Examen de Matemáticas Empresariales II
8 de Julio de 2002

Primera Pregunta: (1.5 puntos)

Aproxima por la regla de los trapecios en 5 intervalos

$$\int_{-0,5}^{1} (3x^2 - 1)\, dx,$$

y calcula el valor exacto.

Primero construimos la partición con $n = 5$:

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n} = i\,\frac{1-(-0,5)}{5} = i\,0,3; \qquad \Rightarrow \Delta = \{\,-0'5 < -0'2 < 0,1 < 0'4 < 0,7 < 1\},$$

y a continuación hacemos la tabla para aplicar la regla de los trapecios:

x_i	$-0,5$	$-0,2$	$-0,1$	$0,4$	$0,7$	1
$3{x_i}^2 - 1$	$-0,25$	$-0,88$	$-0,97$	$-0,52$	$0,47$	2
Trapecios	$\times 1$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 1$
$\left(\frac{b-a}{2n}\right)\ \frac{1,5}{10}$	$-0,25$	$-1,76$	$-1,94$	$-1,04$	$0,94$	2

y deducimos que la aproximación es

$$\int_{-0,5}^{1} (3x^2 - 1)\, dx, \simeq \frac{1,5}{10}\Big(-0,25 - 1,76 - 1,94 - 1,04 + 0,94 + 2\Big) = -0,3075.$$

Segundo hacemos el cálculo exacto aplicando la Regla de Barrow:

$$\int_{-0,5}^{1} (3x^2 - 1)\, dx = \Big[x^3 - x\Big]_{-0,5}^{1} = 0 - 0,375 = -0,375.$$

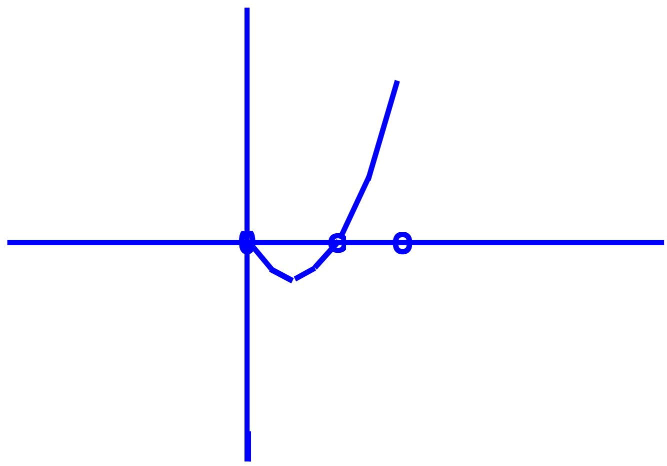
Segunda Pregunta: (1.5 puntos)

Calcula $\displaystyle\int_0^2 |x^2 - x|\, dx,.$

Lo primero es reescribir la función $|x^2 - x|$ para que no aparezcan los valores absolutos. Para ello primero buscamos los ceros de $x^2 - x$:

$$x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ x = 1, \end{cases}$$

y luego estudiamos el signo de la función $x^2 - x$ a la izquierda y derecha de cada cero en el intervalo que nos interesa $[0, 2]$. En este caso:



$$\begin{cases} x^2 - x \le 0 & \text{si} \;\; 0 \le x \le 1, \\ x^2 - x \ge 0 & \text{si} \;\; 1 \le x \le 2, \end{cases} \quad \text{de donde:} \quad |x^2 - x| = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si} \;\; 0 \le x \le 1, \\ x^2 - x & \text{si} \;\; 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Por lo tanto la integral pedida debe ser calculada en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x^2 - x|\, dx &= \int_0^1 (-x^2 + x)\, dx + \int_1^2 (x^2 - x)\, dx \\ &= \Big[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big]_0^1 + \Big[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \Big]_1^2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1. \end{aligned}$$

Tercera Pregunta: (1+1.5 puntos)

a) Las funciones $F(x) = \dfrac{4+2x^3}{1+x^3}$ y $G(x) = \dfrac{1-x^3}{1+x^3}$, ¿Son primitivas de la misma función? Razona la respuesta.

b) Calcula $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x^2 \, dx$.

---

a) Recordamos que, en general, una función $F(x)$ es primitiva de otra $f(x)$ cuando se cumple $F'(x) = f(x)$ en todo su intervalo de definición.
Por lo tanto, podemos deducir que, en cualquier caso:

$F(x)$ es una primitiva de $F'(x)$ y

$G(x)$ es una primitiva de $G'(x)$,

así, preguntar si son primitivas de una misma función es lo mismo que preguntar si las funciones $F'(x)$ y $G'(x)$ coinciden. Hacemos el cálculo y deducimos que:

$$F'(x) = \frac{-6\,x^2}{(1+x^3)^2}, \qquad G'(x) = \frac{-6\,x^2}{(1+x^3)^2}.$$

Como obtenemos la misma función, afirmamos con seguridad que $F(x)$ y $G(x)$ sí son primitivas de la misma función y además que esta función es $\frac{-6\,x^2}{(1+x^3)^2}$.

b) Proponemos dos formas de hacer la integral definida que se nos pide:

Forma 1: (cambio de variable + integración por partes)

$$\int x^3 \operatorname{sen} x^2 \, dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ \Rightarrow dt = 2x\,dx \\ \text{ó } x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int t \operatorname{sen} t \, dt = \left[\begin{array}{ll} u = t & \Rightarrow du = dt \\ dv = \operatorname{sen} t\,dt & \Rightarrow v = -\cos t \end{array} \right] =$$

$$\frac{1}{2}(-t\,\cos t) + \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{-t\,\cos t + \operatorname{sen} t}{2} + C = \frac{-x^2\,\cos x^2 + \operatorname{sen} x^2}{2} + C.$$

Forma 2: (sólo integración por partes, ver ejercicio 5.1) relación 1)

1) $$\int x^3 \operatorname{sen} x^2 \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = x \operatorname{sen} x^2 dx & \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos x^2 \end{array} \right] = -\frac{1}{2}\,x^2 \cos x^2 + \int x\,\cos x^2\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,x^2 \cos x^2 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C = \frac{-x^2\,\cos x^2 + \operatorname{sen} x^2}{2} + C.$$

Cuarta Pregunta: (2 puntos)

Integrar $x\,y' = x - 1 + e^{-y}$ mediante la sustitución $y = \ln\left(\frac{z}{x}\right)$

Primero derivamos el cambio propuesto para obtener y' en función de z':

$$y = \ln\left(\frac{z}{x}\right) = \ln(z) - \ln(x), \;\Rightarrow\; y' = \frac{z'}{z} - \frac{1}{x} = \frac{x\,z' - z}{x\,z},$$

y ahora "enchufamos"tanto el valor de y como el de y' en la ecuación para obtener:

$$x\;\frac{\overbrace{x\,z' - z}^{y'}}{x\,z'} = x - 1 + e^{-\overbrace{\ln\left(\frac{z}{x}\right)}^{y}}.$$

A continuación simplemente simplificamos la ecuación que nos ha quedado, ahora para la nueva función incógnita $z = z(x)$.

$$\frac{x\,z' - z}{z} = x - 1 + e^{-\ln\left(\frac{z}{x}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x\,z'}{z} - 1 = x - 1 + \frac{x}{z}$$

$$\Downarrow$$

$$x\,z' = x\,z + x \qquad \Rightarrow \qquad \underline{z' = z + 1} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{z+1}\,\frac{dz}{dx} = 1.$$

Resolvemos la ecuación obtenida $z' = z + 1$ por variables separadas:

$$\int \frac{1}{z+1}\,dz = \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln(z+1) = x + C \quad \Rightarrow \quad z = e^{x+C} - 1 \equiv Ce^x - 1.$$

Deshaciendo finalmente la sustitución, obtenemos la solución "y":

$$y = \ln\left(\frac{z}{x}\right) = \ln\left(\frac{Ce^x - 1}{x}\right).$$

Quinta Pregunta: (2.5 puntos)

Calcula la función de acumulación de $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 3-2x & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

Recordamos en primer lugar la definición de función de acumulación: $F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$. A continuación, como sabemos, la función de acumulación conviene definirla distinguiendo los mismos trozos en que f está definida; así obtenemos:

$$\text{si } 0 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \int_0^x y^2\,dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{x^3}{3},$$

en el segundo trozo tenemos precaución de descomponer el intervalo y usar en cada trozo la expresión correcta de $f(y)$,

$$\begin{aligned} \text{si } 1 \leq x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad F(x) &= \int_0^1 y^2\,dy + \int_1^x 3-2y\,dy = \frac{1}{3} + \Big[3y - y^2\Big]_0^x \\ &= \frac{1}{3} + \Big((3x - x^2) - (3-1)\Big) = 3x - x^2 - \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la función de acumulación queda dada por la expresión:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\[2ex] 3x - x^2 - \dfrac{5}{3} & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$