

## Grupos

### Ejercicio 1: Definiciones básicas

Demuestra las identidades (i)  $e^{-1} = e$ ; (ii)  $a^{-1}a = e$ ; (iii)  $ea = a \forall a \in G$  a partir de los axiomas de grupo. Demuestra que  $e$  y  $a^{-1}$  son únicos y que  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

### Ejercicio 2: El grupo $S$

$S$  es el conjunto de las matrices  $2 \times 2$  de determinante unidad:

$$A = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}, wz - xy = 1.$$

Demuestra que  $S$  con la multiplicación usual de matrices es un grupo. Encuentra los elementos de orden 2. Prueba que un elemento tiene orden 3 si  $w + z + 1 = 0$ .

### Ejercicio 3: Tabla de multiplicar de un grupo

Encuentra la tabla de multiplicar del grupo  $G = \{1, 2, 3, 4\}$  con la operación producto módulo 5 (se divide el resultado por 5 y se toma el resto). ¿Es  $G$  isomorfo a  $D_2$  o a  $C_4$ ?

### Ejercicio 4: Clases de conjugación

Demuestra que cada elemento de un grupo pertenece a una clase y sólo a una, y que la identidad forma una clase de conjugación por sí misma.

### Ejercicio 5: Clases y subgrupos invariantes

Enumera los subgrupos y las clases del grupo  $S_4$ . Encuentra sus subgrupos invariantes y sus grupos cocientes. ¿Es un grupo simple o semisimple?

### Ejercicio 6: Producto directo y grupos cociente

Prueba que  $G = H_1 \otimes H_2$  implica que  $G/H_1 \simeq H_2$  y  $G/H_2 \simeq H_1$ .

### Ejercicio 7: Grupo diédrico $D_4$

El grupo diédrico  $D_4$  se compone de las simetrías de un cuadrado (rotaciones centrales y reflexiones respecto a los ejes vertical, horizontal y diagonales). Encuentra los elementos del grupo, las clases, los subgrupos y los subgrupos invariantes. Identifica los grupos cocientes. ¿Es  $D_4$  el grupo producto directo de alguno de sus subgrupos?

### Ejercicio 8: Generadores

Encuentra un conjunto mínimo de generadores de  $S_n$ .

### Ejercicio 9: Ciclos

Demuestra que todo grupo de orden  $n$  primo es isomorfo a  $C_n$ .