Rotaciones en un espacio 3-dimensional: SO(3)

Ejercicio 1: Álgebra de SO(3)

Un modo alternativo de escribir el álgebra de SO(3) puede obtenerse definiendo $J^{kl} = \epsilon^{klm} J_m$ como generador para las rotaciones en el plano $k-l$ (nota que $J^{12} = J_3$, etc). Muestra que

$$[J^{kl}, J^{mn}] = i(\delta^{km} J^{ln} - \delta^{kn} J^{lm} - \delta^{lm} J^{kn} + \delta^{ln} J^{km}) \ .$$

Aunque esta forma puede parecer menos compacta, se generaliza con más facilidad a $3+n$ dimensiones.

Ejercicio 2: Casimir

Verifica que $[J^2, J_l] = 0$ para $l = 1, 2, 3$ usando el álgebra de SO(3).

Ejercicio 3: Generadores y matrices de rotación

Halla los generadores y las matrices de rotación de las irreps con $j = \frac{1}{2}$ y $j = 1$.

Ejercicio 4: Representación con $j = 1$

Demuestra que las matrices

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} ; \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

están relacionadas con

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

mediante una transformación de semejanza.

Ejercicio 5: Coeficientes de Clebsch-Gordan

Calcula los coeficientes de Clebsch-Gordan para el producto de las representaciones de espines $j_1 = 1$ y $j_2 = 1/2$.

Ejercicio 6: Matrices de rotación

Utilizando el producto tensorial de representaciones de SU(2) encuentra las matrices de rotación de la representación de espín $j = 3/2$.