de estas notaciones en sus respuestas se debe a que las utilizan en la clase de Física. Ahora bien, después de entrevistar al profesor de Física y de analizar el libro de texto de esta materia, llegamos a la conclusión que los alumnos utilizan estas notaciones en la clase de Física sin saber qué hacen y sin saber para qué lo hacen y que, además, el profesor de esta materia utiliza dichas notaciones de manera mecánica sin pretender que los alumnos entiendan lo que hacen

Cuando se opta por introducir la notación incremental y la diferencial, pero no se sigue de manera rigurosa el orden de una de las dos secuencias descritas anteriormente se ponen las bases de un *conflicto semiótico causado por la introducción implícita de la función derivada en la definición de la derivada en un punto*. Es decir, determinados usos de la notación incremental implican definir la derivada en un punto $f\,'(a)$ como: $\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ en $x=a$ sin haber definido antes la función derivada.

4.3 Ejemplo de conflicto semiótico relacionado con la notación incremental

En la página 222 del libro de texto de primero de Bachillerato de la editorial Santillana se da la siguiente definición de derivada en un punto:

Derivada de una función en un punto

La tasa de variación de una función *y=f(x)* en un punto *x=a,* que se ha estudiado en el apartado anterior, se llama **derivada de la función *y=f(x)* en el punto *x=a,*** y se representa por ***f´(a)*** (fig. 7).

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}_{(en \quad x=a)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

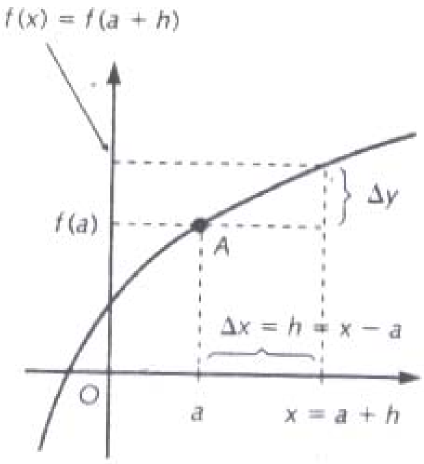


Fig. 7. $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ en $x = a.$

El entramado de funciones semióticas que ha de poner en funcionamiento el alumno para entender esta definición, en nuestra opinión, es la siguiente:

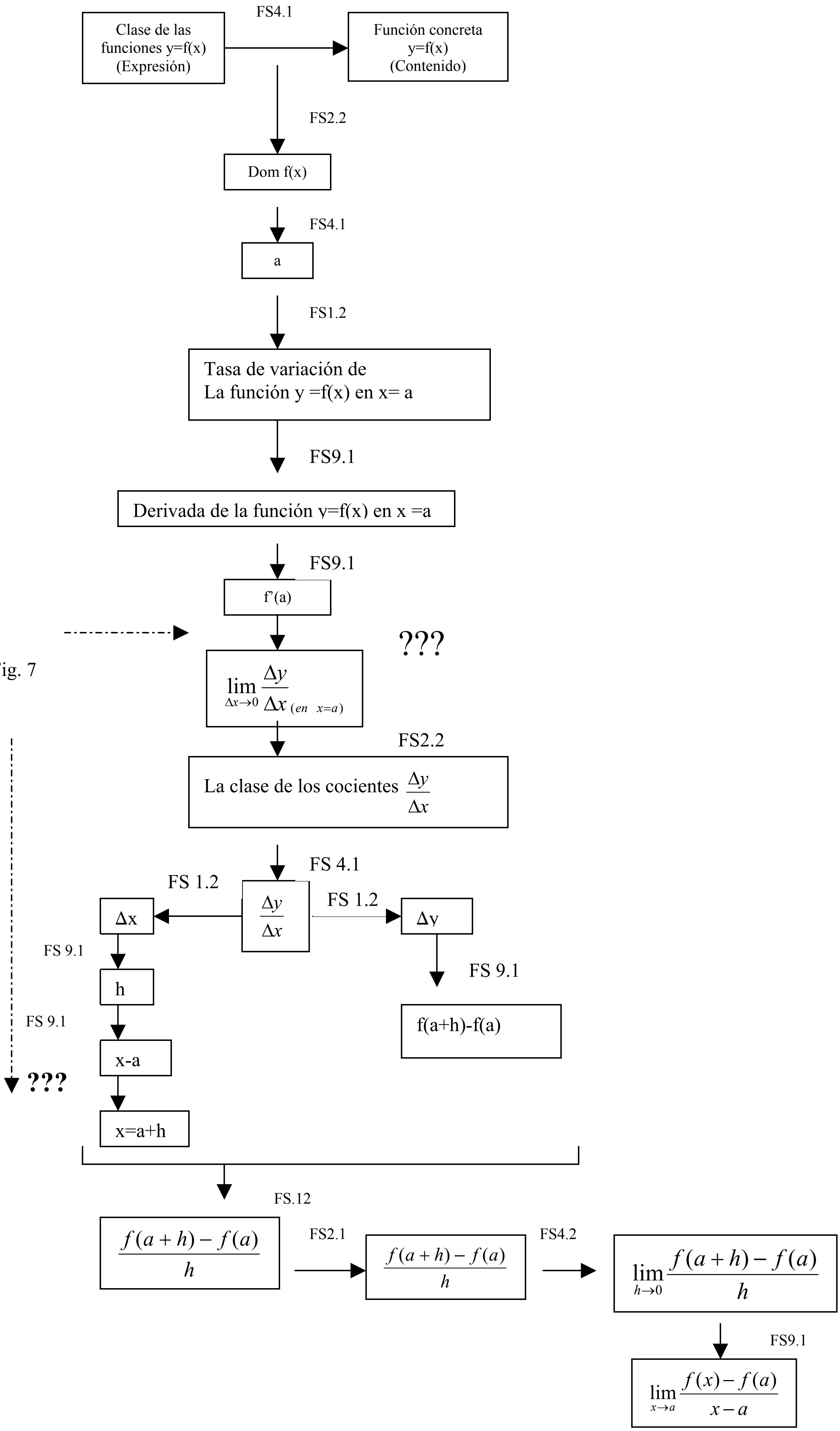

Clase de las funciones y=f(x) (Expresión)
FS4.1
Función concreta y=f(x) (Contenido)
FS2.2
Dom f(x)
FS4.1
a
FS1.2
Tasa de variación de La función y =f(x) en x= a
FS9.1
Derivada de la función y=f(x) en x =a
FS9.1
f'(a)
???
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}_{(en \quad x=a)}$
FS2.2
La clase de los cocientes $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
FS 4.1
FS 1.2
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
FS 1.2
Δx
Δy
FS 9.1
h
FS 9.1
f(a+h)-f(a)
FS 9.1
x-a
???
x=a+h
FS.12
$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
FS2.1
$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
FS4.2
$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
FS9.1
$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Fig. 7

- FS4.1: De la clase de todas las funciones se escoge un elemento, una función concreta, $y=f(x)$.
- FS2.2: Se relaciona un extensivo, la función $y=f(x)$, con una clase a la que no pertenece, su dominio.
- FS4.1: De la clase formada por todos los elementos del dominio *de* $f(x)$ se toma un elemento, el valor $x=a$.
- FS1.2: Se pone en relación el objeto $x=a$, perteneciente a la clase dominio de $f(x)$, con la tasa de variación de la función $y=f(x)$ en $x=a$ que es un elemento perteneciente a otra clase.
- FS9.1: Se asocia al extensivo tasa de variación de la función $y=f(x)$ *en* $x=a$ la notación derivada de la función $f(x)$ en el punto $x=a$.
- FS9.1: Se cambia la notación derivada de la función $f(x)$ en el punto $x=a$ por otra equivalente $f'(a)$.
- ???: A nuestro entender el texto no explica este paso de la *derivada de la función f(x) en el punto x=a al límite de los cocientes incrementales cuando incremento de x tiende a cero* con suficiente claridad.
- FS2.2: Se relaciona el objeto $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}_{(\text{en } x=a)}$ con una clase a la que no pertenece, la clase de los cocientes incrementales.
- FS4.1: De la clase de los cocientes incrementales se elige uno concreto, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- FS1.2: Se asocia al objeto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ perteneciente a la clase de los cocientes incrementales*, un objeto que no pertenece a esa clase*, Δx y Δy respectivamente.
- FS9.1: Se cambia la notación Δx por una equivalente, h. Y análogamente se reemplaza la notación Δy por $f(a+h)$-$f(a)$.
- FS9.1: Se cambia la notación h por otra equivalente, x-a.
- ???: Nos parece que este paso puede inducir a cierta confusión ya que *la letra x denota simultáneamente dos objetos distintos, x=a y x= a+h.*
- FS1.2: Se pone en relación el extensivo $x=a$ perteneciente a la clase dominio de *f(x)* con otro extensivo $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ que no pertenece a esa clase.
- FS2.1: Se asocia al objeto $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ su clase, la de todos los cocientes $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $\mathrm{h} \in R$.

- FS4.2: Se relaciona la clase de los cocientes $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $h \in R$ con el objeto $\lim_{h\to o}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ que no pertenece a esa clase.
- FS9.1: Se cambia la notación $\lim_{h\to o}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ por otra equivalente, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

En este libro de texto se define la derivada de una función en un punto usando la notación incremental pero sin seguir ninguna de las dos secuencias propuestas en el apartado 4.2. Esto genera algunos conflictos semióticos potenciales. En efecto, el análisis a priori con funciones semióticas nos muestra que hay dos funciones semióticas, representadas con interrogantes, que no son propiciadas explícitamente por los autores del texto y que, en nuestra opinión, se dejan a cargo del alumno como argumentamos a continuación.

Con relación a la función semiótica que hemos representado con los primeros interrogantes, hay que tener en cuenta que antes de esta definición, el texto sólo ha comentado "con palabras" en el apartado *Tasa de variación en un punto* (pág 221) que la tasa de variación de una función en un punto es el límite de las tasas medias de variación cuando Δx tiende a cero. Pasar de esta formulación a $f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}_{(en\ \ x=a)}$ en nuestra opinión es como si se definiera por primera vez la derivada en un punto $f'(a)$ como: $\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ en $x=a$

Creemos que el alumno sólo puede entender esta definición si por su cuenta construye implícitamente el objeto "función derivada" y lo evalúa en $x=a$.

No queda claro cuál es el motivo que tomaron en consideración los autores del texto para introducir la definición de derivada en un punto con la siguiente notación $f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}_{(en\ \ x=a)}$, y a continuación introducir otras dos notaciones equivalentes:

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}_{(en\ \ x=a)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Por este motivo nos preguntamos por qué razón los autores tienen interés en usar la notación incremental en esta definición.

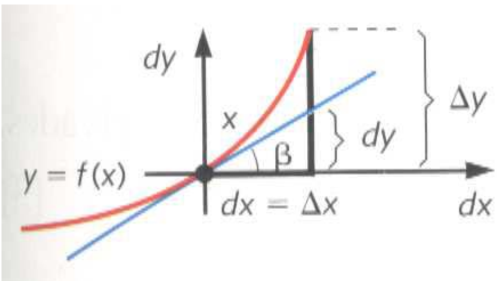
El objetivo principal de esta unidad didáctica es definir la *función derivada de una función*, calcular la derivada de las funciones elementales y obtener las reglas de derivación. Para definir la *función derivada de una función* (pág.225) los autores optan por definir primero la *derivada de una función en un punto* (pág.222) como *la tasa de variación de una función en un punto***.** A este último concepto se ha dedicado el apartado anterior (pág.221). Éste viene precedido a su vez por tres apartados en los que se ha trabajado la *velocidad media* (pág.219), la *tasa de variación media* (pág.220) y la *velocidad instantánea* (págs.220-221).

Es en el apartado *tasa de variación media* (pág.220) donde se definen los términos "incremento de la función en [a,b]" como $\Delta y = f(b)\text{-}f(a)$, "incremento de la variable x" como $\Delta x = b\text{-}a$ y el "cociente incremental":

$$\text{t.v.m..} = \frac{\Delta \text{y}}{\Delta \text{x}} = \frac{\text{f(a) - f(b)}}{\text{b - a}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = tg\alpha \ .$$

La notación incremental se usa en los dos apartados previos a la definición *derivada de una función en un punto* (pág.222): *Velocidad instantánea y Tasa de variación en un punto*.

En los apartados que siguen al de la definición de *derivada de una función en un punto* (pág.222) y preceden al de la definición de *función derivada de una función* (pág.225) esta notación no se usa. Pero vuelve a estar presente en la definición de *función derivada de una función* (pág.225). En el cuerpo central de la página la función derivada se define con la siguiente notación: $y' = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, mientras que en una columna lateral (margen izquierdo) que tiene por título *"La notación de Leibniz y las diferenciales"* a partir de la figura siguiente se identifica Δx con dx y se define la diferencial dy como $dy = f'(x)dx$ con lo que $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$



También se introduce la idea de que la diferencial dy, cuando Δx tiende a cero, es una buena aproximación del incremento de la función Δy. La notación diferencial de Leibniz vuelve a ser utilizada, siempre en una columna lateral, en los apartados *Derivadas sucesivas* (pág 225, margen izquierdo) y *Derivada de una función compuesta* (pág 228, margen izquierdo). Al final de la unidad en el apartado de *Problemas resueltos* (pág 233, problema n.º 5) hay un problema en el que se hace observar a los alumnos que la diferencial dy, cuando Δx tiende a cero, es una buena aproximación del incremento de la función Δy. Por último, en la página final en el apartado *Taller y biblioteca* (pág. 237) se halla una lectura que tiene por título ¿De dónde vienen los diferenciales?.

En nuestra opinión, los autores del texto podrían haber prescindido de la notación incremental en los primeros apartados de la unidad, y muy especialmente en la definición de *derivada de una función en un punto* (pág.222), retrasando la introducción de la notación incremental Δx, Δy y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hasta antes de la introducción de la notación diferencial para la función derivada (pág.225, margen izquierdo). Con relación a la notación $f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}_{(a\quad x=a)}$ podrían hacerlo después de haber definido la función derivada como $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (margen izquierdo de la página 225). Creemos que con este simple cambio su propuesta didáctica seguiría siendo básicamente la misma, pero en cambio podrían evitar el conflicto semiótico potencial que hemos comentado anteriormente.

También hay que hacer un comentario sobre el orden en que aparecen estas otras dos notaciones en la definición de *derivada de una función en un punto* (Pág.222):

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En nuestra opinión hubiera sido más coherente con los apartados anteriores del libro usar estas expresiones en el orden inverso,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ya que es precisamente este orden el que han seguido los autores del libro al definir la *tasa de variación media* (pág.220).

CONCLUSIONES

Como conclusión final queremos destacar que el conflicto semiótico causado por la introducción implícita de la función derivada en la definición de la derivada en un punto está muy relacionado con determinados usos de la notación incremental. Este conflicto semiótico está presente de manera marginal en las clases de matemáticas de Bachillerato del estado español, debido a que la notación incremental y la diferencial suelen tener un papel muy secundario en los libros de texto de matemáticas, pero está presente en el significado global de los alumnos por el uso que se hace de estas notaciones en las clases de Física. Este hecho nos lleva a suponer que este conflicto semiótico potencial puede tener una gran importancia en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas cuando los profesores que enseñan matemáticas sean profesores que tengan una formación inicial de ciencias o de ingeniería, o bien en aquellos países en los que la formación inicial de los profesores de matemáticas sea interdisciplinar tal como se muestra en un estudio con profesores de Colombia (Badillo 2003).

Notas finales

1

En Font (2000a) se describen los componentes (prácticas, notaciones, objetos, etc.) del significado a priori de la derivada y la trayectoria didáctica que lo convierte en significado a posteriori. La institución era en este caso, una clase de 1º de Bachillerato LOGSE (modalidad de ciencias y tecnología) de un Instituto de Educación Secundaria de la Comunitat Autònoma de Catalunya.

2

Los libros de texto que se citan son:

BESORA, J.; JANÉ, A.; GUITERAS, J.M. (1998). *Matemàtiques Batxillerat. Crèdits 1,2 i 3.* Madrid: Mc Graw Hill.

BESORA, J.; JANÉ, A.; GUITERAS, J.M. (1998). *Matemàtiques Batxillerat. Crèdits 4 5 i 6.* Madrid: Mc Graw Hill.

BUJOSA, J.M; CAÑADILLA, J.L.; FARGAS, M.; FONT, V. (1998). *Matemàtiques 1*. Barcelona: Castellnou

BUJOSA, J.M; CAÑADILLA, J.L.; FARGAS, M.; FONT, V. (1998). *Matemàtiques 2*. Barcelona: Castellnou

NEGRO, A.; BENEDICTO, C.; MARTÍNEZ, M. PONCELA, J.M. (1999). *Matemàtiques I.* Barcelona: Santillana.

NEGRO, A.; BENEDICTO, C.; MARTÍNEZ, M. PONCELA, J.M. (1999). *Matemàtiques II.* Barcelona: Santillana.

BIBLIOGRAFÍA

AZCÁRATE, C..; CASADEVALL, M.; CASELLES, E.; BOSCH, D. (1996). *Cálculo Diferencial e Integral*. Madrid. Síntesis.

BADILLO, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas en ejercicio de Colombia*. Tesis doctoral en curso. Universitat Autònoma de Barcelona

BOS, H.J.M., 1984. Newton, Leibniz y la tradición leibniziana. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (pp. 69-123). Grattan-Guinness (comp.). Madrid, Alianza Universidad.

CONTRERAS, A. (2002), *Aplicación de la teoría de las funciones semióticas (TFS) a la Didáctica del Análisis,* I Seminari d'investigació en didàctica de les matemàtiques aplicacions a la didáctica de l'anàlisi infinitesimal, Barcelona, pp. 1-21.

CONTRERAS, A.; FONT, V.; LUQUE, L.; ORDÓÑEZ, L. (2001), Un análisis semiótico de la noción de límite de una función, *V Simposio del Seminario Español de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, Almería, pp. 217-218. [URL: http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Almeria/Actas_Almeria.pdf]

CONTRERAS, A.; FONT, V. (2002), ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica?, *XVIII Congreso del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Castellón (España), pp. 1-21.

FONT, V. (2000a), *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques*. *Aplicacions a les derivades*. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona.

FONT, V. (2000b): Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. El caso de la función seno. *Revista Uno, 25*, pp. 21-40

FONT, V. (2000c): Representaciones ostensivas activadas en prácticas de justificación en instituciones escolares de enseñanza secundaria, *La lettre de la Preuve*, pp. 1-21. [URL: http://www.didactique.imag.fr/preuve/Resumes/Font/Font00.pdf]

GODINO, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22 (2/3) (en prensa).

GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14(3), pp. 325-355.

GODINO, J.D. y BATANERO, C. (1998), Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, *IX Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIEM) de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática*, Guimaraes (Portugal).

INGLADA, N.; FONT, V. (2002). Le rôle des livres de texte comme médiateurs d'activation de la connaissance mathématique commune. Le cas des dérivées des fonctions élémentaires. Actas *CIEAEM 54* (en prensa).

LUQUE, L. y CONTRERAS, A. (2001), *Una aproximación al análisis semiótico del límite de una función en un punto*, Memoria presentada por el doctorando Lorenzo Luque Cañada para la evaluación del Curso de Doctorado: (Dr. Godino), Universidad de Granada.

ORDÓÑEZ, L. y CONTRERAS, A. (2001), *Un acercamiento al estudio semiótico de la integral definida*, Memoria presentada por la doctoranda Lourdes Ordóñez Cañada para la evaluación del Curso de Doctorado: (Dr. Godino), Universidad de Granada.

ORDÓÑEZ, L.; CONTRERAS, A.; GARCÍA, M.; LUQUE, L., (2002), Significado institucional de la Integral, *X Congreso Thales sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, El Ejido (Almería, España), pp. 1-11.