

Problemas resueltos. Temas 10 y 11

1- las puntuaciones en un test que mide la variable creatividad siguen, en la población general de adolescentes, una distribución Normal de media 11,5. En un centro escolar que ha implantado un programa de estimulación de la creatividad una muestra de 30 alumnos ha proporcionado las siguientes puntuaciones:

11, 9, 12, 17, 8, 11, 9, 4, 5, 9, 14, 9, 17, 24, 19, 10, 17, 17, 8, 23, 8, 6, 14, 16, 6, 7, 15, 20, 14, 15.

A un nivel de confianza del 95% ¿Puede afirmarse que el programa es efectivo?

Solución:

1° $H_0 \mu = 11,5$

2° $H_1 \mu > 11,5$

3° El estadístico de contraste en este caso es: $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$

4° La media muestral es 12,47 y la desviación típica de la muestra es 5,22, sustituyendo en el estadístico estos valores se obtiene:

$$t = \frac{12,47 - 11,5}{\frac{5,22}{\sqrt{29}}} = 1,00$$

5° Como el contraste es unilateral, buscamos en las tablas de la t de Student, con 29 grados de libertad, el valor que deja por debajo de sí una probabilidad de 0,95, que resulta ser 1,699

6° El valor del estadístico es menor que el valor crítico, por consiguiente se acepta la hipótesis nula.

7° La interpretación sería que no hay evidencia de que el programa sea efectivo.

2- En una muestra de 1000 nacimientos el número de varones ha sido 542 ¿Puede considerarse, con un nivel de significación del 10%, que en general nacen más niños que niñas?

Solución:

1° La hipótesis nula sería que nacen igual número de niños que de niñas, o lo que es lo mismo que la proporción de niños nacidos es igual 1/2.

- Por consiguiente: $H_0 \quad P = 0,5$
- 2° $H_1 \quad P > 0,5$
- 3° El estadístico de contraste es :
$$\frac{p - P_0}{\sqrt{\frac{P_0 \cdot Q_0}{n}}}$$
- 4° Como la proporción muestral es $542/1000 = 0,542$, sustituyendo se obtiene el valor del estadístico:
- $$\frac{0,542 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{1000}}} = 2,66$$
- 5° Como el contraste es unilateral, buscamos en las tablas de la Normal el valor de la variable que deja por debajo de sí una probabilidad de 0,9, este valor es 1,282.
- 6° El valor del estadístico 2,66 es mayor que el valor crítico 1,282 por consiguiente, se rechaza la hipótesis nula.
- 7° Efectivamente, nacen en mayor proporción niños que niñas.

3- En una muestra de 66 alumnos se ha calculado el coeficiente de correlación de Pearson entre sus puntuaciones en el primer parcial de Análisis de Datos y el tiempo que se emplea en desplazarse desde su domicilio hasta la Facultad, obteniéndose que r vale 0,24. Podemos mantener, con un nivel de confianza del 95%, la idea de que estas variables son incorreladas, o por el contrario debemos rechazarla.

Solución:

- 1° $H_0 \quad \rho = 0$
- 2° $H_1 \quad \rho \neq 0$
- 3° El estadístico de contraste es: $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$
- 4° Sustituyendo tenemos:
- $$\frac{0,24\sqrt{64}}{\sqrt{1-0,0576}} = 1,98$$
- 5° El contraste es bilateral, por ello buscamos en las tablas de la t de Student, con 60 grados de libertad (el valor más próximo a 64 que figura en nuestras tablas), el valor que deja

por debajo una probabilidad de 0,975 que es 2. Por tanto la región de aceptación será el intervalo $(-2, 2)$.

6° El valor del estadístico pertenece a la región de aceptación, por consiguiente se acepta la hipótesis nula.

7° No existe correlación entre ambas variables, de donde se deduce que el tiempo empleado no influye en la calificación.

4- Las puntuaciones en un test de razonamiento abstracto siguen una distribución Normal de media 35 y varianza 60. Para evaluar un programa de mejora de las capacidades intelectuales, a 101 individuos que están realizando este programa se les pasa el test, obteniéndose una media de 50 puntos y una varianza de 80 ¿Puede asegurarse, a un nivel de confianza del 90%, que el programa incrementa las diferencias individuales en esta variable?

Solución:

1° $H_0 \quad \sigma^2 = 60$

2° $H_1 \quad \sigma^2 > 60$

3° El estadístico de contraste es:

$$\frac{nS^2}{\sigma_0^2}$$

4° Sustituyendo en el estadístico obtenemos:

$$\frac{101 \cdot 80}{60} = 134,7$$

5° Como el contraste es unilateral buscamos en las tablas de la Ji-cuadrado, con 100 grados de libertad, el valor de la variable que deja por debajo de sí una probabilidad de 0,9, este valor es 118,5.

6° El valor del estadístico es mayor que el valor crítico, por consiguiente se rechaza la hipótesis nula.

7° En efecto, la varianza es significativamente mayor lo que indica que ha aumentado la dispersión de la puntuaciones lo que indica que se han incrementado las diferencias entre los individuos.

5- Las notas obtenidas en Análisis de Datos de 5 individuos elegidos al azar del grupo T1 y de 6 individuos, elegidos también al azar, del grupo T2 son las siguientes:

T1	10	6	4	5	4	
T2	4	8	6	6	2	3

¿Puede concluirse a un nivel de confianza del 95% que las puntuaciones medias de ambos grupos son iguales? o por el contrario que hay diferencia entre ambas.

Solución:

1° $H_0 \mu_1 = \mu_2$

2° $H_1 \mu_1 \neq \mu_2$

3° El estadístico de contraste en este caso es:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

4° La muestra del grupo T1 tiene una media de 5,8 y una varianza de 4,96. En la muestra del grupo T2 la media es 4,83 y la varianza 4,14 sustituyendo en el estadístico estos valores se obtiene:

$$t = \frac{5,8 - 4,83}{\sqrt{\frac{5 \cdot 4,96 + 6 \cdot 4,14}{5 + 6 - 2} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right)}} = 0,68$$

5° Como el contraste es bilateral, buscamos en las tablas de la t de Student, con 9 grados de libertad, el valor que deja por debajo de sí una probabilidad de 0,975, que resulta ser 2,262

6° El valor del estadístico es menor que el valor crítico, por consiguiente se acepta la hipótesis nula.

7° La interpretación sería que no hay evidencia de diferencias significativas entre ambos grupos.

6- Para comprobar la utilidad de una técnica de enriquecimiento motivacional un investigador pasa una prueba de rendimiento académico a una muestra de 16 sujetos. Después aplica su técnica de enriquecimiento y tras ello, vuelve a pasar la prueba de rendimiento. Los resultados fueron los siguientes:

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°
----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

8	12	14	11	16	6	11	9	10	10	19	12	17	8	13	12
9	16	23	21	17	10	14	8	11	12	19	16	16	13	17	11

A un nivel de confianza del 95%, ¿Podemos rechazar que los rendimientos académicos son iguales antes que después frente a la alternativa de que se produce una mejora?

Teniendo en cuenta que los sujetos son los mismos en ambas muestras se trata de un contraste de igualdad de medias con datos emparejados, por consiguiente:

Solución:

1° $H_0 \mu_d = 0$

2° $H_1 \mu_d > 0$

3° El estadístico de contraste en este caso es:

$$t = \frac{\bar{x}_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n-1}}}$$

4° En primer lugar calculamos las diferencias muestrales

Pre	8	12	14	11	16	6	11	9	10	10	19	12	17	8	13	12
Pos	9	16	23	21	17	10	14	8	11	12	19	16	16	13	17	11
Dif.	1	4	9	10	1	4	3	-1	1	2	0	4	-1	5	4	-1

La media de las diferencias es 2,81 y la desviación típica 3,19, sustituyendo en el estadístico estos valores se obtiene:

$$t = \frac{2,81}{\frac{3,19}{\sqrt{15}}} = 3,41$$

5° Como el contraste es unilateral, buscamos en las tablas de la t de Student, con 15 grados de libertad, el valor que deja por debajo de sí una probabilidad de 0,95, que resulta ser 1,753

6° El valor del estadístico es mayor que el valor crítico, por consiguiente se rechaza la hipótesis nula.

7° La interpretación sería que el programa es efectivo e incrementa el rendimiento académico.