Estadística

2º curso del Grado en Ciencias de la Actividad Física y el Deporte

---o0o---

Concepto General de Test de Hipótesis

Bioestadística - Facultad de Medicina
Universidad de Granada (España)
http://www.ugr.es/~bioest

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Un **contraste (test) de hipótesis** es un conjunto de técnicas estadísticas que se ocupan de ver si una afirmación acerca de una población es cierta o no.

El entrenamiento alternativo es mejor que el tradicional
Los hombres se lesionan más que las mujeres
La proporción de lesiones en el fútbol es mayor que en el baloncesto

En un contraste de hipótesis intervienen siempre dos enunciados excluyentes entre sí, **las hipótesis**:

Hipótesis nula ó $\mathbf{H_0}$ es la hipótesis que se somete a comprobación (*contraste* en terminología estadística) para ver si es cierta ó no

Hipótesis alternativa ó $\mathbf{H_1}$ es la hipótesis que se acepta cuando se rechaza H_0, suele ser la negación total o parcial de la H_0

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Por ejemplo:

H_0: Los entrenamientos alternativo y tradicional son igualmente efectivos

H_1: Uno de los entrenamientos es más efectivo que el otro

Pasos para llevar a cabo un contraste de hipótesis

1º) Determinar H_0 y H_1.
2º) Tomar información de la realidad para ver si esa información contradice H_0.
3º) Tomar una decisión por H_0 o por H_1.

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Naturaleza de un test determinista

El método científico actúa así:

Paso 1: Plantear las hipótesis

$H_0 \equiv$ Teoría Newtoniana es cierta *vs.* $H_1 \equiv$ es falsa

Paso 2: Tomar los datos (órbitas planetarias)

Paso 3: Comprobar si los datos son conformes con lo que predice H_0:

a) Datos sí conformes con $H_0 \Rightarrow$ Acepto H_0: no es fiable, siempre puede haber otros datos -no tomados- que la contradigan (la Ciencia es una aproximación continua a la VERDAD).

b) Datos no conformes con $H_0 \Rightarrow$ Rechazo $H_0 \Rightarrow$ Acepto H_1: sí es fiable.

Naturaleza de un test aleatorio

La Estadística actúa igual, pero se ve obligada a alterar el Paso 3.

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Ejemplo

Supongamos que nos enfrentamos a quien adelante será llamado "oponente" en el siguiente juego: el oponente proporciona una moneda que se lanza al aire, ganando él si sale cara y el lector si sale cruz. Si el oponente no es de fiar, es lógico que el lector tome sus precauciones solicitando probar previamente la moneda un número de, digamos n=10 veces y decidiendo, a partir de los resultados obtenidos, si el oponente es ó no tramposo (es decir, si el lector participa ó no en el juego).

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Hipótesis

- $H_0 \equiv$ sí juego ≡ El jugador es honrado ≡ $p = 0{,}5$ (p = % caras).
- $H_1 \equiv$ no juego ≡ El jugador es fullero ≡ $p>0{,}5$ (da demasiadas caras).

Datos

- Lanzar n=10 veces la moneda: *tamaño de muestra*.
- Observar los 10 resultados (C, C, F, …, F): *muestra aleatoria*.
- Fijarse en la característica relevante para el problema planteado ⇒ nº de caras x: *estadístico de contraste*.
- Con ello $x \to B(n=10;\ p=\text{desconocida})$ y al observarla se obtiene $x = x_{exp}$: *valor experimental* (del estadístico de contraste).

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Regla de Decisión

- Si x_{exp}=10 podrá parecer raro … ¡pero es posible! (la binomial toma valores de 0 a 10) ⇒ ¡siempre se concluiría H_0! ⇒ ¡hay que cambiar la regla del caso determinista!
- Comprobar si el resultado es improbable bajo H_0 (p=50%):
  - **a)** Resultado no improbable bajo H_0 (como x_{exp}=5) ⇒ aceptar H_0: no es fiable, pues una moneda incorrecta (p>50%) puede dar 5 caras.
  - **b)** Resultado sí improbable bajo H_0 (como x_{exp}=10) ⇒ rechazo H_0 ⇒ acepto H_1: no es fiable, pues una moneda correcta (p=50%) puede que dé 10 caras.
- En Estadística las dos conclusiones pueden ser erróneas: lo relevante es que esos errores ocurran con poca probabilidad (error α si se concluye H_1; error β si se concluye H_0).

- **Nuevo Paso 3).** Comprobar si los datos son improbables o no bajo H_0. Si los datos son improbables, se rechaza H_0 y se acepta H_1. Si los datos no son improbables, se acepta H_0.

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Si el número de caras al lanzar 10 veces la moneda es grande le llamaremos tramposo

Luego la decisión se basa en el número X de caras obtenidas al lanzar 10 veces la moneda

En general:

A todo número que, obtenido a partir de las observaciones de una muestra (tal es x), sirve para decidirse por H_0 ó por H_1, se le llama ***estadístico de contraste.*** En nuestro caso el estadístico de contraste será

X = "número de caras obtenidas al lanzar 10 veces la moneda"

Observemos que X es una v.a. con distribución B(n=10;p)

si H_0 es cierta será $X \rightarrow B(n=10;p=½)$, y cualquier valor de X (0, 1, 2, ..., 9, 10) es compatible con H_0

¿Qué valores de X me llevarán a rechazar la H_0?

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Contrastes hipótesis. - 9
Resúmenes: 5.1-4

Valores posibles, con sus probabilidades, del número de caras obtenidas al lanzar 10 veces una moneda correcta (p=1/2)

Valores de x	*Probabilidad*	*Sumas*	*Regiones*
0	0.0010	0.9453 ≈ 94.5%	Región de Aceptación (de H_0)
1	0.0098		
2	0.0439		
3	0.1172		
4	0.2051		
5	0.2461		
6	0.2051		
7	0.1172		
8	0.0439	0.0547 ≈ 5.5%	Región de Rechazo (de H_0)
9	0.0098		
10	0.0010		

A la vista de estos datos:
¿Qué valores nos llevarán a rechazar la hipótesis nula

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Contrastes hipótesis. - 10
Resúmenes: 5.5

¿Le diremos tramposo si salen X=10 caras?

Si, porqué siendo la moneda correcta la probabilidad de que salgan diez caras es demasiado baja: 0.001; es decir $P(X = 10 \mid p = ½) = 0.001$.

¿Puedo equivocarme con esta regla?
¿Está exenta de error?

Si que puedo equivocarme, puesto que usándola etiqueto como tramposo al 1 por mil de los honrados. De cada 1000 oponentes honrados uno sería etiquetado como tramposo si uso esta regla.

En un contraste de hipótesis aleatorio la decisión al asumir como cierta H_1 no está exenta de error

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Definición

Error de Tipo I o **Error α** es aquel que se comete al decidirse por H_1 siendo cierta H_0.

$$\alpha = P(decidir\ H_1 \,|\, cierta\ H_0)$$

A partir de ahora el investigador deberá elegir el error α que está dispuesto a soportar.

- Para un error α=0.001 le diré tramposo si salen 10 caras.

-Si elijo un error $\alpha \approx 5.5\%$ entonces le diré tramposo siempre que salgan 8 caras o más.

El error α se fija de antemano en base a cómo de importante sea una decisión errónea por H_1. En caso de duda utilizar un α = 5%.

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

El error α se fija de antemano en base a cómo de importante sea una decisión errónea por H_1. En caso de duda utilizar un α = 5%.

En el ejemplo: α=0,1% si el oponente es "amigo" o me va a llevar a los tribunales; α=20% si es un "desconocido"; α=5% es lo tradicional (salvo razones de peso).

En el ejemplo:

$$\alpha = P\left\{\text{Decidir } H_1 \middle| \text{es cierta } H_0\right\} = P\left\{x \geq 8 \middle| p = 0.5\right\} \simeq 5.5\% \Rightarrow$$

de cada 100 honrados, a 5.5 les llamaremos fulleros indebidamente.
El valor se calcula en base a la $B(n=10;\, p=0.5)$.

En la práctica

Antes: se fijó la RC $\rightarrow$ se determina α.
En la práctica: se fija $\alpha \rightarrow$ se determina la RC.
Cada α dará una RC y una conclusión diferente.

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Contrastes hipótesis. - **13**
Resúmenes: 5.1-5

Valores de α para las distintas regiones críticas y distintos valores del tamaño de muestra ($H_0 \equiv p=½$)

Tamaño muestral	Región de aceptación	Región crítica	Error α	Error β	
				$H_1 \equiv p=0.6$	$H_1 \equiv p=0.9$
n = 10	0,1,2,…..,6	7,8,9,10	17.2 %	61.8 %	1.3 %
	0,1,2,.....6,7	8,9,10	5.5 %	83.3 %	7.0 %
	0,1,2,.....6,7,8	9,10	1.1 %	95.4 %	26.4 %
	0,1,2,.....6,7,8,9	10	1 ‰	99.4 %	65.1%
	0,1,2,.....6,7,8,9,10	------	0 %	100 %	100 %
n = 50	0,1,........................,30	31,...............,50	5.5 %	55.6 %	0 %

Todo resultado puede ser **significativo** (ó **no significativo**) con tal de tomar un error α suficientemente grande (ó pequeño). De ahí que el resultado de un test deba venir acompañado del error á bajo el cual se obtuvo tal conclusión.

¿Se puede elegir un α=0?
¿Qué pasaría?

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Contrastes hipótesis. - **14**
Resúmenes: 5.5

Por otra parte, si me decido por H_0
¡También puedo estar equivocándome!

Error de Tipo II o **Error β** es aquel que se comete al decidirse por H_0 siendo cierta H_1.

$$\beta = P(decidir\ H_0 \,|\, cierta\ H_1)$$

Cuando H_0 es cierta p solo puede valer 0,5, pero cuando es cierta H_1 hay muchos valores posibles para este parámetro.

El error β es una función de los valores de p, por tanto,

¡El error β está indeterminado!

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

¿qué diferencia hay entre estas dos situaciones?

El tramposo puede ser hábil e intentar no parecerlo, por ejemplo con una moneda con p=0,6

El tramposo puede ser avaricioso y querer ganar rápido, por ejemplo con una moneda con p=0,9

Valores de α y β para las distintas regiones críticas, distintas alternativas y distintos valores del tamaño de muestra ($H_0 \equiv p=½$)

Tamaño muestral	Región de aceptación	Región crítica	Error α	Error β	
				$H_1 \equiv p=0.6$	$H_1 \equiv p=0.9$
n = 10	0,1,2,….,6	7,8,9,10	17.2 %	61.8 %	1.3 %
	0,1,2,…..6,7	8,9,10	5.5 %	83.3 %	7.0 %
	0,1,2,…..6,7,8	9,10	1.1 %	95.4 %	26.4 %
	0,1,2,…..6,7,8,9	10	1 ‰	99.4 %	65.1%
	0,1,2,…..6,7,8,9,10	------	0 %	100 %	100 %
n = 50	0,1,……………………,30	31,……………,50	5.5 %	55.6 %	0 %

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Cuanto más se "aleje" H_1 de H_0, es decir, mas diferente sea p del 0.5 propuesto por la H_0, menor es el error β cometido, es decir, menor probabilidad hay de aceptar indebidamente H_0 (de que el test no dé significativo indebidamente).

El error β es, en principio, incontrolable lo que es grave.
No es lo mismo una decisión por H_1 que por H_0

... antes de continuar

Frases equivalentes a "decido H_0" y "decido H_1"
(en todos los casos al final debe añadirse el α utilizado)

Decisión por H_1	*Decisión por H_0*
Estadísticamente significativo	Estadísticamente no significativo
Se rechaza H_0	No se rechaza H_0
Se acepta H_1	Se acepta H_0
La muestra no es compatible con la hipótesis nula	La muestra es compatible con la hipótesis nula
El azar no explica la discrepancia entre la muestra y la hipótesis nula	El azar puede explicar la discrepancia entre la muestra y la hipótesis nula

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Potencia de un test:

$$\text{Potencia} = \theta = \text{P}(decidir\ H_1 \mid cierta\ H_1)$$

- La potencia es la probabilidad de un acierto (al decidir por H_1)
- Hay una relación evidente entre la potencia y el error β

$$\theta = 1 - \beta$$

- Depende de los distintos valores de p

... una tabla que ayuda a aclarar las cosas

		Cuando realmente es cierta	
		H_0	**H_1**
Se concluye	**H_0**	Acierto	Error β o Error Tipo II
	H_1	Error **α** o Error Tipo I	Acierto (Potencia)

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Relaciones entre los errores α y β

Toda disminución del error α (o β) conlleva un aumento del error β (o α).

Cuanto más grande es una muestra, más pequeño es el error β para un test al error α dado, es decir más fiables son sus conclusiones por H_0.

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Fiabilidad de las conclusiones y efecto de aumentar *n*

Si se concluye H_1, la decisión sí es fiable (error α fijado) y no tiene sentido $\uparrow n$ (si lo hace, lo más probable es seguir concluyendo H_1).

Si se concluye H_0, la decisión no es fiable (error β no fijado) y si se $\uparrow n$:
Si H_1 es verdad: puede que se concluya H_1 (pues $\theta\uparrow$).
Si H_0 es verdad: se seguirá concluyendo H_0 en general.

En todo test de hipótesis, una decisión por H_1 debe aceptarse sin más, en tanto que una aceptación por H_0 puede requerir el aumento del tamaño de muestra.

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

El resultado de un contraste de hipótesis puede ser o decidirme por H_1 o decidirme por H_0. Pero
¿Son fiables las decisiones de un contraste de hipótesis?

Cuando se acepta H_1 la conclusión **es fiable**, pues la posibilidad de un error α está controlada y es tan pequeña como se haya querido. Puede ser que la conclusión sea errónea, pero la pequeña posibilidad de ello (α) ha sido asumida. De concluir H_1, no tiene sentido aumentar el tamaño de la muestra, pues el error α sigue siendo el mismo y lo más probable es que sigamos concluyendo H_1.

Cuando se acepta H_0 la conclusión **no es fiable,** pues la posibilidad de error β no está controlada y puede haber sido grande. Ahora un aumento del tamaño de muestra puede ser conveniente pues, si H_1 es cierta, el error β se hará más pequeño, la potencia aumentará y será más probable concluir H_1 (y acertar). Pero también puede ser innecesario (si en realidad H_0 es cierta)

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Razones por la que en un test de hipótesis se puede aceptar H_0:

a). Sea cierta H_0.

b). Por azar. La muestra ha sido desafortunada y ha llevado a aceptar H_0 (siendo cierta H_1).

c). El tamaño de la muestra no es lo suficientemente grande para poner de manifiesto diferencias entre H_0 y H_1.

Cuando en un test de hipótesis se acepta H_0, no se sabe por cual de estos tres motivos se ha aceptado, luego la aceptación de H_0 no es fiable (salvo que el tamaño muestral se calcule fijando los errores α y β, en cuyo caso la aceptación de H_0 es fiable).

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Pero entonces,
¿Cómo se si tengo que aumentar el tamaño de la muestra?

Con un concepto nuevo:

¿Qué hago si me salen X=8 caras?

Depende del α

El problema se puede plantear a la inversa.

Construyo una región crítica que empiece en 8 y calculo el valor de α para esa región crítica, a ese α se le denomina **valor P** o **nivel de significación.**

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

P es el **mínimo error α** que se debe estar dispuesto a cometer si se desea concluir H_1.

El valor **P** mide cómo de **raro** es lo que ha sucedido (ó algo más extremo) **si fuera cierta H_0.**

El valor **P** puede entenderse como una **medida de la disconformidad de los datos con la hipótesis nula**, indicando cómo de improbables son estos si H_0 es cierta.

En la práctica se calcula siempre el valor P y en base a él se decide si se acepta o se rechaza la hipótesis nula

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

¿Cómo de pequeño debe ser el nivel de significación P para rechazar la hipótesis nula?

Debe evitarse aceptar H_0 para valores de **P** próximos al nivel de significación **α** elegido (el 5% en general).

Por cuantificar la regla podemos convenir la siguiente

Regla Automática de Decisión

* Si $P \leq 5\%$: decidir H_1 (hay fuertes evidencias en contra de H_0).
* Si $P > 15\%$ ó 20%: decidir H_0 (hay acuerdo razonable con H_0).
* En otro caso: no podemos rechazar inmediatamente H_0 pero hay evidencias en su contra, por tanto conviene ampliar la muestra

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Realización práctica de un contraste de hipótesis.

1. **Formular de la hipótesis nula y de la hipótesis alternativa.** ✓
2. **Calcular el estadístico de contraste C_{exp}.** ✓

3. Elegir el error α y comparar C_{exp} con la cantidad teórica C_α correspondiente a dicho error y que se obtiene a partir de la tabla de distribuciones de probabilidad adecuada. Entonces decidir:

   Si $C_{exp} \geq C_\alpha \Rightarrow H_1$ al error $\boldsymbol{\alpha}$

   Si $C_{exp} < C_\alpha \Rightarrow H_0$

3´. **A partir de la tabla de distribuciones de probabilidad adecuada, obtener el nivel de significación P y, usando la regla automática de decisión, tomar la decisión final.** ✓

En la práctica, optaremos siempre por dar el nivel de significación P

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Ejemplos de la obtención de P

Para centrar ideas supongamos que la distribución de referencia es una *t-Student* con 10 g.l.

Empiécese con un nivel α muy grande y váyase rebajando mientras se rechace la hipótesis nula, estando P entre el último α al que se rechazó la hipótesis nula y el primero al que ya no se rechaza.

1) $t_{exp}=2.40 \quad t_{0.05}=2.228 < t_{exp}=2.40 < t_{0.02}=2.764 \Rightarrow 0.02 < P < 0.05 \Rightarrow \mathbf{H_1}$

2) $t_{exp}=1.21 \quad t_{0.30}=1.093 < t_{exp}=1.21 < t_{0.20}=1.372 \Rightarrow 0.20 < P < 0.30 \Rightarrow \mathbf{H_0}$

3) $t_{exp}=2.11 \quad t_{0.10}=1.812 < t_{exp}=2.11 < t_{0.05}=2.228 \Rightarrow 0.05 < P < 0.10 \Rightarrow \mathbf{n}\uparrow$

4) $t_{exp}=6.33 \quad t_{0.001}=4.587 < t_{exp}=6.33 \Rightarrow P < 0.001 \Rightarrow \mathbf{H_1}$

5) $t_{exp}=0.55 \quad t_{0.50}=0.700 > t_{exp}=0.55 \Rightarrow P > 0.50 \Rightarrow \mathbf{H_0}$

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Tabla de la t de Student
(Tabla 3)

$0.02 < P < 0.05$

g.l \ α	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.929
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	[illegible]	[illegible]	3.106	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	[illegible]	[illegible]	3.055	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	[illegible]	[illegible]	3.012	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	0.863	[illegible]	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965

t_{exp}=2.40

Fin del capítulo