# Tema 2
# CÁLCULO MATRICIAL y ECUACIONES LINEALES

Prof. Rafael López Camino
Universidad de Granada

## 1 Matrices

**Definición 1.1** *Una matriz (real) de $n$ filas y $m$ columnas es una expresión de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

*donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Diremos que $a_{ij}$ es el elemento de la matriz que está en el lugar $i$ y columna $j$. El conjunto de todas las matrices $n \times m$ se denotará por $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Si $n = m$ se dirá que la matriz es cuadrada de orden $n$ y el espacio se denotará por $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En tal caso, a todos los elementos $a_{ii}$ se llamará la diagonal principal de la matriz.*

**Teorema 1.2** *En $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ se define la suma de matrices y el producto por escalares como*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$
$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

*Entonces $(\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ es un espacio vectorial. Además $dim(\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})) = nm$ donde una base es $\{E_{ij}\}$ donde*

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta jl.$$

**Definición 1.3** *Dada una matriz* $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$*, se llama traspuesta de* $A$ *a la matriz* $A^t$ *donde* $(A^t)_{ij} = a_{ji}$*. Por tanto,* $A^t \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*. Algunas propiedades inmediatas son* $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ *y* $(A+B)^t = A^t + B^t$*.*

**Definición 1.4** *Una matriz cuadrada* $A$ *se llama simétrica (resp. antisimétrica) si* $A = A^t$*, es decir,* $a_{ji} = a_{ij}$ *(resp.* $A = -A^t$*, es decir,* $a_{ji} = -a_{ij}$*). Si* $S_n(\mathbb{R})$ *(resp.* $A_n(\mathbb{R})$*) denota el conjunto de matrices simétricas (resp. antisimétricas) de orden* $n$*, entonces es un espacio vectorial de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Además*

$$dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2},\ dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

**Teorema 1.5** *Se tiene* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$*.*

**Definición 1.6** *Si* $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *y* $B =\in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{R})$ *se define la matriz producto* $AB$ *por*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}.$$

*En particular,* $AB \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{R})$*.*

**Proposición 1.7** *Algunas propiedades del producto de matrices son las siguientes:*

1. $A(B+C) = AB + AC$*,* $(A+B)C = AC + BC$*.*
2. $(AB)C = A(BC)$*.*
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$*.*
4. $(AB)^t = B^t A^t$*.*
5. *Si* $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$*, entonces* $I_n A = A = A I_m$*.*

**Definición 1.8** *Una matriz cuadrada* $A$ *se dice que tiene inversa si existe* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *tal que* $AB = BA = I_n$*. De denotará por* $B = A^{-1}$*. También se dice que* $A$ *es regular. Se tiene*

1. $I_n^{-1} = I_n$*.*
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*.*
3. *Si* $\lambda \neq 0$*, entonces* $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$*.*

# 2 Determinantes

A continuación se define el determinante de una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$ por recurrencia sobre $n$. Si $n = 2$, entonces

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Sea ahora $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y se denota por $A_{ij}$ la matriz que resulta de quitar de $A$ la fila $i$ y la columna $j$. Entonces

$$det(A) = \sum_{j^1}^{n} (-1)^{1+j} det(A_{1j}).$$

Se dice que estamos 'desarrollando por la primera fila'.

**Teorema 2.1** *Algunas propiedades de los determinantes son:*

1. $det(A) = det(A^t)$.
2. *Se puede desarrollar por cualquier fila, es decir,*
$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} det(A_{ij}).$$
3. $det(AB) = det(A)det(B)$.
4. $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.
5. *Si en una matriz intercambias las dos filas, el determinante cambia de signo.*
6. *Si una fila se multiplica por $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces el determinante resultante se multiplica por $\lambda$.*
7. *Si una fila es combinación lineal de las demás, entonces el determinante es cero.*
8. $det(A^{-1}) = 1/det(A)$.

**Definición 2.2** *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, se define el rango de $A$ como el número máximo de filas linealmente independientes. Se denotará por $r(A)$. Algunas propiedades del rango son:*

1. $r(A) = r(A^t)$.

2. $r(A) \leq \{n, m\}$.

3. *Si* $a_{ii} \neq 0$*, entonces el rango de la matriz*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{nn} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   *es* $n$.

**Teorema 2.3** *Una matriz* $A$ *tiene rango* $p$ *si hay alguna submatriz de orden* $p$ *con determinante no nulo y todas las submatrices de orden* $p+1$ *tienen determinante cero. En particular, una matriz* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *tiene rango* $n$ *si y sólamente si* $det(A) \neq 0$.

**Teorema 2.4** *Si* $A$ *es una matriz regular, entonces*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(\Delta_{ji}),$$

*donde* $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$.

**Corolario 2.5** *Sean* $\{e_1, \dots, e_m\}$ *un conjunto de vectores de* $\mathbb{R}^n$*. Entonces*

1. $dim(< e_1, \dots, e_m >) = r(A)$, $A = (e_1 \ \dots \ e_m)$.

2. $\{e_1, \dots, e_m\}$ *es base de* $\mathbb{R}^n$ *si y sólamente si* $det(A) \neq 0$.

# 3 Sistemas de ecuaciones lineales

**Definición 3.1** *Un sistema de ecuaciones lineales de* $n$ *incógnitas* $x_1, \dots, x_n$ *y* $m$ *ecuaciones es un conjunto de ecuaciones de la forma:*

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

*donde* $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$. *Los términos* $b_i$ *se llamarán términos independientes. También se escribirá el sistema como* $Ax = b$*, donde* $A = (a_{ij})$*,* $x = (x_i)$ *y* $b = (b_i)$*. Si* $b = 0$*, el sistema se llama homogéneo.*

*Si el sistema tiene solución se dirá que es compatible y si la solución es única, se dirá que es compatible determinado. Si tiene más de una solución, se llamará compatible indeterminado. Si el sistema no tiene solución, se dirá que es incompatible.*

*A la matriz* $A$ *se le llamará la matriz de los coeficientes, y la matriz de juntar* $A$ *con* $B$*,* $(A|b)$*, matriz ampliada.*

**Teorema 3.2** *Dado un sistema de ecuaciones lineales* $Ax = b$*, se tiene:*

1. *El sistema* $Ax = b$ *es compatible si y sólamente si* $r(A) = r(A|b)$*.*
2. *Un sistema compatible es determinado si y sólamente si* $r(A) = n$*, donde* $n$ *es el número de incógnitas.*
3. *Si el sistema es compatible indeterminado, entonces el conjunto de soluciones es infinito, concretamente, si* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *es una solución concreta, entonces todas las soluciones son*

   $$(x_1^0, \ldots, x_n^0) + < e_1, \ldots e_m >,$$

   *donde* $\{e_1, \ldots, e_m\}$ *es una base del subespacio vectorial*

   $$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\}.$$

   *En particular, la dimensión de dicho subespacio es* $n - r(A)$*.*

**Corolario 3.3** *Un sistema homogéneo siempre es compatible. Además la solución nula es la única si y sólamente si* $det(A) \neq 0$*.*

**Corolario 3.4** *Sea un subespacio vectorial* $U$ *de* $\mathbb{R}^n$ *dado por*

$$U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\}.$$

*Entonces* $dim(U) = n - r(A)$*.*