

## Tema 11: BOSONES

- Gas ideal de bosones degenerado
- Condensación de Bose-Einstein
- Aplicación del gas de bosones: superfluidez del helio líquido, etc..

### Gas ideal de bosones degenerado

#### Introducción

Según vimos en el tema de gases ideales cuánticos, se sigue que, en el estudio de bosones juega un papel destacado —más que para fermiones, sometidos al PP— el n<sup>o</sup> medio de ocupación del estado de momento  $\vec{p}$  y tercera componente de espín  $\sigma$ ,  $\langle n_{p,\sigma} \rangle$ . Una expresión para este número puede obtenerse del potencial macrocanónico

$$VP(T, \mu) = kT \ln \Xi(T, V, \mu) = -\theta kT \sum_{p,\sigma} \ln \left[ 1 - \theta \exp \left( \frac{\mu - \epsilon_p}{kT} \right) \right]. \quad (46)$$

donde se tiene  $\theta = 1$  para bosones.

En efecto, dado que

$$N = kT \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \mu} = \sum_{p,\sigma} \langle n_{p,\sigma} \rangle$$

se sigue con facilidad para bosones (como ya vimos):

$$\langle n_{p,\sigma} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} - 1}$$

que expresa una cualidad esencial de la *distribución de Bose-Einstein*.<sup>129</sup>

Por otra parte, también sabemos que la ecuación de estado en forma paramétrica es (aparentemente!; ver luego)<sup>130</sup>

$$P(T, z) = kT \Lambda^{-3} Y(z)$$

$$n(T, z) = \Lambda^{-3} y(z)$$

donde  $z = e^{\mu/kT}$ ,  $\Lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi xmkT}}$ ,

$$Y(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\eta \frac{\eta^{3/2}}{z^{-1} e^\eta - 1},$$

y

$$y(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\eta \frac{\eta^{1/2}}{z^{-1} e^\eta - 1}$$

con

$$\eta \equiv \frac{\epsilon}{kT} = \frac{p^2}{2mkT}$$

---

<sup>129</sup>Puesto que este  $\langle n_{p,\sigma} \rangle$  es independiente de  $\sigma$ , estamos suponiendo que el estado de equilibrio es ‘no polarizado’, es decir, con el mismo # partículas en promedio con igual orientación de espín en cada nivel, de modo que el espín total en el gas es cero.

<sup>130</sup> $Y(Z)$  y  $y(z)$  se definen en términos de las funciones de Bose-Einstein definidas como

$$g_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1} e^x - 1} dx$$

de donde  $Y(z) = g_{5/2}(z)$  y  $y(z) = g_{3/2}(z)$

## Gas ideal de bosones degenerado

A temperaturas bajas y/o densidades altas, la simetría de la función de onda juega un papel esencial y se dice que el gas es degenerado. Vamos a ver las propiedades que se siguen de la ecuación de estado paramétrica en esta situación, para lo que estudiamos las funciones  $Y(z)$  y  $y(z)$ .

Notamos primero que<sup>131</sup>

$$y(z) = zY'(z).$$

Por otra parte, vimos en (en la lección de gases ideales cuánticos) que se tiene formalmente:

$$Y(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-5/2} z^m, \quad y(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2} z^m$$

El radio de convergencia de estas series es  $z = 1$ . De hecho, a diferencia del caso de fermiones, los integrandos arriba divergen (el denominador se hace cero) para  $e^\eta - z = 0$ , y ha de ser  $0 < \eta (= p^2/2mkT) < \infty$ , es decir,  $1 < e^\eta < \infty$ , luego sólo hay problemas para  $z > 1$ . Además, sólo interesan fugacidades reales y positivas, luego exigimos para bosones:<sup>132</sup>

---

<sup>131</sup>En efecto,

$$n = \left( \frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T = \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{\partial P}{\partial z} \frac{z}{kT}$$

y, sustituyendo aquí  $n = \Lambda^{-3} y$  y  $P = kT \Lambda^{-3} Y$ ,

$$\Lambda^{-3} y = kT \Lambda^{-3} \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{z}{kT} \implies y = \frac{\partial Y}{\partial z} z$$

<sup>132</sup>La fugacidad tiene un distinto significado para fermiones: los términos de esas series tienen entonces signo alternado de modo que, aunque el radio de convergencia es  $z = 1$  también, este punto no es una singularidad esencial, pues el denominador  $e^\eta + z$  no se anula, y las funciones para fermiones pueden continuarse analíticamente más allá de  $z = 1$  y existen para  $0 \leq z \leq \infty$ .

$$0 \leq z \leq 1$$

Estas funciones tienen para  $z = 1$  un valor finito que puede expresarse en términos de la función  $\zeta$  de Riemann:

$$Y(1) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-5/2} \equiv \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \simeq 1'342$$

$$y(1) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2} \equiv \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2'612$$

y se tiene también que la derivada de  $y(z)$  diverge en  $z = 1$ .<sup>133</sup>

$$y'(z = 1) = \infty.$$

Es decir,  $y(z)$  se mantiene por debajo de 2'612 para  $0 \leq z \leq 1$  y

---

<sup>133</sup>En efecto,

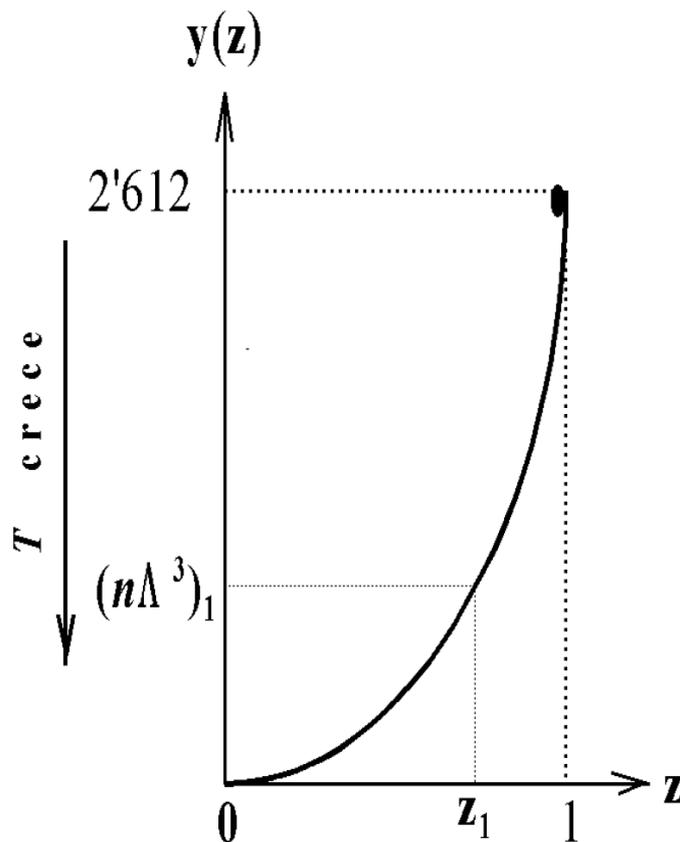
$$y'(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1/2} z^{m-1} \Rightarrow y'(1) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1/2} = \zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \infty,$$

puesto que

$$\begin{aligned} \zeta\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{1^{1/2}} + \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{3^{1/2}} + \frac{1}{4^{1/2}} + \dots \\ &> \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \rightarrow \infty \end{aligned}$$

es mayor que la armónica, puesto que  $0 < \sqrt{x} < x$ . y la armónica diverge (a pesar de que  $a_n \rightarrow 0$ )

tiene la forma de la figura:<sup>134</sup>



Notemos el siguiente comportamiento:

- De la ecuación de estado:  $n\Lambda^3 = y(z)$ , donde  $\Lambda^3 \sim T^{-3/2}$ , luego  $y \sim nT^{-3/2}$ ; es decir, el sentido de las  $T$ 's crecientes es el indicado en la figura ( $y$  disminuye).
- Sean valores dados de  $n$  y  $T$  que implican  $(n\Lambda^3)_1$  y el  $z_1$  correspondiente.
- Si, manteniendo  $n = \text{cte}$ ,  $T$  disminuye,  $n\Lambda^3$  crece y también  $z$  hasta  $z = 1$ .
- En  $z = 1$ , tenemos  $n\Lambda_c^3 \equiv y(1) = 2'612$  que define una temperatura,

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi mk (2'612)^{2/3}} n^{2/3},$$

<sup>134</sup>La función  $Y(z)$  tiene un comportamiento cualitativamente similar.

tal que la ecuación de estado no tiene soluciones con significado físico para  $T < T_c(n)$

- Para reiterar este comportamiento, partimos de  $(n\Lambda^3)_1$ , mantenemos  $T = \text{cte}$ , y aumentamos la densidad  $n$
- Llegamos ahora  $n_c\Lambda^3 \equiv y(1)$  que permite definir una densidad o volumen específico ‘críticos’

$$n_c^{-1} = v_c = \frac{\Lambda^3}{y(1)} = \frac{h^3}{2'612 (2\pi mk)^{3/2}} T^{-3/2},$$

tal que no hay soluciones para  $n > n_c(T)$ .

Es decir,

- si disminuimos la  $T$  por debajo de  $T_c(n)$ , lo cual debería de ser en principio posible en un laboratorio, se produce un estado que no está descrito por nuestra ecuación.
- si  $n$  sobrepasa  $n_c(T)$ , lo que sólo implica echar más partículas al sistema sin variar el volumen, parece como si esas partículas desaparecen en nuestra descripción

**Conclusion 1** *Hemos de volver sobre la ecuación de estado para comprender la situación (hay algo que hemos hecho mal para bosones pero que sí hicimos bien para fermiones):*

Notamos entonces en

$$n\Lambda^3 = y(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\eta \frac{\eta^{1/2}}{z^{-1} e^\eta - 1}, \quad \eta = \frac{p^2}{2mkT}$$

que la contribución integral asociada con las partículas que vayan alojándose en el estado fundamental (un  $n^\circ$  apreciable cuando  $T \rightarrow 0$ ) se anula idénticamente (no contribuyen a la densidad, que no

puede ser), es decir, aquella extraña ‘desaparición’ de partículas refleja que el formalismo no da cuenta de ellas.

El origen de este problema radica en que, en algún momento, (46) ha sido reemplazado por

$$VP = -kT \frac{V}{h^3} \int_0^\infty d\vec{p} g \ln \left[ 1 - \exp \left( \frac{\mu - p^2/2m}{kT} \right) \right].$$

Pero este paso sólo está justificado cuando son finitos todos los términos en la suma sobre  $\vec{p}$  de (46), lo que no ocurre para bosones; es decir, despreciamos el término  $p = 0$  que contribuye a  $PV$  de acuerdo con el  $n^\circ$  medio de ocupación del estado fundamental, que resulta ser  $\langle n_0 \rangle \sim N$ , de modo que, para un sist macroscópico ( $N \rightarrow \infty$ ), produce una singularidad tipo delta que ha sido despreciada.

- Para evitar este problema, conviene escribir (46) en la forma:

$$\begin{aligned} VP &= -kT \sum_p \ln \left[ 1 - \exp \left( \frac{\mu - p^2/2m}{kT} \right) \right] \\ &= -kT \left[ \ln(1 - z) + \sum_{p \neq 0} \ln \left( 1 - z e^{-\epsilon/kT} \right) \right] \end{aligned}$$

y se sigue para la densidad:

$$n = \left( \frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T = \frac{z}{kT} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{V} \left[ \frac{z}{1 - z} + \sum_{p \neq 0} \frac{z}{e^{\epsilon/kT} - z} \right]$$

donde el primer término es la contribución a la densidad de partículas de aquellas que se encuentran en el estado fundamental.

Aquí ya puede reemplazarse  $\sum_{p \neq 0}$  por la integral  $\int_0^\infty d\vec{p}$ ; el resultado es el de antes<sup>135</sup> pero con las correcciones  $\ln(1-z)$  y  $z/(1-z)$ , es decir,

$$P(T, z) = kT \left[ -\frac{1}{V} \ln(1-z) + \Lambda^{-3} Y(z) \right]$$

$$n(T, z) = \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} + \Lambda^{-3} y(z)$$

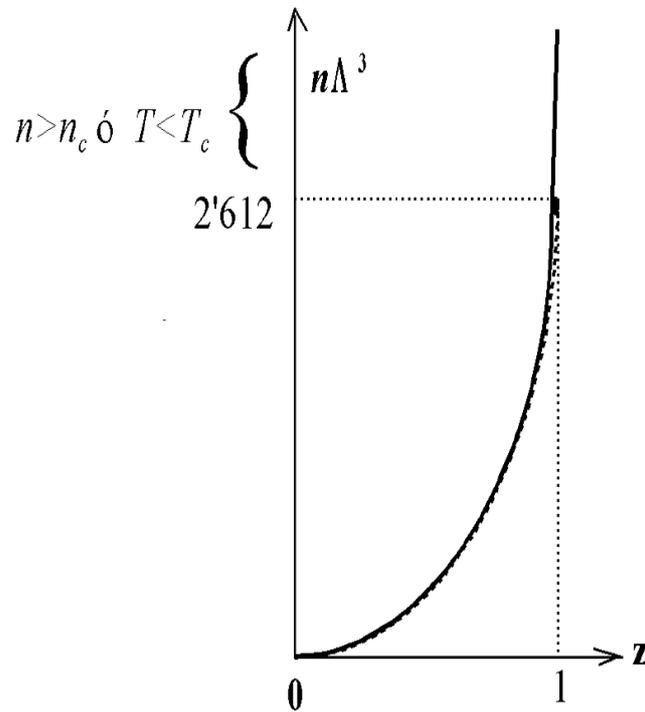
Las consecuencias de estas correcciones son obvias si consideramos:

$$n\Lambda^3 = y(z) + \underbrace{\frac{\Lambda^3}{V} \frac{z}{1-z}}_{\text{corrección}} \quad (47)$$

- $z \neq 1$  : la corrección indicada es despreciable debido al  $V$  en el denominador, y se tiene prácticamente el mismo resultado que antes, digamos  $z = z_0(T, n)$  solución de  $n\Lambda^3 = y(z_0)$ ;
- $z \simeq 1$  de modo que  $z = 1 - \mathcal{O}(1/N)$  : el factor  $z/(1-z)$  es del orden de  $N$ , y la corrección es apreciable (línea continua en la figura)

---

<sup>135</sup>Al reemplazar  $\sum_{p \neq 0}$  por la integral  $\int_0^\infty d\vec{p}$ , vuelve a contarse el caso  $\epsilon = 0$  —ya representado por  $\ln(1-z)$ — pero esto no es problema puesto que el tno  $\epsilon = 0$  tiene contribución nula en la integral, como hemos visto.



A cualquier valor de la ordenada le corresponde un  $z < 1$ .

En definitiva, la solución físicamente relevante (que puede determinarse numéricamente) es de la forma:

$$z \begin{cases} = z_0(T, n) & \text{para } n\Lambda^3 \lesssim y(1) = 2'612 \\ \simeq 1 & \text{para } n\Lambda^3 \geq y(1) \begin{cases} T < T_c(n) \text{ ó} \\ n > n_c(T) \end{cases} \end{cases}$$

ahora si metemos partículas la densidad sigue aumentando.



## Condensación de Bose-Einstein<sup>136</sup>

La ocupación del estado fundamental, con  $\epsilon_0 = 0$ , es

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1} = \frac{e^{\beta\mu}}{1 - e^{\beta\mu}} = \frac{z}{1 - z}.$$

Usando esto en (47):  $n\Lambda^3 = y(z) + \frac{\Lambda^3}{V} \langle n_0 \rangle$ , es decir,

$$\langle n_0 \rangle = nV - \frac{V y(z)}{\Lambda^3} = N \left[ 1 - \frac{y(z)}{n\Lambda^3} \right]$$

El comportamiento que implica esta ecuación es interesante:

- Para  $T < T_c$ , es  $z \simeq 1$ , luego podemos reemplazar aquí  $y(z)$  por  $y(1) \equiv n\Lambda_c^3$ :

$$\langle n_0 \rangle = N \left[ 1 - \frac{\Lambda_c^3}{\Lambda^3} \right] = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right], \quad T < T_c.$$

- Para  $T > T_c$  vale la solución original con muy buena aproximación, es decir,  $y(z) \simeq n\Lambda^3$ , luego se tiene

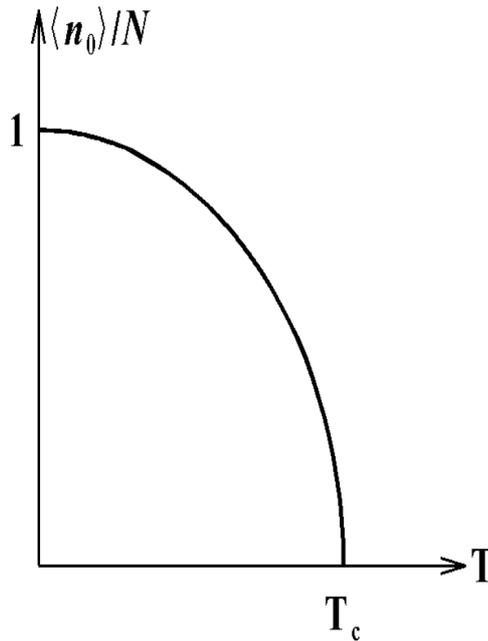
$$\langle n_0 \rangle = N \left[ 1 - \frac{y(z)}{n\Lambda^3} \right] \simeq 0, \quad T > T_c.$$

En definitiva:

$$\langle n_0 \rangle = \begin{cases} N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right] & \text{para } T < T_c \\ 0 & \text{para } T > T_c : \end{cases}$$

---

<sup>136</sup>Tratamiento alternativo en Huang p.270.



Es decir, para  $T < T_c$  se produce acumulación de partículas en el estado fundamental  $\vec{p} = 0$  que, eventualmente, habrá capturado a todas para  $T \rightarrow 0$ . Se conoce a este fenómeno como **condensación de Bose-Einstein** (que ocurre en el espacio de momentos, es decir, todas las partículas pasan a tener  $p = 0$ ).<sup>137</sup>

Es una ‘condensación’ en el espacio de momentos (no en el real) consecuencia directa de la simetría de la función de onda (no de las interacciones entre partículas como en la condensación real), pero tiene una notable similitud formal con la condensación ordinaria en la transición líquido-vapor (o la superfluidez, la superconductividad o el cambio de fase paramagnético-ferromagnético)<sup>138</sup>.

De hecho, el comportamiento de  $\langle n_0 \rangle / N$  es como el del ‘parámetro de orden’  $\Delta\rho \equiv \rho_L - \rho_G$  y otras magnitudes semejan a la situación

<sup>137</sup>Algunas referencias interesantes:

- no puede ocurrir en  $d = 1, 2$ : Hohenberg, *Phys. Rev* **158**, 383 (1967)
- puede presentarse en  $d = 1, 2$  si rotaciones o campos gravitatorios: Widom, *Phys. Rev.* **176**, 254 (1968)
- $d = 1$  con atracción tipo  $\delta$ : Ioriatti *et al.*, *Am. J. Phys.* **44**, 744 (1976)

<sup>138</sup>En todas ellas la fase condensada tiene menos simetrías que la anterior: hay una ruptura de la simetría. Esta variación de la simetría viene gobernada por un *parámetro de orden*.

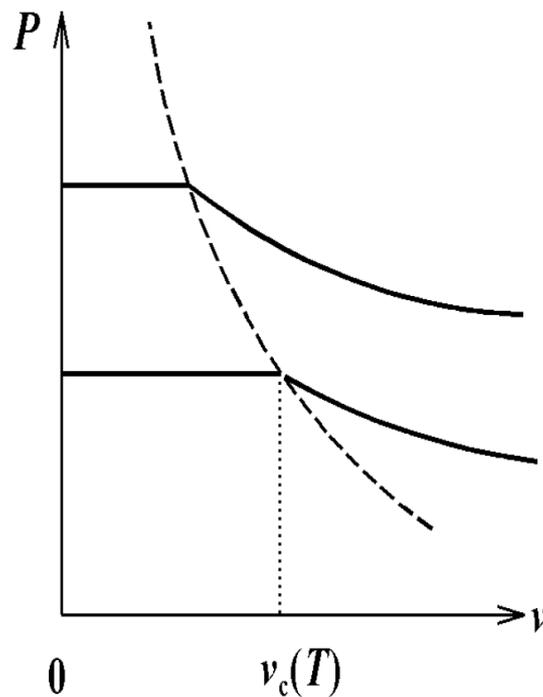
en un cambio de fase de primer orden.<sup>139</sup> Por ejemplo, recordemos la 1ª ecuación de estado,  $P = kT \left[ -\frac{1}{v} \ln(1-z) + \Lambda^{-3} Y \right]$  donde  $\frac{1}{v} \ln(1-z)$  es despreciable para  $z \neq 1$  pero también si  $1-z = \mathcal{O}(1/N)$ , pues se hace  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{v} \ln N\right) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0$ , de manera que se tiene

$$P(T, n) = kT \Lambda^{-3} \times \begin{cases} Y[z_0(T, n)] & \text{para } n < n_c \\ Y(1) & \text{para } n > n_c \end{cases}$$

o, en función del vol específico,  $v = n^{-1}$ :

$$P(T, v) = kT \Lambda^{-3} \times \begin{cases} Y[z_0(T, v)] & \text{para } v > v_c \\ Y(1) & \text{para } v < v_c, \end{cases}$$

luego las isothermas presentan una sección plana para  $0 < v < v_c$ , como en condensación ordinaria:

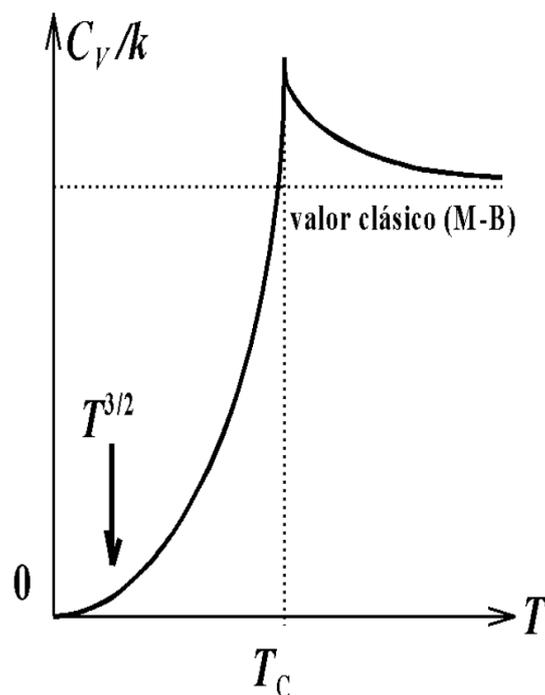


<sup>139</sup>Me refiero a hechos como el que describo a continuación, y no a que un gas de bosones bajo la acción de un campo gravitatorio experimenta una separación de fases similar a la condensación ordinaria (Lamb & Nordsieck, *Phys.Rev.* **59**, 677).

La sección plana refleja que las partículas en el estado fundamental ('fase condensada') no contribuyen a la  $P$ <sup>140</sup> Notar que de llevar la analogía hasta sus últimas consecuencias, se seguiría que estas isothermas describen equilibrio entre tal fase condensada y una fase 'gaseosa' de volumen  $v_c(T)$ , y que la fase condensada tiene  $v = 0$ , es decir, ¡densidad infinita!

El  $C_V$  se sigue también de la ecuación de estado:<sup>141</sup>

$$\frac{C_V}{k} = \begin{cases} \frac{4}{15} \left[ \frac{Y(z_0)}{n\Lambda^3} - \frac{3}{5} \frac{y(z_0)}{z_0 y'(z_0)} \right] & \text{para } T > T_c \\ \frac{Y(1)}{n\Lambda^3} \sim T^{3/2} & \text{para } T < T_c, \end{cases}$$



Este comportamiento es peculiar:

<sup>140</sup>A medida que van cayendo en el estado fundamental, esto es para  $n > n_c$ , no implica un aumento de la presión.

<sup>141</sup>Ej, a partir de la expresión para la entropía que luego deducimos.

- El comportamiento a bajas  $T$ 's ( $T^{3/2}$ ) contrasta con el típico de fermiones ( $C_v \sim T, T \rightarrow 0$ ) y con el de fotones y fonones ( $C_v \sim T^3, T \rightarrow 0$ ).<sup>142</sup>
- $C_v$  es función continua  $\forall T$ , pero su derivada  $\partial C_v / \partial T$  presenta discontinuidad en  $T = T_c$ ; la forma de esta discontinuidad hace que el estado sea conocido como *punto lambda*.

La entropía puede obtenerse<sup>143</sup> de:

$$s = \left( \frac{\partial a}{\partial n} \right)_T \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_a = \frac{1}{n^2} P \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_a$$

de donde

$$\frac{s}{k} = \begin{cases} \frac{Y(z_0)}{n\Lambda^3} - \ln z_0 & \text{para } T > T_c \\ \frac{Y(1)}{n\Lambda^3} & \text{para } T < T_c, \end{cases}$$

Es notable que esta ecuación implica:

---

<sup>142</sup>Resumiendo:

| partícula          | $C_v$ para $T \rightarrow 0$ | espectro |
|--------------------|------------------------------|----------|
| fermiones          | $C_V \sim T$                 |          |
| fonones            | $C_V \sim T^3$               | $cp$     |
| bosones materiales | $C_V \sim T^{3/2}$           | $p^2/2m$ |

El espectro fonónico es más denso, ee, va como 1, 2, 3, 4, ..., comparado con 1, 4, 9, 16, ... para bosones materiales, lo que explica el diferente  $C_V$ .

<sup>143</sup>Este resultado se sigue de

$$P = n^2 \left( \frac{\partial a}{\partial n} \right)_T, \quad s = - \left( \frac{\partial a}{\partial T} \right)_n$$

notando que

$$\left( \frac{\partial a}{\partial n} \right)_T \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_a \left( \frac{\partial T}{\partial a} \right)_n = -1$$

- $s \rightarrow 0$  para  $T \rightarrow 0$ , de acuerdo con el postulado de Planck (propiedad que no tiene el modelo clásico *gas de Boltzmann* (cuya validez no incluye bajas  $T$ 's));
- que la *fase condensada* (la única que existe en  $T = 0$ ) no conlleva entropía, lo que resulta ser importante en el contexto del modelo de Tisza y que explica superfluidez del He líquido y superconductividad a bajas temperaturas, como veremos.

## Discusión

Un gas de bosones sin interacciones presenta condensación de B-E en un rango de (bajas)  $T$ 's y (altas)  $n$ 's. El fenómeno es interesante y peculiar.<sup>144</sup>

En principio, el interés de este fenómeno es académico, pues no  $\exists$  sistema físico de **moléculas** que se comporte a bajas  $T$ 's como un gas **ideal** de bosones. De hecho, el modelo gas ideal de bosones no tiene una relevancia física directa semejante a la del gas ideal de fermiones: al contrario que para fermiones, un sistema de bosones a muy bajas  $T$ 's apenas mostrará efectos dinámicos, por lo que este modelo parece únicamente relevante como referencia.

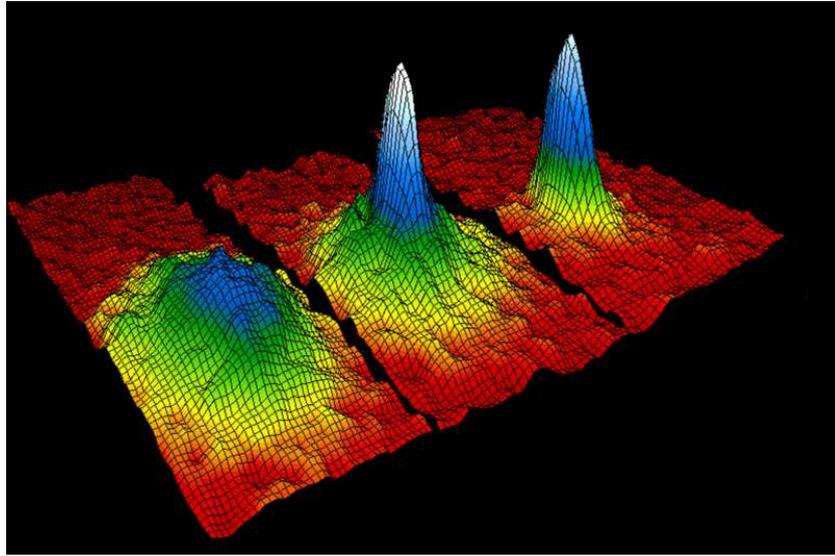
Sin embargo, no está claro que este punto de vista que encontraréis en algunos libros pueda seguir defendiéndose:

- el modelo resulta ciertamente relevante en relación con el comportamiento de la materia a muy bajas  $T$ 's, ej. en los fenómenos de superfluidez y superconductividad, como vemos a continuación (a pesar de que Landau restó importancia a la condensación de B-E en este contexto)
- ya se ha conseguido la fase condensada de B-E en el rubidio-87

---

<sup>144</sup>Ej, Landsberg, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **50**, 65 (1954) discute algunas propiedades que no suelen ser características de los sistemas físicos reales.

mediante una ingeniosa ‘trampa magnética’.<sup>145</sup>



**Evidencia de condensación B-E:** distribuciones de velocidad de los átomos en una nube de átomos Rb-87 enfriados por evaporación. Antes de la condensación (izquierda), la distribución es isotrópica, como corresponde a un gas en equilibrio térmico. La fase condensada aparece (centro) como una fracción de átomos que tienen velocidades próximas a cero. Al proseguir con la evaporación, se llega (derecha) a una fase casi pura , con unos 2000 átomos en este experimento.

---

<sup>145</sup>Esta fenomenología se describe, por ejemplo, en *Physics Today*, Agosto 1995, p.17.

## Termodinámica del He líquido

- Termodinámica del helio
- Modelo de Tisza.

## Introducción

El resto de esta lección tiene motivación múltiple:

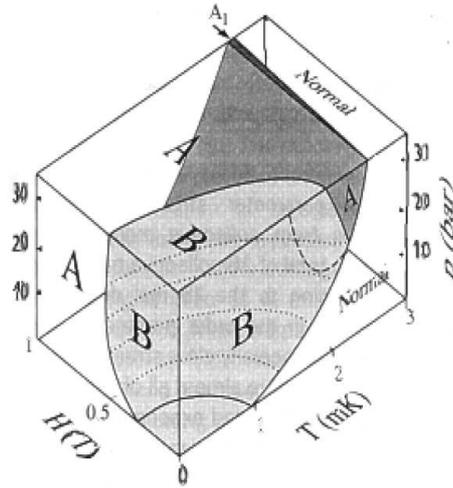
- discutir la aplicación del modelo *gas ideal de bosones* pues el He a bajas temperaturas delata a nivel macroscópico los efectos cuánticos que se están produciendo a bajas temperaturas en su seno.
- describir un tipo comportamiento general que tienden a presentar muchos sistemas materiales cerca 0K, y repasar así la física de un sistema singular,  $^4\text{He}$
- introducir un interesante método para analizar la consecuencia de las interacciones entre partículas, basado en el concepto de *cuasi-partícula*
- hacer evidente que **no**  $\exists$  todavía teoría microscópica para el comportamiento superfluido del  $^4\text{He}$ , a pesar de las maravillosas ideas de Landau,



Lev Davidovitch Landau (1908-1968)

y de que el fenómeno es conocido hace más de 50 años

Isótopo  $^3\text{He}$ , también muy interesante. Su estudio no queda incluido en este capítulo puesto que el comportamiento elemental en este caso es fermiónico (de hecho, se observa  $C_V \sim T$ ,  $T \rightarrow 0$ ). Esquemáticamente, el diagrama de fases del  $\text{He}^3$  en  $(\mathcal{H}, T, P)$  es



Este diagrama muestra las fases superfluidas A,  $A_1$  y B. El líquido de Fermi normal  $\exists$  por encima de 3mK y la fase sólida requiere presiones de 34bar. La línea discontinua para  $\mathcal{H} = 0$  corresponde a la transición *vortex-core* observada en la fase B en rotación.<sup>146</sup>

Algunas referencias interesantes para esta lección:

- J. Wilks, 'The Theory of Liquid He', *Rep. on Progr. in Physics* **20**, 38 (1957)
- F. Reif, 'Superfluidity and Quasi-Particles', *Scientific American*, November 1960
- R.J. Donnelly, 'The Discovery of Superfluidity', *Physics Today*, July 1995
- Russell Donnelly, 'Rotons: a low-temperature puzzle', *Physics World*, February 1997

<sup>146</sup>Para otros detalles, puede verse, por ejemplo: 'Special Issue: Helium-3 and Helium-4', *Phys. Today*, February (1987); 'Superfluid  $^3\text{He}$ : Theory and Recent Experiments', E.V. Thuneberg & J.P. Pekola, *Europhys. News* **22**, 3 (1991)

## Termodinámica del helio

La mecánica cuántica rige el comportamiento de la materia. Hemos visto que, en condiciones apropiadas, la ecuación de estado es:

$$P = nkT (1 - 0,177\delta - 0,003\delta^2 + \dots),$$

con

$$\delta = \frac{n}{g} \left( \frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2},$$

luego los efectos cuánticos serán más notorios cuanto mayor sea  $\delta$  (aunque el desarrollo anterior puede perder entonces su validez), es decir, a bajas  $T$ 's y grandes  $n$ 's para moléculas ligeras. Este (incompleto) argumento ya nos indica que el helio es un buen candidato para mostrar comportamiento condicionado por las leyes de la mecánica cuántica (lo que no es usual a nivel macroscópico)<sup>147</sup>.

De hecho, el comportamiento del He es peculiar en muchos aspectos,<sup>148</sup> y puede considerarse como una especie de caricatura de comportamiento bosónico a bajas  $T$ 's, en la que se evidencian efectos típicamente cuánticos a nivel macroscópico, observable.

Licuoado en 1908 (lo que permitió descubrir la superconductividad a Heike Kamerlingh Onnes en 1911) no se notó que algo raro ocurría alrededor de 2K hasta 1927; en 1938, Jack Allen y Donald Misener identificaron y describieron la superfluidez, nombre dado por Kapitza por analogía con el de superconductividad ideado por Kamerlingh Onnes.

---

<sup>147</sup>El hidrógeno, más ligero, parece mejor candidato, pero las interacciones son muy importantes en este caso (a diferencia del helio, un gas noble), de modo que enmascaran a nivel macroscópico efectos con otro origen.

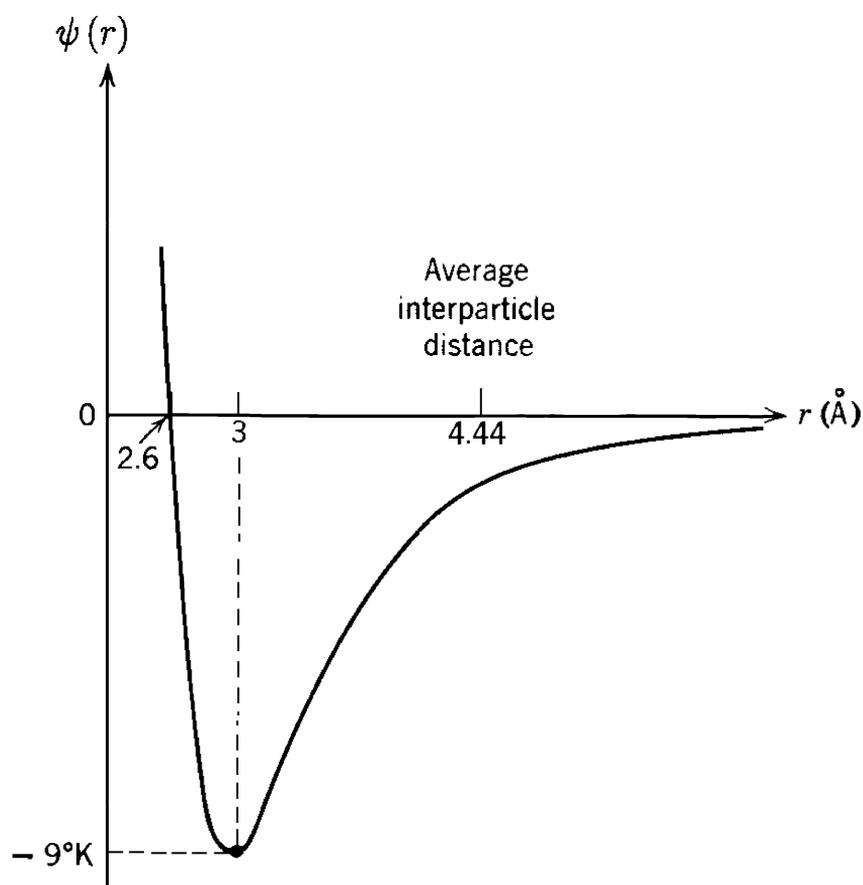
<sup>148</sup>Descubierto en el Sol; durante un eclipse total visible desde la India en 1868, el astrónomo Jules Janssen detectó una raya amarilla con el espectroscopio, que atribuyó a la radiación de un elemento químico no conocido en la Tierra. Confirmado por Joseph Norman Lockyer, que le llamó así por *helios*, Sol en griego. William Ramsay lo identificó en 1895 como subproducto en la descomposición radioactiva de minerales con uranio en una mina.

Puede verse una introducción a las propiedades del He en *Thermodynamics and Statistical Mechanics* de Finkelstein, p.64, y tratamientos más detallados en J. Wilks, 'The properties of Liquid and Solid helium', Clarendon Press 1967 (502-WIL).

El gas más difícil de licuar y de solidificar: No se hace líquido hasta enfriar por debajo de unos 5K a  $P$  normal, y permanece líquido a  $T$ 's menores (extrapolando, incluso en 0K); es necesario aplicarle fuertes presiones para transformarlo en sólido.

Se entiende, ya que:

- es gas noble  $\implies$  interacciones moleculares muy débiles: en efecto, se sigue (Slater & Kirkwood 1931) de la estructura electrónica del He que la interacción entre dos átomos de Helio separados una distancia  $r$  es



y, en cálculos que necesitan expresión realista, usan ( $\psi$  en K,  $\sigma = 4'64$ ):

$$\psi(r) = (5'67 \times 10^6) \exp\left(-21'5 \frac{r}{\sigma}\right) - 1'08 \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6;$$

- el de masa más ligera entre los nobles, que implica mayor movilidad y dificultad de localización en una red;<sup>149</sup>
- principio variacional  $\implies$  configuración más probable en 0K, la que minimice E total (posiciones de equilibrio), pero principio incertidumbre

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x \Delta p \sim \hbar \implies (\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \sim \hbar^2 \\ \Delta E = (\Delta p)^2 / 2m \end{array} \right\} \implies$$

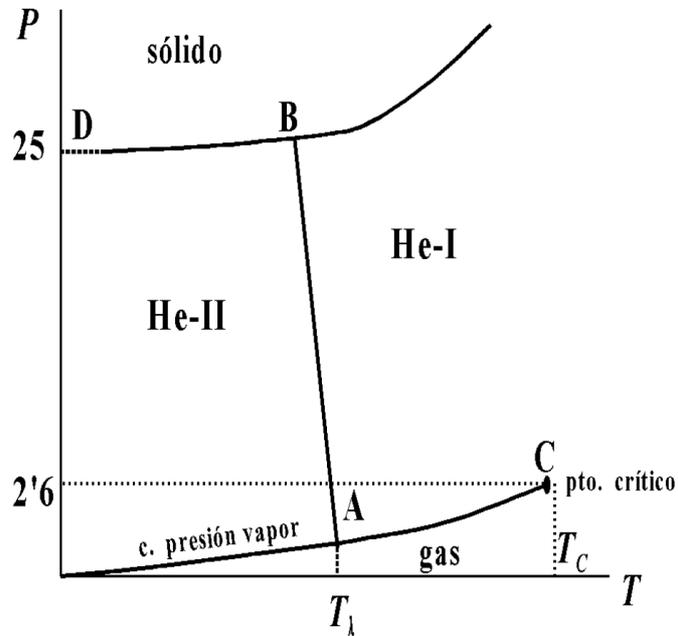
$$\implies \Delta E \sim \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{\Delta x} \right)^2 \quad \Delta x \sim \underset{\text{anchura pozo}}{\sim} 10 \text{ K},$$

comparable al pozo de potencial. De forma que si queremos que los átomos estén localizados deben de estar a una distancia menor que  $\Delta_x$  lo que implica un  $\Delta E$  más grande que la profundidad del pozo luego no estarían ligados  $\implies$  no forma estructura cristalina con átomos de He situados en las posiciones de mínima energía. El PI sugiere que es difícil que el He quede atrapado en ese potencial.

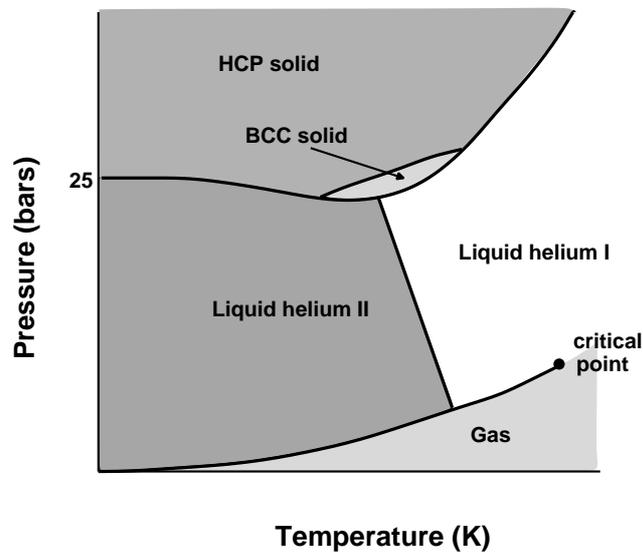
---

<sup>149</sup>De hecho, calor latente  $\neq 0$  en 0K (extrapolando pendiente  $dP/dT$  de la curva de vapor)  $\implies$  hay todavía cierta energía de ligadura por átomo.

Diagrama de fases del isótopo  ${}^4\text{He}^{150}$



<sup>150</sup>En realidad es algo más complejo, pues también se presentan tres fases sólidas (HCP, hexagonal con máximo empaquetamiento, la única estable a bajas  $T$ 's, BCC, que ocupa una pequeña región junto a la curva de fusión, y la FCC que aparece a presiones superiores a las mostradas en la figura):



- la curva de presión de vapor presenta un punto crítico para  $T_c = 4'21 \text{ K}$  y  $P_c = 2'6 \text{ atm}$  (aproximadamente)

- la fase sólida sólo ocurre para  $P > 25 \text{ atm}$ ,

valores que son excepcionales; además:

- en la fase líquida  $\exists$  'línea  $\lambda$ ' de coexistencia entre dos fases líquidas diferentes, He-I y He-II, de modo que A y B son puntos triples
- a lo largo de la curva de presión de vapor, la transición ocurre para  $T_\lambda = 2'18 \text{ K}$  y volumen específico:  $v_\lambda = 46'2 \text{ \AA}^3$

La transición  $\lambda$  se manifiesta:

- con cierta facilidad a simple vista:

Sea  $\text{He}^4$  en vasija Dewar. Enfriar, reduciendo  $P$ , a través del punto  $\lambda$ , siguiendo curva de presión de vapor. Se observa:

- ○  $T > T_\lambda$  (región I): líquido agitado por burbujas de vapor que se forman por todo él;
- $T < T_\lambda$  (región II): líquido en calma; no hay ebullición, aunque puede haber evaporación en superficie
  - ◇ Se interpreta: los transportes de calor ocurren tan rápidamente que no pueden producirse gradientes de  $T$  (responsables de la formación de burbujas), como si la conductividad calorífica fuese infinita

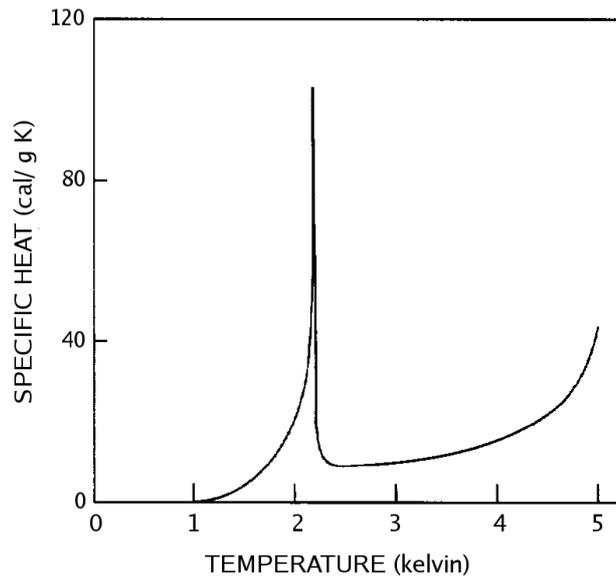
- $C_V$  diverge logarítmicamente a ambos lados con forma que da nombre a la transición (mayor por un lado que por otro):<sup>151</sup>

$$C_V = \left\{ \begin{array}{c} a^+ \\ a^- \end{array} \right\} + b \ln c |T - T_\lambda|, \quad T \rightarrow T_\lambda^\pm$$

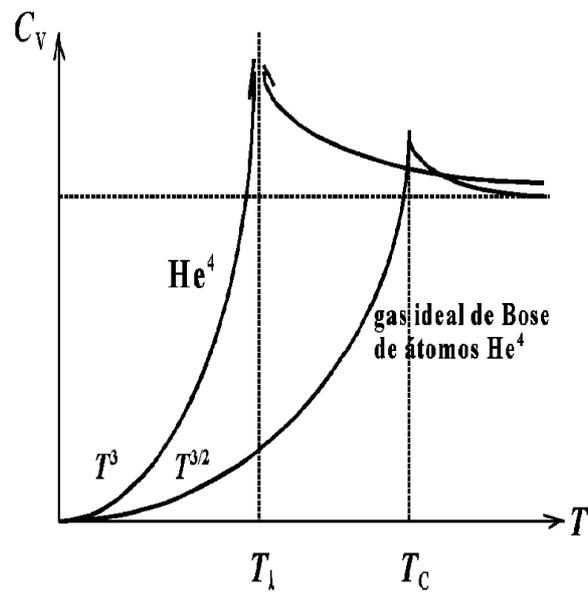
<sup>151</sup>La transición en AB **no** es de 1er orden, salvo en el punto  $\lambda$ , donde este salto en  $C_V$  indica la  $\exists$  de calor latente y de discontinuidad en el volumen específico. que sugiere diferencias entre las dos fases. Las otras transiciones, incluyendo las DB, también son de 1er orden, luego se tiene una pendiente

$$\frac{dP}{dT} = \frac{S_{\text{líquido}} - S_{\text{sólido}}}{V_{\text{líquido}} - V_{\text{sólido}}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} > 0, \text{ pero muy pequeña,}$$

lo que implica DB casi horizontal  $\implies S_{\text{líquido}} \simeq S_{\text{sólido}}$ , en contra de la situación usual.



La forma de  $C_V$  recuerda la discutida en la condensación B-E:



y, de hecho, hay evidencias de que este fenómeno es relevante para el comportamiento del He a bajas  $T$ 's:

- Podemos definir

$$\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle n_0 \rangle}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Tr} (e^{-\beta H} \hat{a}_0^+ \hat{a}_0)}{N \text{Tr} (e^{-\beta H})},$$

que es una medida del número de ocupación del estado fundamental. Para  $\alpha \neq 0$  daría cuenta de una ocupación macroscópica del estado fundamental como en la condensación B-E.

$\alpha$  ha sido estimado (Penrose & Onsager 1956) con el formalismo de segunda cuantización (el  $H$  del  $\text{He}^4$  se conoce por mecánica cuántica) para el caso de interés obteniendo  $\alpha \simeq 0'08$ , mostrando que la condensación B-E ocurre en estas circunstancias.<sup>152</sup>

- London sugirió en 1931 que la transición del  $\text{He}^4$  en  $T_\lambda$  podría ser la de un gas ideal de bosones en  $T_C$  :

Se tiene que  $T_C = h^2 n^{2/3} / 2\pi m k (2'612)^{2/3}$  y, usando los valores adecuados,  $T_C = 3'13 \text{ K}$

Este valor es muy próximo a  $T_\lambda$ , y la diferencia podría deberse a influencia de las interacciones (no sería del todo ideal).

$\Rightarrow$

Hacer Mecánica Estadística de bosones con interacciones!(\*)

Pero  $C_V (T \rightarrow 0)$  no tiene comportamiento de bosones materiales, sino  $T^3$ , como los fonones y fotones!

(\* ) Este planteamiento no es totalmente acorde con la idea revolucionaria introducida por Fritz London a principio de los 1940 de que los átomos en esta fase condensada (*condensado de Bose*) estarían descritos por una  $\psi$  única

---

<sup>152</sup>El comportamiento "bosónico" del  $\text{He}^4$  está fuera de duda. Es consecuencia de permanecer líquido a bajas  $T$ 's. Si solidificara antes de llegar a  $T_\lambda$  —como en tantos materiales— la simetría de las  $\psi$ 's de los átomos individuales no tendría consecuencias tan importantes ('no habría solapamiento' de dichas  $\psi$ 's) y la B-E sería irrelevante. Es decir, lo peculiar del He es que puedan presentarse partículas en el estado fundamental sin estar ligadas a una red

que se extendería por todo el fluido; los átomos se moverían entonces coherentemente, sin poder perder  $E$  por choques con otros, pues están en el estado de mínima  $E$ . Hoy sabemos que la  $\exists$  de superfluidez requiere ciertas interacciones entre átomos.

Antes de acometer algo en este sentido,  
reparamos otras propiedades  
macroscópicas importantes del He

## Modelo de Tisza

### Modelo de los dos fluidos

Modelo fenomenológico de Tisza<sup>153</sup> que explica las sorprendentes observaciones de los 1940's.

Es un modelo macroscópico y clásico. Necesariamente involucra esa imprecisión que aparece cuando uno intenta explicar efectos cuánticos con analogías clásicas. ¡No es alternativa a la teoría microscópica! (pero un buen punto de partida para ésta y, en todo caso, resulta útil).

Según el modelo:

- en la fase He-II hay dos componentes, **fluido normal** y **superfluido**,
- a los que puede asociárseles densidad de masa (M/V) y campo de velocidades propios, tal que:  $\rho = \rho_n + \rho_s$ ,  $\rho\vec{v} = \rho_n\vec{v}_n + \rho_s\vec{v}_s$ ;
- el fluido normal:
  - se comporta como fluido 'clásico', ordinario
  - desaparece en cero absoluto:  $\rho_n \rightarrow 0$  si  $T \rightarrow 0$  K
  - el único presente en la fase He-I:  $\rho_s = 0$  ( $\rho = \rho_n$ ) si  $T \geq T_\lambda$
- el superfluido tiene propiedades inusuales:
  - entropía nula
  - viscosidad nula (fluir sin resistencia por capilares,  $r \leq 10^{-2}$  cm)

Analogía sencilla no rigurosa:

---

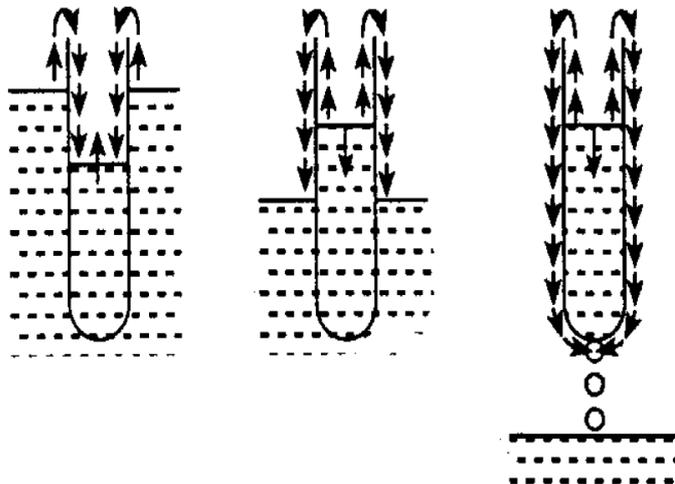
<sup>153</sup>L. Tisza, *J. Phys. Radium, Ser. VIII* **1**, 164, 350 (1940)

- *superfluido*: formado por partículas en estado fundamental  $\implies$  **perfectamente ordenadas**, luego no transportan entropía, y **no pueden interactuar** (es decir, intercambiar momento), a menos que sean excitadas, luego no hay viscosidad. Lo peculiar es tener partículas en el estado fundamental sin estar en una red.
- *componente normal*: formado por partículas excitadas, pueden chocar con paredes, intercambiar momento y frenarse, como fluidos ordinarios

Es forma (imprecisa) de hablar: no tiene sentido división real en partículas normales y superfluidas; sólo se propone considerar dos componentes, como matiza luego la teoría microscópica.

**Sin otras hipótesis, pueden entenderse cualitativamente (incluso cuantitativamente a veces) algunas de las propiedades más extrañas del He-II:**

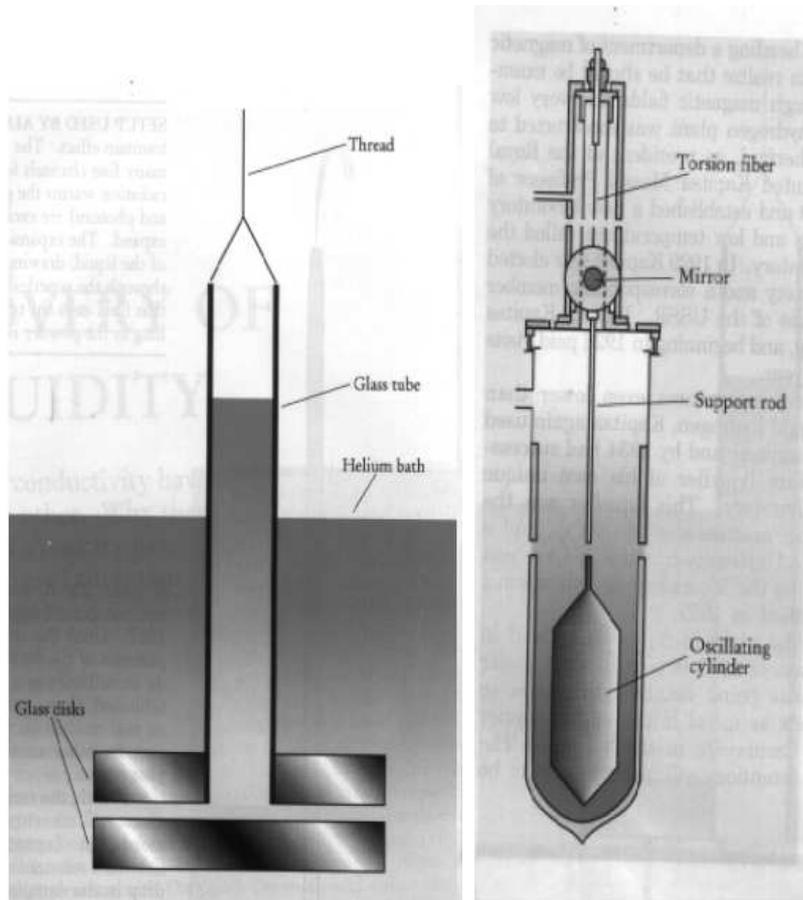
**Observación:**



$\Leftarrow$  superfluidez no tiene viscosidad (de hecho, medidas indican que viscosidad del He-II es, al menos,  $10^6$  veces menor que la del He-I), luego hay una probabilidad apreciable de fluir en condiciones clásicamente improbables.

**Observación:** medidas de viscosidad del He-II con diferentes técnicas pueden arrojar valores discordes. Considerar el método de los

capilares (como, por ej, en 1), y el movimiento de un objeto en el seno del fluido (2)



(1)

(2)

(1) Al tirar del hilo, se arrastra tubo y disco solidario, ambos en baño de He.<sup>154</sup> La disminución de  $P$ , que se manifiesta en la altura de columna líquido dentro del tubo, cuando el líquido fluye entre discos es una medida de la viscosidad. Si  $T > T_\lambda$ , se observa diferencia de nivel durante unos minutos. Si  $T < T_\lambda$ , la diferencia desaparece en segundos. Kapitsa concluyó así que la viscosidad del II es al menos 1500 veces menor que la del I.

(2) Péndulo oscilante de Misener inmerso en He líquido.<sup>155</sup>

*Explicación del Modelo de Tisza:* El método de los capilares tiende a medir la viscosidad del superfluido, o valor próximo a éste, dependiendo del diámetro del capilar. De hecho, habría que esperar

<sup>154</sup>Montaje experimental de P. Kapitsa, *Natura* 141, 74 (1938)

<sup>155</sup>Wilhelm, Misener & Clark, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 151, 342 (1935)

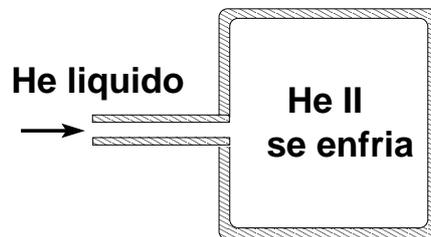
la ley de Poiseuille,

$$\text{flujo de masa} \sim \eta^{-1} \Delta P,$$

con  $\eta$  el coeficiente de viscosidad en el capilar, pero no se observa tal proporcionalidad, sino que habría que concluir formalmente  $\eta^{-1} \sim \infty$ . Para variaciones infinitesimales de  $P$  se producen grandes flujos.

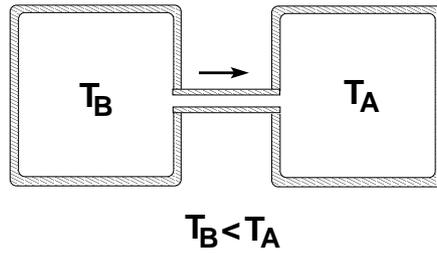
Mediante el segundo método, esto es estudiando el movimiento de un objeto en el He-II (ley de Stokes), sólo el componente normal contribuirá al frenado del objeto, luego la viscosidad medida no ha de tender a anularse por debajo de  $T_\lambda$ , ya que se mediría la viscosidad del fluido normal, que según la teoría de Tisza está presente en el Helio II.

**Observación:** Se hace fluir He líquido por capilar hacia depósito aislado térmicamente con He-II  $\implies$  disminuye la  $T$  de éste.



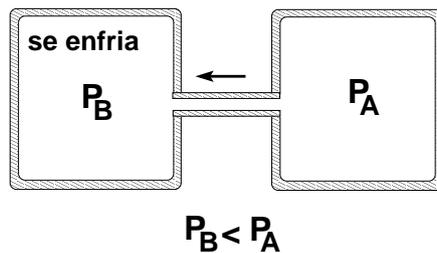
El modelo de Tisza lo explicaría así: Sólo pasará superfluido por el capilar, luego crecerá la masa de la muestra pero no la entropía  $\implies dS = 0$  (el proceso es reversible) y  $ds < 0$ . Así,  $T ds = c_V dT < 0 \implies dT < 0$  (pues  $c_V > 0$  ya que el sistema es estable). Se sigue también que un flujo por el capilar hacia fuera calentará la muestra, como se observa.

**Observación:** Dos volúmenes de II conectados por capilar. Una diferencia de  $T$ 's puede desaparecer (consecuencia de lo anterior) gracias a flujo del tanque frío al caliente.



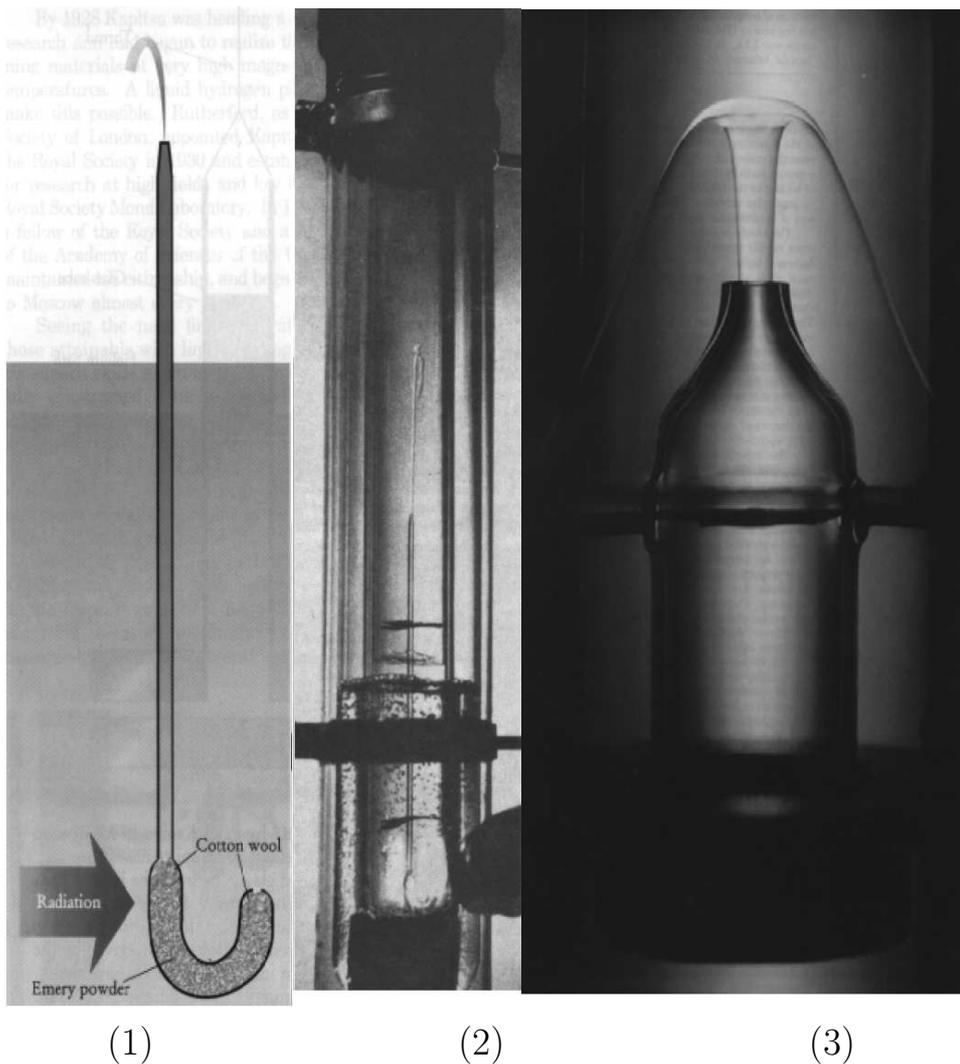
**Nota:**  $\Delta S = 0$ , luego es *proceso reversible de conducción de calor*, bien distinto del usual. Por supuesto, también habrá proceso irreversible de conducción de  $Q$ , pero es mucho más lento, y puede despreciarse en estos casos. De hecho, el flujo de  $Q$  medido no sigue la ley usual, es decir, no es  $\propto \Delta T$ .

**Nota:** Si  $T$ 's iguales a ambos lados del capilar, y establecemos diferentes  $P$ 's en los tanques, se enfriará el que recibe superfluido, es decir, el de menor  $P$  : **efecto mecanicocalórico**.



Lo contrario:

**Observación:** efecto fuente.  $MT$ : aumentando  $T$  en región separada del resto por un capilar, viene superfluido para contrarrestar el cambio, lo que produce elevación de  $P$  dentro del capilar



1. Montaje original propuesto por Allen para demostrar el efecto fuente encontrado accidentalmente por él con anterioridad. El calentamiento se conseguía con radiación<sup>156</sup>
2. Una realización experimental.
3. Foto de un montaje experimental de Allen en los 1970. La línea negra horizontal es un calefactor eléctrico.

<sup>156</sup>J.F. Allen & H. Jones, *Nature* **141**, 243 (1938)

**Las medidas relacionadas con los efectos anteriores pueden explicarse cuantitativamente con facilidad:**

**A. Podemos hacer termodinámica** basándonos en el modelo de Tisza. Por ejemplo:

Sean los dos tanques entre los que se establece una diferencia (positiva) de temperaturas,  $\Delta T = T_A - T_B$  ( $T_A > T_B$ ) proporcionando energía al  $A$ . Para contrarrestar, irá superfluido al  $A$ , estableciéndose diferencia  $\Delta P = P_A - P_B$  ( $P_A > P_B$ ) que puede relacionarse con  $\Delta T$ .

En efecto, el superfluido transporta masa por el capilar, pero no energía ni momento. Luego se establece un equilibrio similar al que produce en situaciones ordinarias una pared (el capilar) rígida y adiabática pero permeable a la masa. Es decir,  $\mu_A = \mu_B$  y, en particular,  $\Delta\mu_A = \Delta\mu_B = 0$ .<sup>157</sup> Se sigue que ha de tenerse en  $A$  :

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\mu} = \frac{S}{V}.$$

Esta expresión puede determinarse con facilidad: la parte izquierda, midiendo la  $P$  generada por efecto fuente; la derecha, a partir del calor específico,  $S = \int C_P \frac{dT}{T}$ , luego admite una comprobación independiente.

**Se puede hacer hidrodinámica: Observación:** Uno puede generar perturbaciones en el He II de forma que pueden definirse y medirse varios ‘sonidos’ o propagaciones de estas perturbaciones. *MT*:

1.  $\rho_n, \rho_s$  : variación sinusoidal de las dos densidades en fase  $\implies \rho$  variación sinusoidal (‘ondas densidad’) (que se propagan de igual forma que el sonido ordinario): *primer sonido* , caracterizado por velocidad de propagación  $c_1$
2.  $\rho_n, \rho_s$  : oscilan con diferencia de  $180^\circ$  (están en oposición de fase)  $\implies \rho = \text{cte}$ , no oscila (los métodos ordinarios de detección de sonido no detectan nada), pero como  $\rho_s$  está oscilando  $\implies$  la  $S$  por unidad de masa oscila (‘ondas térmicas’) que sí se pueden detectar: *segundo sonido*, y se propaga a velocidad  $c_2$ .

---

<sup>157</sup>Pues  $\mu = \mu(T, P)$ , y  $T$  y  $P$  son constantes en  $B$ .

3. *tercer sonido*: excitaciones en las que sólo contribuye el superfluido, ej, perturbación entre láminas paralelas muy próximas de forma que sólo tenemos superfluido entre ellas. Éstas se propagan a velocidad  $c_3$  y sirven para confirmar la teoría de Tisza.
4. *cuarto sonido*: Cuando el He II se mueve sobre una sustancia sólida muy porosa que sólo permita movimiento del superfluido

Pueden escribirse las ecuaciones hidrodinámicas que gobiernan estos procesos y ver, por ejemplo, cómo se desacoplan a bajas  $T$ 's:<sup>158</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \nabla^2 P = 0, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\rho}{s} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{\rho_s}{\rho_n} s \nabla^2 T = 0 \\ s = s(T, \rho), \quad P = P(T, \rho) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \rho + \gamma_1 \nabla^2 T = 0$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) T + \gamma_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0$$

$T \rightarrow 0$  K:  $\gamma_1, \gamma_2 \rightarrow 0$   $\left( c_2 \rightarrow \frac{c_1}{\sqrt{3}} \right)$ , luego se desacoplan y, en efecto, 1º y 2º sonidos son ondas de densidad y térmica, respectivamente.

a  $T$ 's finitas, las ecuaciones están acopladas; para resolverlas podemos probar:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \exp \left[ i \left( \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right], \quad T = T_0 + T_1 \exp \left[ i \left( \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right]$$

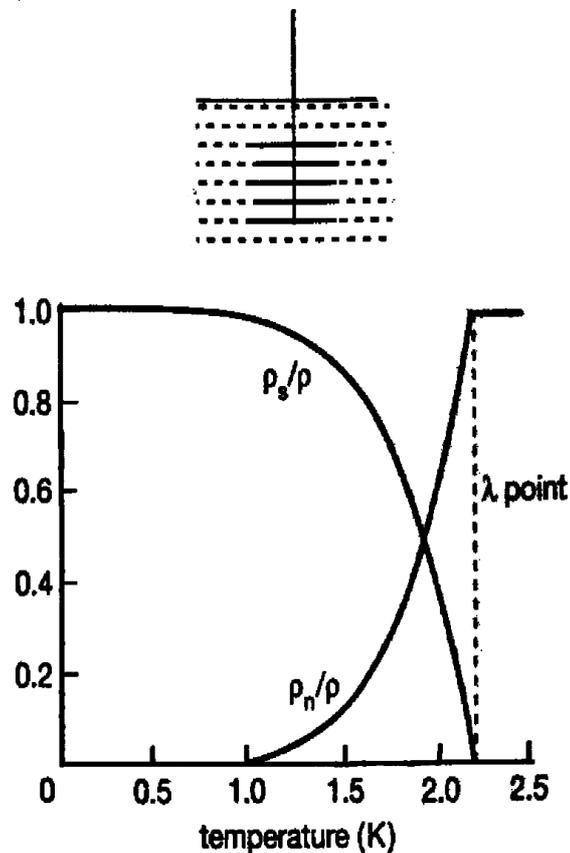
Por otra parte, se tiene para el cuarto:

$$c_4 \simeq \sqrt{\frac{\rho_s}{\rho} c_1^2 + \frac{\rho_n}{\rho} c_2^2}, \quad \begin{array}{ll} c_4 \rightarrow c_1 & \text{si } T \rightarrow 0 \text{ K} \\ c_4 \rightarrow c_2 & \text{si } T \rightarrow T_\lambda \end{array}$$

Todas estas propagaciones constituyen mecanismos reversibles, en contraste con la difusión ordinaria.

<sup>158</sup>Ver otros detalles en Huang, por ejemplo.

**Experimento de Andronikashvili:** determinación empírica de ecuación de estado  $\rho_n/\rho_s$  a lo largo de la curva de presión de vapor:



Tanque con He-II en equilibrio con su vapor, lo que permite que el experimento ocurra a lo largo de la curva de presión de vapor.

Paletas separadas  $\sim 0.2$ mm: el superfluido no es arrastrado por rotación pero sí el fluido normal.

el momento angular  $\propto$  momento de inercia  $\propto \rho_n$  (cte. proporcionalidad:  $\rho_n = \rho$  si  $T > T_\lambda$ )

se sigue para  $T \gtrsim 1$  K que:

$$\rho_n = \begin{cases} \rho \left( \frac{T}{T_\lambda} \right)^{5/6}, & T < T_\lambda \\ \rho, & T > T_\lambda \end{cases}$$

que se puede entender como la ecuación de estado para el fluido normal a temperaturas muy bajas ( $\sim 1^\circ K$ )



## Excitaciones elementales

- Excitaciones elementales. Caso del  $^4\text{He}$ .
- Fotones. Gas en movimiento uniforme.
- Rotones. Gas de rotones en movimiento.
- Velocidad crítica de superflujo.
- Vórtices. Teorema de Feynman.
- Superconductividad.
- Modelo de vórtices.

## Introducción

- sistema ideal: sólo modelo referencia, siempre hay interacciones en Naturaleza
- gases: se estudian mediante métodos perturbativos
- sólidos: hay fuertes interacciones (las series perturbativas divergen), pero se pueden estudiar mediante los modos normales haciendo FE de un conjunto de osciladores. Si hay términos anharmónicos hacemos teoría de perturbaciones.
- cooperatividad más simple: retículo con hamiltoniano tipo Ising
- líquidos: en general, no aplicable los métodos y técnicas anteriores, teoría muy pobre, pero hay un caso excepcional:

a bajas  $T$ 's,  $\exists$  un método general basado en el concepto **excitación elemental** como **cuasi-partícula**, que permite hacer ME (y luego explicar propiedades emergentes no-triviales) y puede generalizarse<sup>159</sup>

---

<sup>159</sup>El concepto de **excitación elemental** es importante:

- aplica directamente —y es insustituible— en estudio de la materia a bajas  $T$ 's si otros métodos fallan, como pasa con *líquidos*;
- hay varios casos notables de líquidos estables a muy bajas  $T$ 's, que no tienen teoría satisfactoria de otro tipo:  $^4\text{He}$ ,  $^3\text{He}$ , hidrógeno atómico polarizado, que condensa a muy bajas  $T$ 's y parece superfluido;
- en cierto modo, es teoría unificadora en tratamiento estados de muy baja energía en materia condensada, incluyendo plasmas cuánticos, superconductores, sistemas desordenados;
- puede, en principio, describir leves desviaciones desde otros estados de referencia.

El estudio de este concepto y aplicaciones es el objetivo del resto de esta lección<sup>160</sup>

## Excitaciones elementales

**Tesis** (implícita en teóricos de los 1930, revitalizada recientemente):

- a bajas  $T$ 's, cuando efectos cuánticos tienen papel esencial, las propiedades físicas de la materia (condensada) no están condicionadas por el estado fundamental, sino por los estados excitados de más baja energía.
- éstos pueden describirse como un gas de cuasi-partículas o excitaciones elementales que sólo interaccionan débilmente

**Ejemplo:** sistema de fermiones a bajas  $T$ 's, cerca del cero absoluto.

- invariante por traslación (excepto paredes) para poder definir la esfera de Fermi,
- partículas no interaccionan entre sí,
- los estados de una partícula son  $\vec{p}$ ,  $\epsilon_p = p^2/2m$

**Estado fundamental (0K):** determinado por PP: ocupados todos estados una partículas encerrados por *superficie de Fermi*, esfera  $R = p_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$  en espacio momentos, y vacíos los estados exteriores

**Estados excitados:** comunicando  $\epsilon_p > \epsilon_F = p_F^2/2m$  a algunas partículas, quedan huecos en el interior; si  $kT \ll \epsilon_F$ , es

$$\text{densidad partículas excitadas} \sim \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right) n \ll n$$

---

<sup>160</sup>Algunas referencias interesantes para esta lección:

F. Reif, 'Superfluidity and Quasi-Particles', *Scientific American*, November 1960

R. Donnelly, 'Rotons: a low-temperature puzzle', *Physics World*, February 1997

G.W. Crabtree & D.R. Nelson, 'Vortex Physics in High-Temperature Superconductors', *Physics Today*, April 1997

⇒ puede hablarse de excitación elemental<sup>161</sup>:

$$\begin{array}{l}
 E \\
 \text{excitación asociada con} \\
 \text{part. exc. de energía } \epsilon_p \\
 E \\
 \text{hueco correspondiente}
 \end{array}
 = \begin{array}{l}
 \epsilon_p - \epsilon_F \\
 \\
 \epsilon_F - \epsilon_p
 \end{array}$$

- si fermiones interactúan: todavía puede definirse superficie de Fermi que —salvo situaciones patológicas— es esfera  $R = \mu = E_{\text{part}}$  en superficie de Fermi (potencial químico)

**$T$ 's finitas bajas:** ahora no es tan fácil arrancar una partícula (por las interacciones); en segundo lugar hay algunas partículas excitadas, pero sometidas a campo medio de las otras, luego unos fermiones ‘arrastran’ a otros al crearse la excitación elemental:

- todavía pueden asociarse cuasi-partículas con partículas excitadas y huecos, con  $p$  y  $E$  ( $= \epsilon_p - \mu$ ) bien definidos
- serán pocas, luego apenas interactúan, aun cuando la interacción entre fermiones sea intensa

**Así, para obtener propiedades emergentes de la materia a partir concepto “excitación elemental”:**

(cerca de 0K)  $Z$  sólo tiene contribución apreciable de los 1<sup>os</sup> estados excitados y éstos pueden representarse como conjunto de cuasi-partículas que se mueven con  $p$  y  $E$  bien definidos; este *gas* describe las desviaciones del sistema respecto de estado fundamental

Similitud con el sólido: estado fundamental representado por red, los fonones constituyen las excitaciones elementales a partir de ese estado fundamental

Es una **generalización del concepto de fonón!**

Es **descripción cuántica del movimiento colectivo de los átomos:** no identificar excitaciones elementales con átomos individuales

---

<sup>161</sup>Es decir, para hablar de excitación elemental, es necesario que haya pocas excitaciones para que no aparezcan interacciones entre ellas

Para hacer ME, es necesario el espectro de las excitaciones elementales, que dependerá del estado fundamental y de las interacciones

Ejemplo de antes vale para  $^3\text{He}$  (fermiónico), pero concepto aplicado en:

- semiconductores y aislantes: espectro presenta saltos energética
- superconductores (ver luego analogía superfluidez-superconductividad)
- sustancias ferromagnéticas: *ondas de espín*
- *solitones*: excitaciones no-lineales de gran amplitud que mantienen identidad incluso en colisiones
- defectos de la materia, sean fermiónicos o bosónicos, ...

Primera aplicación: al  $^4\text{He}$  por Landau, que argumenta:

- excitaciones en líquido débilmente excitado han de poder aparecer y desaparecer de una en una,
- el momento angular en sistema de bosones sólo puede variar en  $n^\circ$  entero, luego
- las **excitaciones elementales en sistema de bosones han de ser bosones**
- Se observa en el  $^4\text{He}$  que:  $C_V \sim T^3$ , como corresponde a fonones, para  $T \rightarrow 0\text{ K}$ , luego

Las excitaciones elementales a muy bajas  $T$ 's, es decir, asociadas a pequeños  $p$  o grandes  $\lambda = h/p$ : son

**fonones**,<sup>162</sup> esto es, **ley de dispersión** o espectro  $\epsilon = cp$  ( $c =$  velocidad propagación del sonido en helio a 0K)

En definitiva, Landau propone:

fluido normal (en primera aproximación) = gas ideal de fonones en movimiento relativo al superfluido, siendo éste último el responsable del resto de masa y momento del líquido He-II.

---

<sup>162</sup>El razonamiento lleva a esperar que excitaciones elementales fermiónicas en  $^3\text{He}$ , donde  $C_V \sim T$

## 1<sup>a</sup> consecuencia: calores específicos

son aplicables los resultados discutidos para fonones, con una salvedad: el sólido tenía  $3N$  modos de vibración (por cada partícula 2 transversales y uno longitudinal), pero el líquido no puede soportar esfuerzos, es decir, modos transversales, luego sólo tiene  $N$  modos longitudinales de vibración, es decir,

$$C_V = Nk \frac{4\pi^4}{5} \left( \frac{kT}{\hbar\omega_D} \right)^3, \quad \omega_D = \left( \frac{6\pi^2 N}{V} \right)^{1/3} c$$

Se encuentra experimentalmente (primeros: Wiebes *et al* 1957) que

$$C_V = (0'0204 \pm 0'0004) T^3 \text{ cgs}$$

en el rango  $0 < T < 0'6 \text{ K}$

Usando  $\rho = 0'1455 \text{ g/cm}^3$  y  $c = 238 \text{ m/s}$  para el  $^4\text{He}$  en estas condiciones en la fórmula anterior:

$$C_V = 0'0209 T^3 \text{ cgs}$$

Para  $T$ 's (y momentos) mayores no puede esperarse que excitaciones elementales o modos normales del líquido sean estrictamente armónicos. Las anarmonicidades provocan otra relación de dispersión y pueden aparecer otras excitaciones (rotones, vórtices, etc)

**Conclusión: es un hecho experimental** (del análisis de  $C_V$ ) que

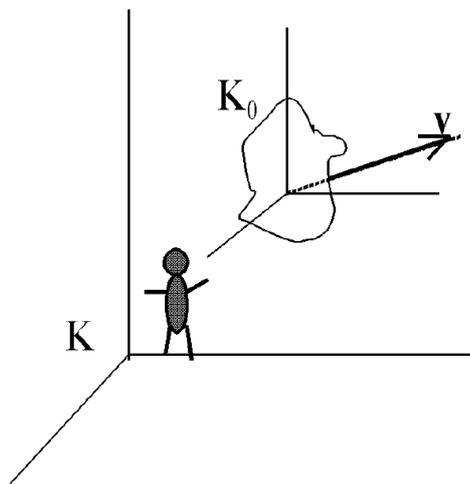
los fonones son relevantes para explicar el comportamiento del  $^4\text{He}$  a muy bajas  $T$ 's, en  $0 < T \lesssim 0'6^\circ \text{ K}$ <sup>163</sup>

---

<sup>163</sup>El superfluido no es relevante para el  $C_v$  pues el único grado de libertad que está activado es el debido a las excitaciones elementales.

## Gas en movimiento uniforme

Qué propiedades hay asociadas al helio moviéndose respecto de las partículas en estado fundamental.<sup>164</sup> Cual es la relación entre el momento total del gas y la velocidad  $v$  del movimiento de su masa.



$\vec{v}$  = velocidad recipiente que contiene el gas, luego velocidad media con que son arrastradas las partículas

$\vec{v}$  tiene dirección determinada  $\implies$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{distribución estadística de partículas en} \\ \text{estados deja de ser isotrópica,} \\ \text{y queda condicionada por} \\ \text{ligadura adicional:} \\ \text{momento total del sistema, } \vec{P} \end{array} \right.$

En estas condiciones, siguiendo mismos pasos que en caso isotrópico<sup>165</sup>[1], el n<sup>o</sup> medio de ocupación de los estados individuales de

<sup>164</sup>nos preguntamos por el movimiento relativo del gas de fonones o excitaciones elementales respecto a las partículas en el estado fundamental.

<sup>165</sup>Usamos la microcanónica y un procedimiento de maximización de la entropía con 3 restricciones con multiplicadores de Lagrange:

$$S = k \ln \Omega(N, V, E, \vec{P}) = k \ln \sum_{\{n_i\}} W(\{n_i\})$$

con la suma restringida a las condiciones de conservación:

$$\sum n_i = N; \quad \sum n_i \epsilon_i = E; \quad \sum n_i \vec{p}_i = \vec{P}.$$

Si  $\{n_i^*\}$  es la configuración más probable  $\implies$  podemos poner  $S \approx k \ln W(\{n_i^*\})$  y obtenemos:

$$\delta \ln W - [\alpha \sum \delta n_i + \beta \sum \epsilon_i \delta n_i + \vec{\gamma} \cdot \sum \vec{p}_i \delta n_i] = 0$$

cuya solución da la distribución más probable  $W(n^*)$  y nos permite calcular  $\langle n_i \rangle$ .

una partícula con energía  $\epsilon(\vec{p})$  es:

$$\langle n(\vec{p}) \rangle = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta\epsilon + \vec{\gamma} \cdot \vec{p}) - \Theta}, \quad \Theta = \begin{cases} +1 & \text{bosones} \\ -1 & \text{fermiones} \\ 0 & \text{M-B} \end{cases} \quad (48)$$

El significado físico de  $\vec{\gamma}$ , al calcular la velocidad de arrastre del gas:

Tomamos eje  $z$  en dirección movimiento  $\vec{v} = v\hat{k}$  y suponemos que<sup>166</sup>  
 $\vec{\gamma} = \gamma\hat{k} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} v &\equiv |\vec{v}| = \text{valor medio componente } u_z \text{ de las veloc. individuales de las part.} \\ &= \langle u_z \rangle = \langle u \cos \theta \rangle = \langle c \cos \theta \rangle \end{aligned}$$

Donde hemos usado que tenemos fonones  $\epsilon = pc \Rightarrow u = \partial\epsilon/\partial p = c$

Si escribimos  $\vec{\gamma} \cdot \vec{p} = \gamma p_z = \gamma p \cos \theta$  y usamos la distribución (48) —con  $\mu \equiv 0$  al ser el número de fonones indefinido— para calcular el valor medio, se tiene (el  $2\pi$  proviene de hacer la integración sobre el ángulo alrededor del eje  $z$ ):

$$v = \frac{\frac{V}{h^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{1}{e^m - 1} (c \cos \theta) p^2 dp 2\pi \sin \theta d\theta}{\frac{V}{h^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{1}{e^m - 1} p^2 dp 2\pi \sin \theta d\theta}$$

donde  $m \equiv \beta\epsilon + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} = \beta pc \left(1 + \frac{\gamma}{\beta c} \cos \theta\right)$ .

Haciendo aquí  $\cos \theta = \eta$  y  $p \left(1 + \frac{\gamma}{\beta c} \eta\right) = p'$ , se sigue:

$$v = c \frac{\int_{-1}^1 \left(1 + \frac{\gamma}{\beta c} \eta\right)^{-3} \eta d\eta}{\int_{-1}^1 \left(1 + \frac{\gamma}{\beta c} \eta\right)^{-3} d\eta} = -\frac{\gamma}{\beta}$$

---

<sup>166</sup> $\theta$  es el ángulo que forman las velocidades de las partículas con el eje  $z$ , esto es con la dirección que marca  $\vec{v}$

que atribuye significado a  $\gamma$ .

|                               |                            |                        |                                |
|-------------------------------|----------------------------|------------------------|--------------------------------|
| multiplicadores de Lagrange:  | $\alpha = -\frac{\mu}{kT}$ | $\beta = \frac{1}{kT}$ | $\vec{\gamma} = -\beta\vec{v}$ |
| asociados con conservación de | n <sup>o</sup> part        | energía                | m. total                       |

Para fonones, (48) se simplifica pues su n<sup>o</sup> es indefinido, es decir,  $\alpha$  y  $\mu$  son idénticamente nulos, y, para restricciones

$$\sum n_i \epsilon_i = E, \quad \sum n_i \vec{p}_i = \vec{P},$$

queda

$$\langle n(\vec{p}) \rangle = \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon - \vec{v} \cdot \vec{p})] - 1}$$

a comparar con lo medido en  $K_0$ <sup>167</sup>.

A partir de la distribución en K:

- o notamos que

$$\left. \begin{array}{l} \langle n \rangle > 0 \implies \beta(\epsilon - \vec{v} \cdot \vec{p}) > 0 \\ \epsilon = pc \end{array} \right\} \implies v < c,$$

es decir, la velocidad de arrastre del fluido no puede exceder la de propagación de los fonones en el medio o  $c$  es límite superior (*velocidad crítica*, ver luego) para el flujo del gas de fonones.<sup>168</sup>

- o podemos calcular el momento total del gas de fonones<sup>169</sup>:

<sup>167</sup>En  $K_0$  (esto es lo que ve un observador solidario con el gas  $\Rightarrow v_0 = 0$ ) es  $\langle n_0(\vec{p}_0) \rangle = [\exp \beta \epsilon_0 - 1]^{-1}$ , luego el movimiento induce una transformación de Galileo, como podíamos haber esperado.

<sup>168</sup>Se sigue, en particular, que no hay que preocuparse por efectos relativistas.

<sup>169</sup>que es paralelo a  $\vec{v}$  luego  $\vec{P} = P\hat{k} = P_z\hat{k}$

$$\begin{aligned}
P = P_z &= \sum_{\vec{p}} \langle n(\vec{p}) \rangle p_z = \sum_{\vec{p}} \langle n(\vec{p}) \rangle p \cos \theta \\
&= \frac{V}{h^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{p \cos \theta}{\exp [\beta p c (1 - \frac{v}{c}) \cos \theta] - 1} p^2 \, d p \, 2\pi \sin \theta \, d \theta,
\end{aligned}$$

que puede integrarse con facilidad haciendo (como antes)

$$\cos \theta = \eta, \quad p \left( 1 + \frac{\gamma}{\beta c} \eta \right) = p'$$

de modo que

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2\pi V}{h^3} \int_0^\infty \frac{p'^3 \, d p'}{e^{\beta p' c} - 1} \int_0^\pi \left[ 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right]^{-4} \cos \theta \sin \theta \, d \theta \\
&= V \frac{16\pi^5}{45h^3 c^3 \beta^4} \frac{v/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}
\end{aligned}$$

o y la energía total:

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{\vec{p}} \langle n(\vec{p}) \rangle p c \\
&= \frac{2\pi V c}{h^3} \int_0^\infty \frac{p'^3 \, d p'}{e^{\beta p' c} - 1} \int_0^\pi \left[ 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right]^{-4} \sin \theta \, d \theta \\
&= V \frac{4\pi^5}{15h^3 c^3 \beta^4} \frac{1 + \frac{1}{3} (v/c)^2}{(1 - v^2/c^2)^3}
\end{aligned}$$

que (otra vez) muestran cómo formalismo deja de ser válido si  $v \rightarrow c^-$

Luego en el gas tenemos bien definido un momento y una velocidad, luego parece lógico definir una masa inercial del gas de fonones. Interpretemos  $P/v$  como *masa inercial* del gas de fonones; se sigue la densidad de masa inercial asociada:

$$\rho = \frac{P}{vV} = \frac{16\pi^5}{45h^3c^5\beta^4} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^3}.$$

Para  $v \ll c$  (lo que ocurre generalmente en la práctica):

$$\rho_0 = \frac{16\pi^5 k^4}{45h^3c^5} T^4$$

y, usando valores del helio:

$$(\rho_0)_{\text{fonones}} / \rho_{\text{He}} = 1'22 \times 10^{-4} T^4$$

**Consecuencias**, por ejemplo para  $T = 0'3\text{K}$ :

- $(\rho_0)_{\text{fonones}} / \rho_{\text{He}} \sim 10^{-6}$ , luego la *densidad inercial* asociada entonces con los fonones es despreciable, aunque sus efectos son notable en  $C_V$  y desde otros pros de vista (como vamos a ver)
- a  $T$ 's tan bajas esperamos ( $C_V$ ) que las únicas excitaciones sean fonones, luego podría esperarse que

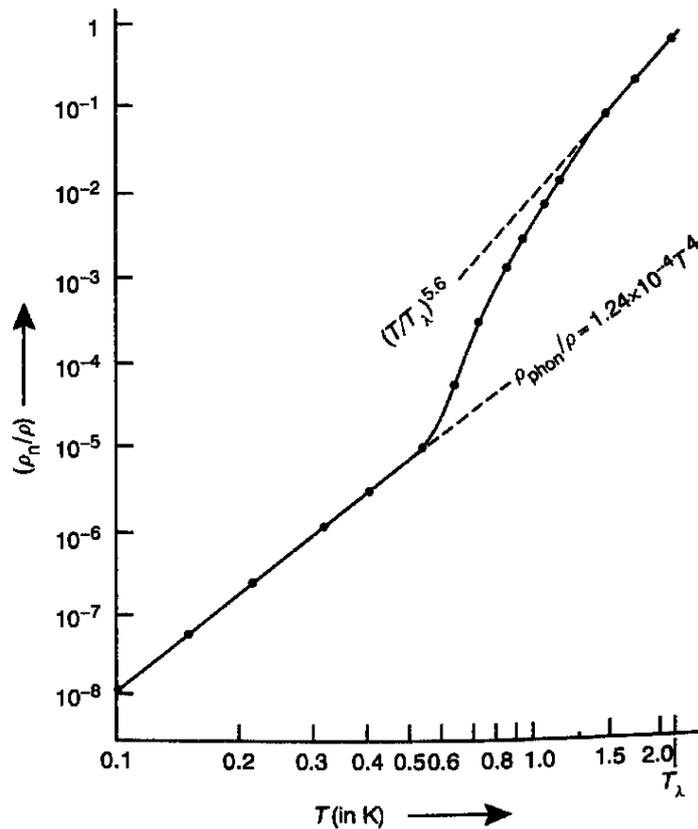
$$(\rho_0)_{\text{fonones}} / \rho_{\text{He}} \simeq \rho_n / \rho_{\text{He}},$$

predicción a comparar con experimentos.

El de Andronikashvili establece

$$\rho_n = \rho_{\text{He}} (T/T_\lambda)^{5'6}, \quad T \gtrsim 1\text{K}.$$

No es posible hacer medidas a  $T$  inferior con este método (basado en viscosidad), pero medidas indirectas (basadas en la entropía y en la velocidad del *segundo sonido*: Klerk, Hudson & Pellman 1953) conducen a buen acuerdo:



### Consecuencias:

- otra vez, la idea de Landau (sólo fonones) conduce a buen acuerdo con datos a *muy* bajas  $T$ 's
- hay que explicar ese cambio que (como para el  $C_V$ ) se produce a unos  $0.5$ K

probablemente: la ley de dispersión  $\epsilon = pc$  deja de ser lineal en  $p$ , pasando a tener importancia otros tipos de excitaciones elementales (desaparece el comportamiento fonónico que tiene ese espectro)

## Otras propiedades de un gas en movimiento

La Función de partición generaliza (para un gas cuántico en movimiento):

$$\Xi = \prod_{\vec{p}} \{1 - \exp[-\beta(\epsilon - \vec{v} \cdot \vec{p})]\}$$

y se sigue la presión

$$\mathcal{P} = \frac{kT}{V} \ln \Xi = \frac{4\pi^5 k^4 T^4}{45h^3 c^3} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2}$$

y la entropía<sup>170</sup>

$$S = V \frac{16\pi^5 k^4 T^3}{45h^3 c^3} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2}$$

Estas expresiones pueden aplicarse, en particular, al *campo de radiación de un cuerpo negro en movimiento*, en cuyo caso:

- $c =$  velocidad luz;  $v \leq c$  es la condición relativista familiar,
- hay modos transversales de vibración doblemente degenerados

---

<sup>170</sup>Usando la expresión de la energía obtenida anteriormente, también se tiene

$$E + \mathcal{P}V = V \frac{16\pi^5 k^4 T^4}{45h^3 c^3} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^3}$$

Otra consecuencia es que

$$\langle n(\vec{p}) \rangle = \frac{1}{\exp\left[\alpha + \frac{\epsilon - \vec{v} \cdot \vec{p}}{kT}\right] - \Theta}, \quad \langle n_0(\vec{p}_0) \rangle = \frac{1}{\exp\left[\alpha_0 + \frac{\epsilon_0}{kT_0}\right] - \Theta}$$

miden abundancia relativa, medida desde  $K$  y  $K_0$ , de partículas en los estados de momento  $\vec{p}$  y  $\vec{p}_0$  en la colectividad correspondiente en un instante dado.

Es decir,  $\langle n(\vec{p}) \rangle$  y  $\langle n_0(\vec{p}_0) \rangle$  conectados por transformación de Lorentz trivial que requiere:

$$\alpha + \frac{\epsilon - \vec{v} \cdot \vec{p}}{kT} \rightarrow \alpha_0 + \frac{\epsilon_0}{kT_0}.$$

Puesto que:

- por dinámica relativista:

$$\frac{\epsilon - \vec{v} \cdot \vec{p}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \epsilon_0$$

- y, si el n° de partículas ha de ser invariante ( $N = N_0$ ),  $\alpha = \alpha_0$

se sigue que

$$T = T_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (\text{Planck 1917, Einstein 1917}),$$

pero esta expresión no está admitida:

supongamos que  $S = S_0$  (puesto que es una medida del n° de configuraciones asociado con cada macroestado),

para un proceso cuasiestático, tal que  $dS = \delta Q/T$ , se sigue  $\delta Q = \delta Q_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , es decir se contraen, mientras que algunos sugieren que las transferencias de calor tendrían que dilatarse.



## Otras excitaciones elementales a temperaturas y momentos mayores: Rotones

Experimentos ( $C_V$ , ecuación de estado,...)

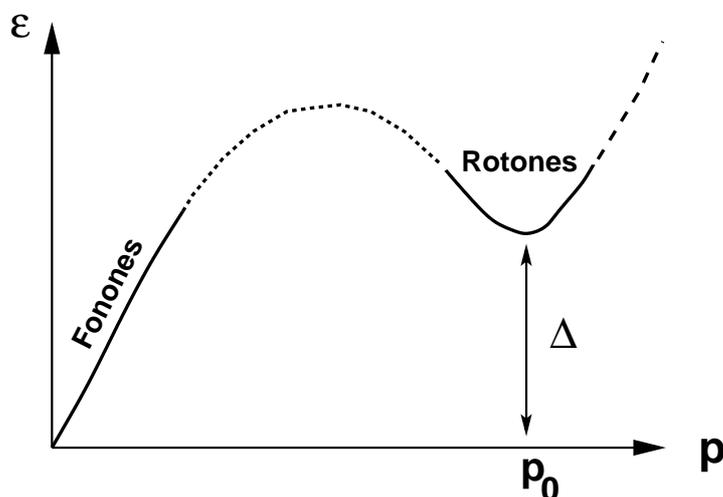
$\implies$  la ley de dispersión  $\epsilon = \epsilon(p)$  deja de tener la forma lineal  $\epsilon = pc$  de fonones para  $T \gtrsim 0'6\text{K}$ : considerar la posibilidad de otras excitaciones elementales

Hechos:

- forma concreta de  $\epsilon = \epsilon(p)$  depende de interacciones; difícil determinarla (y, en todo caso, restringirse a casos particulares)
- Landau analiza cuidadosamente datos del  $C_V$  para  $T \gtrsim 0'6\text{K}$ , detecta que comportamiento predominante es  $\exp(-\beta\Delta)$ , con  $\Delta$  cte. característica, y
- llega convencimiento de que espectro excitaciones elementales en el He-II es de la forma

$$\epsilon(p) = \begin{cases} pc, & p \ll p_0 \\ \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\sigma}, & p \approx p_0, \end{cases}$$

donde  $\Delta = \epsilon(p_0)$ ,  $p_0$  y  $\sigma$  son parámetros ajustables para tener el  $C_V$  correcto (o a determinar mediante experimentos de dispersión, pues las excitaciones elementales son cuasi-partículas):



A estas excitaciones nuevas que aparecen entorno a  $p_0$  Landau las llamó *rotones*, pues imaginó que eran debidas a perturbaciones locales de carácter rotacional en el fluido.

Hoy sabemos que esto no es así: Feynman (1954) y Pitaevskii (1956) han mostrado que fonones y rotones son parte del mismo espectro (línea — — —), explicable a partir de interacciones

Sospecha de Landau confirmada: existen otras excitaciones con carácter rotacional,

pero Pitaevskii (1959): probablemente no hay que considerar  $\epsilon(p)$  con  $p > p_0$ , pues no serían estables y descompondrían en otras excitaciones de momento menor

**En todo caso, sin recurrir a justificación microscópica, la hipótesis de Landau ya es muy útil:**

El hecho de suponer  $\epsilon = \Delta + p^2/\sigma$  sugiere necesidad de un mínima energía,  $\Delta$ , para crear un rotón, lo que explicaría que no son necesarios para explicar observaciones en  $T < 0'5$  K. Se espera que los rotones coexistan con los fonones en la ‘región de transición’ (recordad la ecuación de estado)  $0'5$  K  $< T < 1$  K, y la contribución fonónica se debilitaría para  $T > 1$  K donde bastaría considerar rotones. **Veamos si es posible confirmar estas expectativas.**

Rotones en el rango  $1$  K  $< T \lesssim 2$  K :

- Dada la continuidad del espectro, suponemos que los rotones son bosones.<sup>171</sup>
- Supongamos un gas de rotones sin interactuar: hay muy pocos para que aparezcan interacciones. Suponemos que, como para fonones,  $n^\circ$  de rotones es indefinido, luego su potencial químico es nulo. Así, si  $\epsilon$  representa la parte rotón:

$$\langle n(\vec{p}) \rangle = \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1}.$$

---

<sup>171</sup>Landau no usó este argumento; de hecho, su naturaleza bosónica resulta irrelevante.

- A las  $T$ 's de interés,  $e^{\beta\epsilon} \gg 1$ ,

experimentalmente,  $\Delta/k \simeq 8'6 \text{ K}$ , de modo que  $e^{\beta\epsilon} > e^{8'6} = 5432 \gg 1$

$$\langle n(\vec{p}) \rangle \simeq \exp[-\beta\epsilon(p)] :$$

a todos los efectos prácticos, los rotones pueden tratarse clásicamente (es decir, estadística Maxwell-Boltzmann).

- rotones indistinguibles, y poco numerosos (interacciones  $\approx 0$ ), luego

$$\begin{aligned} \Xi &= \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V, T) \stackrel{\mu \equiv 0}{=} \sum_{N=0}^{\infty} Q_N(V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{[Q_1(V, T)]^N}{N!} \\ &= \exp[Q_1(V, T)] = \exp \left[ \sum_p \exp(-\beta\epsilon) \right] \end{aligned}$$

- El número de rotones en equilibrio se sigue de

$$\bar{N} = z \left( \frac{\partial \ln \Xi}{\partial z} \right)_{V, T}$$

pero  $z = e^{\beta\mu} = 1$ , luego<sup>172</sup>  $\bar{N} = \ln \Xi$ .

- Es  $P(V, T) \equiv \frac{kT}{V} \ln \Xi$ , luego

$$\frac{P}{kT} = \bar{N} = \ln \Xi = \sum_p \exp(-\beta\epsilon)$$

---

<sup>172</sup> $\bar{N}$  es controlado por  $T$ , no por  $\mu$ . Además  $\bar{N} = \sum_{\vec{p}} \langle n(\vec{p}) \rangle = \ln \Xi$ .

- Usando aquí la parte rotón, y  $\sum_{\vec{p}} : \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d\vec{p} :$

$$\frac{P}{kT} = \bar{N} = \frac{V}{h^3} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{kT} \left[ \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\sigma} \right] \right\} 4\pi p^2 dp$$

$$\left( \text{notar: esto es lo mismo que } \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty n(\epsilon) p^2 dp \right)$$

haciendo  $x \equiv (p - p_0) / (2\sigma kT)^{1/2} :$

$$= \frac{4\pi p_0^2 V}{h^3} e^{-\Delta/kT} (2\sigma kT)^{1/2} \int_{-p_0/(2\sigma kT)^{1/2}}^\infty dx e^{-x^2} \left[ 1 + \frac{(2\sigma kT)^{1/2}}{p_0} x \right]^2$$

pero, experimentos dispersión:  $p_0/\hbar \simeq 1'9\text{\AA}$  y  $\sigma \simeq 0'16\text{m}_{\text{He}}$ , luego

- $2\sigma kT/p_0^2 \simeq 10^{-25}T \ll 1$ , y el término en  $x^2$  dentro del último corchete es despreciable (frente a  $x$  y a 1)
  - $p_0/(2\sigma kT)^{1/2} \simeq 10^{12}T^{-1/2}$ , y el límite inferior de la integral  $\rightarrow \infty$  (tanto más cuando allí domina la exponencial decreciente)
  - el término en  $x$  en el integrando tampoco contribuye por simetría en torno de  $x = 0$
- En definitiva, la integral es  $\int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2} = \pi^{1/2}$ , de modo que la contribución de los rotones en el rango de  $T$ 's de interés es

$$\frac{P}{kT} = \bar{N} = \frac{4\pi p_0^2 V}{h^3} (2\pi\sigma kT)^{1/2} e^{-\Delta/kT}$$

- Se sigue que:

$$A(V, T) = -kT \ln \Xi = -PV = -\bar{N}kT \propto T^{3/2} e^{-\Delta/kT}$$

$$S = - \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)_V = -A \left( \frac{3}{2T} + \frac{\Delta}{kT^2} \right)$$

$$C_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = -\frac{A}{T} \left[ \frac{3}{4} + \frac{\Delta}{kT} + \left( \frac{\Delta}{kT} \right)^2 \right]$$

Para  $T \rightarrow 0$ , estas expresiones no son relevantes (no hay rotones), debido a la  $\exists$  del *gap*  $\Delta$ , y —en el caso del He-II— dominan los fonones

Suponiendo que rotones dominan en  $0.6\text{K} < T \lesssim 2\text{K}$ , estas expresiones implican  $C_V \sim A \sim e^{-\Delta/kT}$  de acuerdo con los experimentos en esa zona

### Gas de rotones en movimiento

Como vimos, si hay movimiento con  $\vec{v}$  respecto del observador:

$$n(\epsilon - \vec{v} \cdot \vec{p}) = \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon - \vec{v} \cdot \vec{p})] - 1},$$

y puede definirse densidad asociada con masa inercial

$$\rho_0 = \frac{M_0}{V} = \frac{1}{V} \lim_{\substack{v \rightarrow 0 \\ \text{pues } v \ll c \text{ en la práctica}}} \frac{P}{v}$$

luego (eligiendo  $z$  en dirección movimiento)

$$\rho_0 = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{1}{v} \frac{1}{h^3} \int n(\epsilon - \vec{v} \cdot \vec{p}) p_z d^3 p.$$

No necesario usar forma explícita de  $n$  pues, al interesar  $v \rightarrow 0$ , puede desarrollarse y escribir:

$$n(\epsilon - \vec{v} \cdot \vec{p}) \simeq n(\epsilon) - \vec{v} \cdot \vec{p} \frac{\partial n(\epsilon)}{\partial \epsilon}$$

Así:

- la integral sobre  $n(\epsilon)$  conduce a  $\vec{P} = 0$  (pues se refiere a  $K_0$  donde el gas está en reposo global)
- para la otra integral, poniendo  $p_z = p \cos \theta$ ,  $\vec{v} \cdot \vec{p} = vp \cos \theta$  :

$$\begin{aligned} \rho_0 &\simeq -\frac{1}{v} \frac{1}{h^3} \int \int vp \cos \theta p \cos \theta \frac{\partial n}{\partial \epsilon} d^3 p \\ &= -\frac{1}{h^3} \int \int p^2 \cos^2 \theta \frac{\partial n}{\partial \epsilon} (p^2 dp 2\pi \sin \theta d\theta) \\ &= -\frac{4\pi}{3h^3} \int_0^\infty \frac{\partial n}{\partial \epsilon} p^4 dp \end{aligned}$$

expresión general válida para cualquier espectro y estadística<sup>173</sup>

- Para rotones

$$\begin{aligned} n(\epsilon) &\simeq \exp(-\beta\epsilon) \implies \frac{\partial n}{\partial \epsilon} \simeq -\beta n, \text{ luego} \\ (\rho_0)_{\text{rot}} &= \frac{4\pi\beta}{3h^3} \int_0^\infty n(\epsilon) p^4 dp \end{aligned}$$

que puede calcularse explícitamente hasta tener<sup>174</sup>[2]:

$$(\rho_0)_{\text{rot}} = \frac{4\pi p_0^4}{3h^3} \left( \frac{2\pi\sigma}{kT} \right)^{1/2} e^{-\Delta/kT}$$

que puede compararse con (obtenida antes)

$$(\rho_0)_{\text{fonones}} = \frac{16\pi^5 k^4}{45h^3 c^5} T^4$$

---

<sup>173</sup>Comprobar que conduce a la expresión que obtuvimos anteriormente para fonones por un método distinto.

<sup>174</sup>Antes vimos al calcular  $\bar{N}$  que

$$\bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty n(\epsilon) p^2 dp = \frac{4\pi V}{h^3} e^{-\Delta/kT} \int_0^\infty e^{-(p-p_0)^2/2\sigma kT} p^2 dp = \frac{4\pi V p_0^2}{h^3} (2\pi\sigma kT)^{1/2} e^{-\Delta/kT}$$

donde la última igualdad se obtiene viendo que el rango de parámetros de  $\sigma$  y  $p_0$  y  $T$  en el que trabajamos hace que  $n(\epsilon)$  sea muy picuda,  $n(\epsilon) = e^{-\Delta/kT} e^{-(p-p_0)^2/2\sigma kT} \rightarrow e^{-\Delta/kT} (2\pi\sigma kT)^{1/2} \delta(p-p_0)$ . Esto mismo se puede usar ahora dando el resultado requerido

■ Usando datos, confirmamos la situación imaginada arriba:

- Si  $T < 0'3K$ :  $(\rho_0)_{rot} \ll (\rho_0)_{fonones}$ , es decir, los rotones contribuyen despreciablemente a la inercia del fluido;
- Si  $T \simeq 0'6K$ : las dos contribuciones se hacen comparables;
- Si  $T > 1'1K$ : dominan los rotones

(ej, para  $T = 1'12K$ :  $(\rho_0)_{rot} / (\rho_0)_{fonones} \simeq 1'67 \times 10^{46}$ )

de modo que una excelente representación del fluido normal (en el sentido de que  $\rho_n \simeq (\rho_0)_{rot}$  es el gas ideal de rotones, que se movería por la componente superfluida, responsable del resto de la masa y momento del He-II.

- Nos podemos preguntar a qué temperatura desaparece el superfluido, es decir a qué  $T$ ,  $\rho_n = (\rho_0)_{rot} = \rho_{He}$ . Resolvemos y nos sale  $T = 2,5^\circ K$  que si lo comparamos con  $T_\lambda = 2,19^\circ K$  es una bastante buena aproximación si tenemos en cuenta que estamos despreciando las interacciones entre rotones y el número de éstos aumenta rápidamente con  $T$  de forma que cerca de  $T_\lambda$  al ser su número considerable las interacciones podrían ser importantes, lo que explicaría la discrepancia.
- La teoría asume hipótesis muy restrictivas, como la falta de interacciones entre rotones, el que el movimiento relativo del gas de rotones sobre el superfluido ocurre sin disipación de energía (rozamiento) para que el sistema se encuentre en equilibrio mútuo, y la postulación del espectro del rotón independiente de la  $T$  consecuencia del hecho experimental de que la masa efectiva del fluido normal  $\propto \frac{1}{T}$ .<sup>175</sup>

A pesar éxito cualitativo y semicuantitativo de la teoría de Landau, hay evidencias de que fonones y rotones no son suficientes; la más interesante aparece en cálculo de la ‘velocidad crítica’ para que

---

<sup>175</sup>En la teoría uno obtiene  $(\rho_0)_{rot} \approx \frac{p_0^2}{3kT} \frac{N}{V}$  que sugiere una masa efectiva  $\frac{p_0^2}{3kT}$  para el roton. Como la masa efectiva del fluido normal va como  $1/T$  entonces  $\langle p^2 \rangle = \langle p_0^2 \rangle \neq f(T) \Rightarrow \epsilon = \langle p^2 \rangle / 2m \neq f(T)$  pues  $m = cte$  bien definida.

desaparezca la superfluidez:

**Experimentos:** el carácter superfluido del He-II empieza debilitarse por encima de una cierta velocidad de arrastre que depende de la geometría del canal por el que fluye el helio (es mayor cuanto más estrecho sea el canal empleado), encontrándose en el rango

$$0'1\text{cm/s} < v_c < 70\text{cm/s}$$

Landau también tiene un argumento para explicar este hecho: Una masa  $M$  de superfluido tiene movimiento relativo con

$$E = \frac{1}{2}Mv^2, \quad \vec{P} = M\vec{v}.$$

Landau argumenta que, si éstas  $E$  y  $\vec{P}$  pueden contribuir a la creación de excitaciones elementales,<sup>176</sup> cualesquiera cambios han de estar relacionados ( $\delta E = M\vec{v} \cdot \delta\vec{v}$ ,  $\delta\vec{P} = M\delta\vec{v}$ ):

$$\delta E = \vec{v} \cdot \delta\vec{P}.$$

Si estos cambios son consecuencia de la creación de una excitación elemental  $\epsilon(\vec{p})$  en el sistema, conservación implica que

$$\delta E = -\epsilon, \quad \delta\vec{P} = -\vec{p}$$

que, sustituido en la propiedad de conservación:  $\epsilon = \vec{v} \cdot \vec{p} \leq vp$ .

Esto puede interpretarse:

- para crear una excitación elemental en el fluido es necesario que la velocidad de arrastre sea  $v \geq \epsilon/p$

---

<sup>176</sup>Notar: hablamos de mecanismo de creación de excitaciones distinto del de elevar la  $T$ : hacer fluir al superfluido por un canal.

- En otro caso, es decir, si se cumple el *criterio de Landau*,

$$v < (\epsilon/p)_{\text{mín}} \equiv v_c,$$

no puede aparecer componente normal, luego ha de mantenerse el carácter superfluido.

### Implicaciones:

1. Si este hecho ha de explicarse con partículas ordinarias  $\epsilon = p^2/2m$ , se sigue  $(\epsilon/p)_{\text{mín}} = 0 \implies v_c = 0$ , en contra de la observación.<sup>177</sup>
2. Suponiendo fonones,  $\epsilon = pc$  :  $v_c = c \simeq 24,000$  cm/s (ya llegamos antes a esto por otro camino), muy superior a la observada.
3. Suponiendo rotones,  $\epsilon = \Delta + (p - p_0)^2 / 2\sigma$  :  $\epsilon_{\text{mín}} = \epsilon(p = p_0) = \Delta$ , luego  $v_c \simeq \Delta / p_0 = 6,300$  cm/s, todavía dos órdenes de magnitud por encima del valor observado (además, no explica la dependencia observada en la geometría del canal).

**Consecuencia:** hay que buscar otras exc elem!<sup>178</sup>

London (1939): la transición  $\lambda$  podría ser un ejemplo de condensación B-E. Si el He fuese gas ideal de átomos de He (bosones), B-E ocurriría a 3'13K, luego era atractivo interpretar la diferencia con 2'19K consecuencia de interacciones, no necesariamente despreciables a bajas  $T$ 's.

---

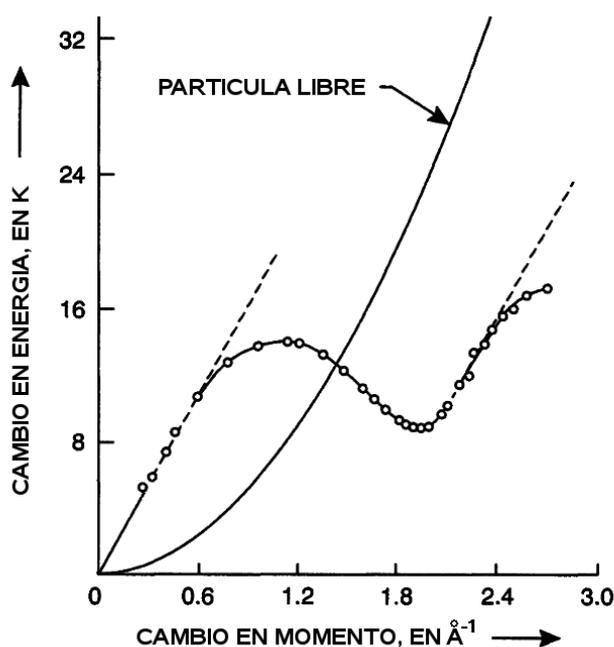
<sup>177</sup>Esto reforzaba la posición de Landau (ver luego) de que, aunque gas ideal de partículas (átomos de He) sufre condensación de B-E, fenómeno muy parecido a la transición  $\lambda$ , no es capaz de dar cuenta por sí mismo de la superfluidéz.

<sup>178</sup>A este respecto, es interesante notar q un experimento (Rafi de Picciotto *et al*, Instituto Weizmann, Israel, *Nature* ~1994) parece confirmar la predicción de Robert Laughlin (1982, 'efecto cuántico fraccional de la corriente de Hall') de que  $\exists$  cargas electricas fraccionales. De hecho, se detectan entidades con carga  $\frac{1}{3}e$  al aplicar un campo magnético muy intenso a un gas de electrones confinado en dos dimensiones (flujo de electrones por una de las capas de un semiconductor multicapa). Es claro que se trata de *cuasipartículas* o asociaciones estables —debido a q un efecto cooperativo origina una especie de estado cuántico mecroscópico— que tienen algunas de las propiedades de una partícula, como las excitaciones elementales que estamos discutiendo.

Landau (1941-47) no toma en serio esta posibilidad, conduciendo sus estudios en otra dirección sin caer en la cuenta de que sus excitaciones elementales han de justificarse como consecuencia de esas interacciones

Bogoliubov: primero en desarrollar una teoría microscópica para bosones interactuando, mostrando que (como consecuencia ocupación macrosc del estado  $m=0$ ) el espectro de excitaciones para interacciones débiles deja su forma usual (para  $\lambda$  grandes) para presentar la dispersión típica de fonones ¡no sólo había fonones en sólidos!

Feynman, Cohen y otros (1956,...): fonones y rotones son parte del mismo espectro,<sup>179</sup> y proponen experimento dispersión neutrones lentos ( $\lambda \gtrsim 4$ ) en He-II, que (realizado por Henshaw & Woods 1961) confirma predicción:



- $p/\hbar \lesssim 0.26 \text{\AA}^{-1}$  : parte lineal con pendiente 237 m/s, próxima a velocidad sonido en He  $c \simeq 238$  m/s;

<sup>179</sup>Ver Huang p.383 y siguientes!

- luego máximo (“maxón”) para  $\epsilon/k = 13'92 \text{ K}$  y  $p/\hbar = 1'12 \text{ \AA}^{-1}$ , transición suave hacia:

- mínimo (rotón) con

$$\frac{\Delta}{k} = 8'65 \text{ K}, \quad \frac{p}{\hbar} = 1'92^{-1}, \quad \sigma = 0'16 \text{ m}_{\text{He}} \quad (T = 1'1 \text{ K})$$

que confirma la hipótesis de Landau.

- luego cambio en 2ª derivada que sugiere otro máximo...

Para  $T = 1'6 \text{ K}$  y  $1'8 \text{ K}$  no se observaban cambios esenciales, aunque  $\Delta$  ligeramente menor

Vimos que fonones y rotones no pueden explicar observaciones referidas a cualidades y valores de  $v_c$ ; hay otras características del He-II que tampoco pueden entenderse a partir de esas excitaciones elementales:

- fluidos ordinarios presentan *régimen lineal* a bajas velocidades cuando se mueven por un canal y, a partir cierta velocidad (que depende de la geometría del canal), *régimen turbulento* en el que no son válidas las leyes lineales familiares (viscosidad independiente de la velocidad, flujo calor  $\propto \Delta T$  aplicado) si no que éstas aparecen como la aproximación lineal de teorías perturbativas.
- en el He-II puede también detectarse, bajo condiciones experimentales muy cuidadosas, un ‘*régimen lineal*’ con la salvedad de que los efectos no-lineales no son entonces despreciables sino que parecen ausentes por completo (hidrodinámica superficial, las leyes lineales son exactas en el régimen lineal). A cierta velocidad aparece también turbulencia, pero singular y difícil de explicar:
  - para comprender las observaciones hay que suponer (*hipótesis de Landau*) que el flujo —en este ‘*régimen turbulento*’— es irrotacional (que, en cierto sentido, que luego preciso, implica ausencia de rotaciones)

- otras observaciones sugieren falta de viscosidad (sin la que es difícil intuir la turbulencia en un fluido ordinario)
- El régimen turbulento en este caso debe ser compatible con la condición de Landau.

Se plantea la necesidad de mostrar cómo el estado fundamental de un sistema de bosones (es decir, un superfluido) puede presentar, por encima de cierta  $v$ , algún tipo de *movimiento organizado*, como los que son característicos en turbulencia, pero consistentes con la irrotacionalidad del conjunto, y que justifique la  $\exists$  de nuevo tipo de excitaciones elementales (los verdaderos ‘rotones’ buscados por Landau)

La idea que resuelve este problema, en análisis de Onsager (1949) sobre teoría clásica de turbulencia y vórtices en el que se sugiere que en un superfluido pueden existir vórtices cuantizados con cuanto  $= h/m$ , con  $m =$  masa del bosón

Feynman (1955): proporciona fundamento teórico para  $\exists$  de movimiento de vórtices cuantizados en fluido de Bose.

# Bibliografía

[1] Hacemos el cálculo en la microcanónica. El n<sup>o</sup> de microestados accesible en el macroestado  $(N, V, E, \vec{P})$  es

$$\Omega(N, V, E, \vec{P}) = \sum_{\{n_i\}}' W(\{n_i\})$$

donde

- o  $W(\{n_i\})$  = n<sup>o</sup> microest distintos asociado con conjunto dado de nos de ocupación  $\{n_i\}$ ,
- o la suma esta restringida por las leyes de conservación:

$$\sum n_i = N, \quad \sum n_i \epsilon_i = E, \quad \sum n_i \vec{p}_i = \vec{P}$$

Entonces,

$$S = k \ln \left[ \sum_{\{n_i\}}' W(\{n_i\}) \right]$$

que puede aproximarse por el log del tno mayor,  $S \simeq k \ln W(\{n_i^*\})$ , donde  $\{n_i^*\}$  = nos de ocupación correspondientes a distribución más probable, que maximiza  $W$ .

La condición de máximo sobre  $W$  conduce a

$$\delta \ln W - [\alpha \sum \delta n_i + \beta \sum \epsilon_i \delta n_i + \vec{\gamma} \cdot \sum \vec{p}_i \delta n_i] = 0.$$

Procediendo como nos enseñaron en la escuela, se obtiene lo deseado.

[2] En lugar de volver a calcular directamente esta integral, recordemos que

$$\frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty n(\epsilon) p^2 dp = \frac{\bar{N}}{V}$$

y que, para las  $T$ 's de interés, se tenía:

$$\frac{4\pi}{h^3} p_0^2 (2\pi\sigma kT)^{1/2} e^{-\Delta/kT} = \frac{\bar{N}}{V}.$$

Comparando estas dos ecs, vemos que las aproximaciones usadas son equivalentes, a efectos prácticos, a sustituir  $p^2$  por  $p_0^2$  y hacer

$$\int_0^\infty n(\epsilon) dp = (2\pi\sigma kT)^{1/2} e^{-\Delta/kT}.$$

Con las mismas aproximaciones, se tiene aquí:

$$(\rho_0)_{\text{rot}} = \frac{4\pi\beta}{3h^3} p_0^4 (2\pi\sigma kT)^{1/2} e^{-\Delta/kT}$$

de donde se sigue lo indicado.

[3] Notamos lo siguiente:

> **Otra comprobación de la hipótesis de Landau:**

○ Suponiendo  $\rho_n \equiv (\rho_0)_{\text{rot}}$ , nos preguntamos a qué  $T$  se hace  $\rho_n(T)$  igual a la densidad  $\rho_{\text{He}}$  del líquido (tendría que corresponderse con la  $T$  a la que desaparece la componente superfluida)

○ Esa igualdad ocurre para  $T \simeq 2'5 \text{ K}$ , a comparar con  $T_\lambda \simeq 2'19 \text{ K}$

○ Resultado aceptable puesto que:

· hemos supuesto rotones libres, pero, al aumentar éstos rápidamente con  $T$ , podrían interaccionar cerca de  $T_\lambda$ ;

· a esas  $T$ 's, pueden ser importantes otras exc elem, como veremos

> **Queda ahora claro hasta qué pto impropio imaginar partículas ‘normales’ (excitadas) y ‘superfluidas’ (en est fund):**

○ Tisza+Landau  $\implies$  (si acaso) en un líquido cuántico pueden coexistir dos *movimientos* o grados de libertad, con una ‘masa efectiva’ asociada de modo que la suma de ambas iguala la masa real total del líquido

○ Los dos movimientos se producen (volviendo al lenguaje impropio) ‘sin rozamiento’: si en un est de equil puede haber mov relativo entre partes del sist (lo que acabamos de permitir al considerar el gas de rotones con mov uniforme), este mov ha de producirse sin disipación de energía

> **Puede verse** con facilidad que se tiene en esta teoría que  $(\rho_0)_{\text{rot}} \simeq (p_0^2/3kT) \frac{N}{V}$ . lo que sugiere una **masa efectiva**  $p_0^2/3kT$  para cada rotón. Esto implica, en particular, que la masa efectiva es  $\propto T^{-1}$ . Landau descubrió este hecho empíricamente. Analizado datos del  $C_V$  y de la velocidad del 2ºsonido llegó a la conclusión:

$$\left. \begin{array}{l} \text{masa efectiva} = \frac{\langle p^2 \rangle}{3kT} \\ \text{masa efectiva} \propto \frac{1}{T} \end{array} \right\} \implies \langle p^2 \rangle = p_0^2, \text{ independiente de } T.$$

Esto llevaba al contrasentido de que, suponiendo que todo era consecuencia de partículas con  $\epsilon = p^2/2m$ , con  $m = \text{const.}$  bien definida, sería  $\langle \epsilon \rangle = \langle p^2 \rangle / 2m$ , independiente de  $T$ , mientras que es lógico esperar que  $\langle \epsilon \rangle$  aumente con  $T$ . Este argumento le llevó a postular la existencia de exc elem con el espectro rotón.