

MODELOS LINEALES
Segunda Relación de Problemas

1. Una compañía de energía eléctrica desarrolló un modelo empírico para el consumo de energía (en Kilowatios por día) en función de la temperatura (medida en grados centígrados) media diaria durante los meses de invierno. Para un periodo de 9 días se obtuvo la información siguiente:

Temperatura	0	2	4	8	13	-4	-6	-8	-11
Consumo	70	79	67	66	63	97	82	90	107

- a) Con estos datos, determinar la nube de puntos. ¿Sugieren una asociación de tipo lineal?
 - b) Obtener la ecuación estimada de regresión y dibujarla sobre la nube de puntos obtenida anteriormente.
 - c) Interpretar los coeficientes de regresión estimados.
 - d) Obtener la varianza residual.
 - e) Calcular los estimadores de las desviaciones típicas de los estimadores de la pendiente y la ordenada en el origen.
 - f) Calcular el coeficiente de determinación.
 - g) Obtener un intervalo de confianza del 95 % para el valor real de la pendiente.
 - h) ¿Se puede considerar, al nivel $\alpha = 0.05$, que no hay relación lineal entre las variables estudiadas?
 - i) Para cada valor de temperatura, calcular los intervalos de confianza, a un nivel de confianza del 95 %, para la media del consumo de energía y representarlos gráficamente sobre la recta estimada.
2. Una compañía de seguros desea determinar el grado de relación que existe entre el ingreso familiar mensual, X (expresado en 10^2 euros.), y el montante anual del seguro de vida, Y (expresado en euros), del cabeza de familia. Con base en una muestra aleatoria de 10 familias, se obtuvo la siguiente información:

Ingreso	10	10	15	20	20	25	25	30	30	30
Seguro	77	73	80	90	120	144	114	132	150	180

- a) ¿Cabe pensar en una relación lineal del montante del seguro de vida sobre los ingresos mensuales del cabeza de familia? En tal caso determinar el modelo de regresión lineal simple correspondiente.
- b) Construir la tabla ANOVA de la regresión y realizar el contraste de regresión a través de ella al 5 % de significación.
- c) Determinar intervalos de confianza al 95 % para todos los parámetros del modelo.
- d) Calcular la bondad del ajuste y estudiar, si procede, las causas de la falta de ajuste.
- e) ¿Puede admitirse al nivel de significación del 5 % que una disminución de 200 euros en los ingresos mensuales del cabeza de familia produce una disminución de 10 euros en el montante del seguro de vida?
- f) Obtener las predicciones del montante del seguro de vida para un ingreso mensual de 2800 euros y obtener el intervalo de confianza, al 95 %, para dicha predicción y para su valor medio.

3. La tabla siguiente presenta los valores observados de un índice de rendimiento, Y, en un proceso químico, en función de una medida de la concentración de una de las materias primas utilizadas, X. El experimento ha consistido en obtener 4 valores de Y para cada uno de los tres valores de X distintos.

Valores de X			
Valores de Y	20	22	24
130	110	105	
126	121	107	
122	120	109	
140	112	120	

- a) Calcular una recta de regresión que permita estimar el valor medio de la variable Y para cada valor de la variable X, así como una medida del error experimental, o sea, la varianza residual.
 - b) Construir intervalos de confianza al 95 % para los parámetros del modelo.
 - c) Contrastar si puede admitirse que un aumento de dos unidades en la concentración produce 6 unidades de disminución en el rendimiento.
 - d) Contrastar la hipótesis de linealidad para un nivel de significación $\alpha = 0.05$
4. Los datos de la tabla representan las calificaciones promedio X de 7 recién graduados y sus respectivos salarios mensuales Y, en 10^2 euros.

X	2	2	2.5	3	3	3.25	3.5
Y	10	11	12	12	12	13	14

- a) Obtener la ecuación de regresión de Y sobre X.
 - b) Interpretar los coeficientes de regresión estimados.
 - c) Determinar el valor de la varianza residual.
 - d) Calcular e interpretar el coeficiente de determinación.
 - e) Calcular las estimaciones de las varianzas de los estimadores de la pendiente y la ordenada en el origen.
 - f) Estimar la media de la distribución de los salarios cuando la calificación es de 3.25. Dar una medida de la precisión de tal estimación.
 - g) Predecir el salario inicial para un estudiante con una calificación de 3.25 y estimar la desviación típica de tal predicción.
 - h) Calcular intervalos de confianza, al 95 %, para los parámetros del modelo.
 - i) Contrastar la hipótesis nula de que no existe una relación lineal entre ambas variables, a un nivel de significación $\alpha = 0.05$.
 - j) Determinar un intervalo de confianza al 95 % para la media del salario inicial de un recién graduado con una calificación promedio 2.8.
 - k) Determinar un intervalo de confianza al 95 % para la predicción del salario inicial de un recién graduado con una calificación promedio 2.8.
5. Los siguientes datos representan las calificaciones de Química (Y) para una muestra de 6 estudiantes de primer año de una institución de enseñanza superior, junto con sus calificaciones en un test de inteligencia (X) realizado cuando aún cursaban el último año de secundaria:

X	50	55	65	70	55	65
Y	74	80	90	98	76	95

- a) Calcular la recta de regresión de Y sobre X.
- b) Determinar los intervalos de confianza al 95 % para los parámetros del modelo.
- c) Calcular el coeficiente de determinación e interpretar el resultado.
- d) Realizar el contraste sobre la bondad de este ajuste, a un nivel de confianza $\alpha = 0.05$.
- e) Contrastar, a un nivel de confianza del 5 %, si puede admitirse que un aumento de 2.5 unidades en la calificación del test de inteligencia produce un aumento de 2 unidades en la calificación de Química.
- f) Estimar el valor medio de la variable dependiente para un valor de la variable explicativa igual a 72.5 y obtener un intervalo de confianza al 95 % para dicho valor.
6. Tras cinco años de funcionamiento se ha observado, en una piscifactoría, el crecimiento de la población de truchas, obteniéndose la siguiente información
- | | | | | | |
|--------------------|---|----|----|----|----|
| Año | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Truchas (en miles) | 2 | 12 | 34 | 50 | 68 |
- a) Obtener la ecuación estimada de regresión del número de truchas sobre la variable temporal años transcurridos.
- b) Determinar la tabla ANOVA. ¿Puede admitirse, al nivel $\alpha = 0.05$, que no hay relación lineal entre el número de truchas y los años transcurridos?
- c) Dar un intervalo de confianza, al nivel de confianza $1 - \alpha = 0.95$, para la varianza de las perturbaciones.
- d) Predecir la cantidad de truchas en la piscifactoría transcurridos 2 años y nueve meses. Dar un intervalo de confianza, al nivel de confianza $1 - \alpha = 0.95$, para tal predicción.
7. En el Instituto Politécnico de Virginia se realizó un experimento en el cual se expusieron 12 ratones, divididos en 4 grupos de igual tamaño, a diferentes dosis de un pesticida, estando uno de los grupos libre de dicho producto. A cada individuo de cada grupo le fue tomada una medida de la actividad neuronal para comprobar el supuesto de que dicha actividad decrece con dosis altas del pesticida. Los datos tomados fueron los siguientes

Dosis	Actividad Neuronal		
0	10.9	10.6	9.8
2.4	11	11.3	9.2
4.6	10.6	10.4	11.1
9.2	9.7	7.8	8.2

- a) Determinar la ecuación de decrecimiento lineal de la actividad neuronal cuando aumenta la dosis del pesticida.
- b) Determinar, al nivel de significación $\alpha = 0.05$, si se puede admitir que la relación entre ambas variables es lineal.
- c) ¿A qué razón es debida el valor del coeficiente de determinación?

- d) ¿Qué actividad neuronal media cabe esperar si la dosis del pesticida es de 7? Estudiar, con una confianza del 95 %, la precisión de la estimación de ese valor medio.
8. Galton estudió en 1877 la relación entre el diámetro de los guisantes (X) y el diámetro medio de sus descendientes (Y) con los resultados siguientes:

D. Padres	21	20	19	18	17	16	15
D. Descendientes	17.26	17.07	16.37	16.4	16.13	16.17	15.98

- a) ¿Cabe pensar en una asociación lineal entre el diámetro de los descendientes y sus progenitores? En caso afirmativo determinar el modelo de regresión lineal de Y sobre X .
- b) Interpreta el valor de la pendiente estimado. Obtén un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para su valor real.
- c) ¿Puede considerarse, al nivel $\alpha = 0.05$, que no hay relación lineal entre las variables consideradas? Construye la tabla ANOVA y relaciona este resultado con las conclusiones anteriores.
- d) Calcula el diámetro medio previsto para un guisante cuyo progenitor tuviera un diámetro de 18.5. Da una estimación del error para tal predicción.