

Integrales

Ejercicios de repaso.

1.-
$$\int_0^4 x^2 dx$$

2.-
$$\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$$

3.-
$$\int_0^3 e^{-2x} dx$$

4.-
$$\int_1^2 3x^5 dx$$

5.-
$$\int_1^4 (7x + \sqrt{x}) dx$$

6.-
$$\int_1^4 \frac{3}{(2x)^2} dx$$

7.-
$$\int_0^6 (x^2 + 5)(x - 3) dx$$

8.-
$$\int_1^4 (2x\sqrt{x}) dx$$

9.-
$$\int_1^3 x^2 (x + \frac{2}{3}) dx$$

10.-
$$\int_0^1 (x^3 - x^2) dx$$

11.-
$$\int_2^4 (x + 5) 2x dx$$

12.-
$$\int_0^1 5x(6x - 9x^2) dx$$

13.-
$$\int_1^2 (6 - 2x + 8x^2) dx$$

14.-
$$\int_{-2}^2 (1 + x)(x - 1) dx$$

15.- $\int_2^4 (x - 2)^2 dx$

16.- $\int_0^3 (x + 4)(x - 5) dx$

17.- $\int_1^2 \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx$

18.- $\int_{-2}^2 \left(\frac{-3}{2}x^3 + 6x^2 - \frac{x}{4} + \frac{1}{3}x \right) dx$

19.- $\int_1^4 1 / \sqrt{x} dx$

20.- $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

Soluciones a los ejercicios de repaso.

- | | |
|--------------|-----------------------------|
| 1.- 21,33. | 11.- 97,33. |
| 2.- 0,667. | 12.- -1,25. |
| 3.- 0,499. | 13.- 21,66. |
| 4.- 31,5. | 14.- 1,33. |
| 5.- 57,17. | 15.- 2,67. |
| 6.- 0,562. | 16.- -55,5. |
| 7.- 108. | 17.- $\frac{5}{2} + \ln(8)$ |
| 8.- 24,8. | 18.- 32. |
| 9.- 25,778. | 19.- 2 |
| 10.- -0,,83. | 20.- 4,67. |

INTEGRALES DEFINIDAS.

Concepto.

La integral definida de la función $f(x)$ entre a y b , $\int_a^b f(x)dx$, es el valor del área del recinto delimitado por la gráfica de la función y el eje horizontal entre dos abscisas determinadas $x=a$ y $x=b$. La función se considera que toma valores no negativos para todo los valores del intervalo $[a,b]$.

Los números a y b se denominan límites de integración. La función $f(x)$ recibe el nombre de integrando y el símbolo dx se llama diferencial de x .

Cálculo de una integral definida.

Se llama antiderivada (o primitiva) de $f(x)$ a la función $F(x)$ cuya derivada sea el integrando, es decir, una función tal que $F'(x) = f(x)$.

La regla de Barrow establece que el valor de la integral definida entre a y b , es la antiderivada de la función evaluada en b menos la antiderivada evaluada en a .

Es decir, $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Ejemplo: Sea la función $f(x) = x$. Se quiere calcular $\int_1^2 xdx$. Usando la regla de

Barrow resulta $\int_1^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 1,5$.

Antiderivadas más usuales.

Para calcular la integral definida de una función necesitamos su antiderivada. Veamos a continuación algunas de las antiderivadas de funciones más usuales.

Función, $f(x)$	Antiderivada, $F(x)$
k (constante)	kx
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}, n \in \mathbb{R}, n \neq -1$.
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
e^x	e^x
e^{kx}	$\frac{e^{kx}}{k}$

Propiedades de las integrales definidas.

1.- La integral de la suma de dos o más funciones es igual a la suma de integrales de las funciones por separado.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2.- La integral de la resta de dos o más funciones es igual a la resta de integrales de las funciones por separado.

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

3.- La integral del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral de la función.

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Ejercicios finales.

1.- $\int_0^1 2x + 1 \, dx$

2.- $\int_1^2 x^2(x - 2) \, dx$

3.- $\int_0^1 (x + 1)(x - 2) + 6 \, dx$

4.- $\int_1^3 \frac{x}{x^3} \, dx$

5.- $\int_{-1}^1 (x + 4)^2 \, dx$

6.- $\int_0^2 (1 + x)(x - 1) \, dx$

7.- $\int_{-1}^2 6 \, dx$

8.- $\int_0^1 e^{-x} \, dx$

9.- $\int_{-1}^1 (1 - x^2) \frac{3}{4} \, dx$

10.- $\int_0^{1,5} \frac{x}{6} + \frac{1}{12} \, dx$

11.- $\int_0^4 \frac{1}{8} \, dx$

12.- $\int_0^3 2e^{-2x} \, dx$

14.- $\int_0^2 x^2 \frac{1}{4} (3 - x) \, dx$

15.- $\int_0^1 2x(1 - x) \, dx$

Soluciones a los ejercicios finales.

- 1.- 5. 11.- 0,25.
2.- -1,25. 12.- $1 - e^{-6}$.
3.- 3,83. 13.- 0,97.
4.- 0,67. 14.- 1.
5.- 32,66. 15.- 0,33.
6.- 0,667.
7.- 18.
8.- $\frac{1}{e} - 1$.
9.- 1.
10.- -0,312.