Problemas Resueltos del Tema 1

1- Un estudiante responde al azar a dos preguntas de verdadero o falso. Escriba el espacio muestral de este experimento aleatorio.

Solución.

El espacio muestral es el conjunto de todos los sucesos elementales. Los sucesos elementales son cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio, indescomponibles en otros más simples. Como el experimento consiste en responder al azar a dos preguntas, cada uno de los posibles patrones de respuesta constituirá un suceso elemental. Un patrón de respuesta sería contestar verdadero a la primera pregunta y verdadero a la segunda, lo representamos (V, V). Con esta representación podemos escribir el espacio muestral como:

$$E = \{(V, V)\ (V, F)\ (F, V)\ (F, F)\}$$

2- Otro estudiante responde al azar a 4 preguntas del mismo tipo anterior.

a) Escriba el espacio muestral.
b) Escriba el suceso responder "falso" a una sola pregunta.
c) Escriba el suceso responder "verdadero" al menos a 3 preguntas.
d) Escriba la unión de estos dos sucesos, la intersección y la diferencia del 2º y el 1º.
e) La colección formada por estos 5 sucesos, más el suceso seguro y el suceso imposible ¿Constituyen un sigma-álgebra?

Solución

a) Con la misma convención del problema anterior, los sucesos elementales serían:

(V, V, V, V)	(V, V, V, F)	(V, V, F, V)	(V, F, V, V)
(F, V, V, V)	(V, V, F, F)	(V, F, V, F)	(V, F, F, V)
(F, V, V, F)	(F, V, F, V)	(F, F, V, V)	(V, F, F, F)
(F, V, F, F)	(F, F, V, F)	(F, F, F, V)	(F, F, F, F)

b) El Suceso responder falso a una sola pregunta será el subconjunto del espacio muestral formado por todos los sucesos elementales en que solo hay una respuesta falso, lo llamaremos A y será:

$$A = \{(V, V, V, F) \cup (V, V, F, V) \cup (V, F, V, V) \cup (F, V, V, V)\}$$

c) El suceso responder verdadero al menos a 3 preguntas, lo llamaremos B y será:

$$B = \{(V, V, V, F) \cup (V, V, F, V) \cup (V, F, V, V) \cup (F, V, V, V) \cup (V, V, V, V)\}$$

d) Observando los sucesos elementales que los componen se deducen inmediatamente los siguientes resultados:

$$A \cup B = B \qquad A \cap B = A \qquad B - A = \{(V, V, V, V)\}$$

e) La colección formada por el suceso A, el B, la unión de ambos, su intersección, y su diferencia, más el suceso seguro y el suceso imposible, no constituye un sigma-álgebra. Para demostrarlo basta comprobar que se incumple una de las dos condiciones. Por ejemplo, el suceso A incumple la segunda porque su contrario no pertenece a la colección.

3- Una rata es colocada en una caja con tres pulsadores de colores rojo, azul y blanco. Si pulsa dos veces las palancas al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces pulse la roja?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que pulse la primera vez o la segunda o ambas la tecla azul?

Solución

a) Para que las dos veces pulse la roja tiene que ocurrir que la primera vez pulse la roja y la segunda también pulse la roja, es decir que se verifique el suceso (R1 $\cap$ R2). Ahora bien , como ambos sucesos son independientes, la probabilidad de la intersección es igual al producto de las probabilidades de ambos sucesos. La probabilidad de estos sucesos se determina mediante la regla de Laplace de casos favorables (uno), partido por casos posibles (tres)

$$P(R1 \cap R2) = P(R1) \cdot P(R2) = 1/3 \cdot 1/3 = 1/9$$

b) En este apartado, claramente, nos piden la probabilidad de la unión de los sucesos pulsar azul la primera vez y pulsar azul la segunda. Ahora bien, estos dos sucesos no son incompatibles, luego la probabilidad de la unión será igual a la suma de las probabilidades menos la probabilidad de la intersección. La probabilidad de la intersección, al igual que en el apartado anterior, se calcula basándonos en el hecho de que son independientes.

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2) – P(A1 \cap A2) = 1/3 + 1/3 – 1/9 = 5/9$$

4- Como todo el mundo sabe, la probabilidad de que en una ruleta salga 10 veces seguidas el color rojo es muy pequeña. Habiendo salido 9 veces seguidas el rojo, un jugador apuesta al negro ¿Qué probabilidad tiene de ganar?

Solución

Para que el jugador gane tiene que ocurrir la secuencia R1, R2, ..., R9, N10. Como sabemos ya se ha producido R1, R2, ..., R9. La probabilidad que buscamos será la probabilidad de que salga negro en el décimo lanzamiento, condicionada por que haya salido rojo en las nueve anteriores. Por la definición de probabilidad condicionada:

$$P(N10 / R1 \cap R2 \cap ... \cap R9) = \frac{P(N10 \cap R1 \cap R2 \cap ... \cap R9)}{P(R1 \cap R2 \cap ... \cap R9)} = \frac{0{,}5^{10}}{0{,}5^{9}} = 0{,}5$$

Como vemos el hecho de que previamente haya salido nueve veces rojo no cambia la probabilidad de que salga la décima vez. Esto es así porque cada lanzamiento es independiente de los restantes. (Nota. En realidad la probabilidad de que salga rojo o negro en una ruleta no es exactamente 0,5, sino 18/37 ya que además de los 18 números rojos y los 18 negros, existe el cero que no tiene asignado color, pero este dato no cambia el razonamiento hecho y el resultado sería 18/37)

5- En una asignatura se ha decidido aprobar a aquellos que superen uno de los dos parciales. Con este criterio aprobó el 80%, sabiendo que el primer parcial lo superó el 60% y el segundo el 50% ¿Cuál hubiese sido el porcentaje de aprobados, si se hubiese exigido superar ambos parciales?

Solución

Sea A1 el suceso aprobar el primer parcial y A2 aprobar el segundo. Los datos del problema nos dicen que:

$$P(A1 \cup A2) = 0{,}8 \qquad P(A1) = 0{,}6 \qquad P(A2) = 0{,}5$$

Y se pide la probabilidad de la intersección de ambos sucesos. Como A1 y A2 no son incompatibles, la probabilidad de la unión será:

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2) - P(A1 \cap A2)$$

Despejando tenemos:

$$P(A1 \cap A2) = P(A1) + P(A2) - P(A1 \cup A2)$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$P(A1 \cap A2) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}8 = 0{,}3$$

La conclusión es que si se hubiese exigido aprobar los dos parciales el porcentaje de aprobados hubiese sido del 30%.

6- La probabilidad de resolver correctamente alguna de las dos versiones de la tarea de Martens es 0,45. La de resolver la 1ª es 0,40 y la de la 2ª 0,30 ¿La resolución de las dos versiones es independiente?

Solución

Sea V1 el suceso de resolver la primera versión y V2 resolver la segunda. Los datos del problema nos indican que:

$$P(V1 \cup V2) = 0{,}45 \qquad P(V1) = 0{,}4 \qquad P(V2) = 0{,}3$$

Para determinar si los sucesos son independiente, calcularemos la probabilidad se su intersección, de forma análoga al problema anterior, y comprobaremos si el valor obtenido es igual al producto de las probabilidades de estos dos sucesos.

$$P(V1 \cap V2) = P(V1) + P(V2) - P(V1 \cup V2)$$

Sustituyendo

$$P(V1 \cap V2) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}45 = 0{,}25$$

Por otra parte

$$P(V1) \cdot P(V2) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 \neq 0{,}25 = P(V1 \cap V2)$$

Luego, no son independientes.

7- La prevalencia de la diabetes es del 4%. La glucemia basal diagnóstica correctamente el 95% de los diabéticos, pero da un 2% de falsos positivos. Diagnosticada una persona ¿Cuál es la probabilidad de que realmente sea diabética?

Solución

Sea D el suceso de tener diabetes, ~D el suceso de no tenerla y Gl+ el suceso de dar positivo en la prueba de la glucemia basal. Los datos del problema nos dicen que:

$$P(D) = 0{,}04 \quad P(\sim D) = 0{,}96 \quad P(Gl+ / D) = 0{,}95 \quad P(Gl+ / \sim D) = 0{,}02$$

Entonces el teorema de Bayes, escrito en los términos de este problema nos dice que:

$$P(D/Gl+) = \frac{P(Gl+/D)\cdot P(D)}{P(Gl+/D)\cdot P(D) + P(Gl+/\tilde{D})\cdot P(\tilde{D})}$$

sustituyendo por los valores numéricos

$$P(D/Gl+) = \frac{0{,}95\cdot 0{,}04}{0{,}95\cdot 0{,}04 + 0{,}02\cdot 0{,}96} = \frac{0{,}038}{0{,}038 + 0{,}0192} = 0{,}664$$